SHOUT
SHARE
IT
SECURITY

S. 1142. A.

MEMORIE
DI MATEMATICA
E DI FISICA
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA
DELLE SCIENZE

TOMO XIII PARTE I

CONTENENTE LE MEMORIE DI MATEMATICA.

MODENA
PRESSO LA SOCIETÀ TIPOGRAFICA
MDCCCVII.

BRITISH
NATURAL HISTORY.

1807.

STATUTO

DELLA SOCIETA' ITALIANA DELLE SCIENZE.

I. La Società Italiana delle Scienze è composta di quaranta Socj attuali, tutti Italiani, di merito maturo, e per Opere date in luce ed applaudite riconosciuto.

II. La scienza della natura è il grande oggetto, che la Società medesima si propone. Pubblicherà pertanto, sotto il titolo di Memorie di Matematica e di Fisica, le produzioni di chiunque de' Socj vorrà render pubblico negli Atti Sociali il frutto de' proprj studj.

III. De' quaranta Membri, uno sarà Presidente della Società, e la presidenza durerà sei anni.

IV. Avrà la Società un Segretario, ed un Vicesegretario amministratore. Il primo sarà partecipe di tutte le facoltà dei Quaranta, benchè non fosse uno d' essi, ed avrà diritto, non obbligo, di presentar Memorie da inserirsi negli Atti. Il secondo terrà il maneggio economico.

V. §. 1. Altra Classe vi avrà di Socj Emeriti in numero indeterminato. Essa è preparata a chiunque dei Quaranta, o per età avanzata, o per abituale mancanza di salute, o per altro motivo, non producesse verun suo lavoro in tre consecutivi tomi delle Memorie sociali.

§. 2. Ma se un Socio attuale passasse negli Emeriti dopo aver posto otto Memorie ne' tomi sociali, in tal caso seguiterà a godere, quantunque Emerito, tutte le prerogative di Attuale.

§. 3. Che se un Socio Emerito ponga Memorie in tre tomi consecutivi, sarà restituito nel ruolo degli Attuali.

VI. Un' altra Classe, parimente indeterminata, comprenderà i Socj Onorarj. A questa saranno ascritti, previo l' assenso di ventuno almeno dei Quaranta, i Compilatori, eletti dal Presidente, degli elogj de' Socj attuali defunti. Inoltre, esso Presidente potrà aggregare a questa classe, nel suo sessennio, due Soggetti, non più, che avessero operato cosa a pro della Società, onde meritassero d' esserne onorati particolarmente.

VII. Ed altra Classe avrà finalmente il titolo di Socj stranieri, stabilita per distinguere ed onorare il merito nelle Scienze in qualunque parte fuori d' Italia. Sarà composta di dodici Soggetti, a ciascun de' quali verrà esibito in dono un esemplare d' ogni Volume, che uscirà in luce, delle Memorie Sociali.

VIII. Le aggregazioni alle classi de' Socj attuali e degli stranieri si faranno nel modo seguente. Per ogni posto che rimanga vacante, dovrà il Presidente, col mezzo del Segretario, proporre sei nomi a ciascuno de' Socj attuali, il qual farà scelta d' uno, e lo indicherà per lettera al Segretario. Quel de' sei, che, entro il termine di due mesi dalla proposta, avrà più suffragi, s' intenderà aggregato, e la Compagnia sarà fatta opportunamente consapevole dell' acquistato Cooperatore.

IX. All' elezione del Presidente saranno invitati li Socj attuali con una lettera circolare del Segretario, al quale ognuno di essi farà tenere in iscritto la nomina del Socio da sè eletto a Presidente: e la pluralità de' voti, che arriveranno al Segretario, dentro il termine di due mesi dopo la data del circolare invito, determinerà l'elezione, che dovrà esser dal Segretario annunziata ai Membri votanti.

X. Ciascheduno dei Quaranta ha facoltà d' inserire negli Atti una scoperta utile, un' importante produzione, anche di Persona non aggregata, ma Italiana, purchè se ne faccia mallevadore egli stesso, come di cosa propria, inverso la Compagnia.

XI. Di questi Autori non Socj dovrà il Presidente aggiungere i nomi, segnati con asterisco, ai sei che presenta, a tenor dell' articolo VIII, per l' elezione d' un Socio attuale. Bensì questa nomina cesserà, dopo fatta sei volte, contate dalla pubblicazione d' ogni Memoria.

XII. Le Dissertazioni o Memorie da pubblicarsi ne' Volumi della Società, debbon essere scritte in lingua Italiana e in carattere chiaro. Il Segretario dovrà apporvi la data del recapito, acciocchè sieno stampate con essa in fronte e per ordine di tempo. Che se l' opera sia voluminosa, può l' Autore distribuirla in due o più parti pe' tomi susseguenti.

XIII. Tutto ciò che è destinato pegli Atti dev' esser nuovo, inedito, importante, ed analogo all' indole scientifica di questi Volumi, che non ammette sfoggio d' erudizione, nè moltitudine di note e di citazioni.

XIV. I fogli stampati di ciascun Volume non dovranno eccedere il numero di cento. Le Memorie soprabbondanti resteranno in deposito pel tomo susseguente, o saranno restituite agli Autori che le dimandassero. Bensì, nel caso di soprabbondanza, le Dissertazioni degli Autori non Socj dovranno cedere il luogo a quelle de' Socj.

XV. La Società non si fa risponsabile delle Opere pubblicate negli Atti. Ogni Autore dev' esser mallevadore delle cose proprie, come se le pubblicasse appartatamente.

XVI. Non permette peraltro la Società le invettive personali, e nè anche le critiche non misurate: sopra di che veglierà il Segretario, e ne farà inteso il Presidente per un acconcio provvedimento.

XVII. Il Sòcio attuale, Autore d' una Memoria o d' un Elogio, avrà in dono cinquanta esemplari della sua produzione, con frontispizio apposito, e con la numerazion delle pagine ed il registro ricominciati. Ad ogni altro Autore saranno corrisposte dodici copie. Qualunque Autore ne desiderasse di più, non sarà aggravato d' alcuna spesa per conto della composizion tipografica.

XVIII. Nell' atto di queste spedizioni sarà trasmessa ai Socj, che avranno mandato il voto per le elezioni, la dimostrazione stampata del numero de' suffragj toccati ad ogni Candidato, senza il nome però de' votanti, e così ancora i conti stampati dell' amministrazione tenuta dal Vicesegretario amministratore.

XIX. Alle principali Accademie estere sarà offerto in dono un esemplare d' ogni Volume delle Memorie sociali, che andrà successivamente uscendo alla luce.

XX. I doveri del Presidente, oltre i già mentovati, sono: mantener l' osservanza dello Statuto; eleggere il Segretario ed il Vicesegretario, qualunque volta sia di bisogno; avere in governo e cura ogn' interesse della Società; rivedere, almeno una volta all' anno, i conti dell' amministrazione del Vicesegretario, alla validità de' quali fa d' uopo l' approvazione e sottoscrizione di mano propria del Presidente: e ragguagliar finalmente il Successore dello stato degli affari nell' atto di rinunziargli l' Uffizio.

XXI. Dopo il Presidente, il Segretario è la Persona propriamente deputata a mantener corrispondenza con tutti i Membri della Società, e quasi centro, ove debbono metter capo tutte le relazioni Sociali. Egli invia le patenti d' aggregazione; presiede alla stampa, ai Correttori di quella, ed all' incision delle tavole; prende cura delle spedizioni, e d' ogni altro interesse della Società, sempre però con l' approvazione del Presidente. Egli deve pure tener registro d' ogni atto che importi; custodire i voti de' Socj per le elezioni, manifestandoli al Presidente ad ogni richiesta; e finalmente eseguir tutto ciò, che ne' precedenti articoli gli è addossato.

XXII. §. 1. Ad esempio delle principali Accademie, la Società Italiana delle Scienze avrà Membri pensionarj: e la pensione sarà d' annui zecchini ventiquattro, pagabili per metà allo spirare d' ogni semestre; non computate in verun caso, sia di morte, o di rinunzia, o di transito negli Emeriti, le frazioni di semestre.

§. 2. Saranno capaci della pensione li tre più anziani, e di permanenza non interrotta, nel ruolo de' Socj attuali; sin a tanto però che rimangano nel ruolo medesimo.

§. 3. Qualunque volta l' eguaglianza d' età accademica renda ambigua la scelta d' uno o più Pensionarj, sarà tolta l' ambiguità concedendo la preferenza alla maggior età naturale. Nel qual caso, il Segretario chiederà a ciascun de' coetanei come sopra, documento legale dell' epoca di sua nascita; e chi non lo faccia a lui pervenire entro mesi tre dopo la domanda, s' intenderà che rinunzj alla pensione.

§. 4. Due Socj (sia ciascun d' essi attuale o emerito) potranno inoltre goder la pensione, loro vita naturale durante, quando siano autori ciascuno di dieci o più Memorie stampate ne' Tomi Sociali, il valor delle quali venga giudicato degno di tal premio dalla pluralità assoluta de' Socj attuali, a proposizione del Presidente; ovvero dalla pluralità relativa, quando si tratti di giudicare del merito relativo fra più Candidati.

§. 5. In ambi questi partiti le opinioni de' Socj resteranno sempre segrete, ed a sola notizia del Presidente e del Segretario: si pubblicherà unicamente il numero de' suffragj a favore di ciascun Candidato, siccome è prescritto per le elezioni nell' articolo XVIII.

§. 6. Avranno titolo di *Pensionarj anziani* li tre del §. 2; di *Pensionarj giubilati* li due del §. 4.

§. 7. Potrà il Pensionario anziano passare a goder la pensione come giubilato, sotto le condizioni prescritte dal §. 4, e quando l'un de' due posti sia vacuo.

XXIII. A compensazion delle spese, che incontrano i Quaranta ne' porti di lettere per cagion della Società, ogni anno, nel mese di Gennajo, sarà fatto l' esame, onde riconoscere i Membri attuali, che avranno corrisposto a tutte le lettere del Presidente e del Segretario nel corso dell' anno antecedente, e dentro li rispettivi termini di tempo in esse specificati; ciascuno de' quali Socj avrà diritto di esigere zecchini tre dalla cassa della Compagnia.

XXIV. §. 1. Ogni volta, che la forza pecuniaria della stessa Società lo consenta, si esporranno programmi al concorso pubblico. Risoluto ciò dal Presidente, il Segretario inviterà li Socj attuali a proporre argomenti. Questi esser dovranno, o Fisici, o Matematici, o Fisico-Matematici, o in qualunque modo giovevoli a queste scienze, e sempre applicabili ad utile general dell' Italia. Il Segretario li manderà stampati a ciascun Socio, pretermettendo quelli che uscissero dalle condizioni ora prescritte.

Ogni Socio spedirà al Segretario il proprio suffragio per la scelta dell'argomento, e dichiarerà insieme qual premio reputi conveniente e qual tempo alla facitura ed alla presentazione delle Memorie. Quel tema che avrà più suffragi, sarà adottato: nel caso di parità di voti, deciderà la sorte.

§. 2. Tosto si comunicherà alla Compagnia l'argomento coronato, ed il numero de' suffragi riscossi da ogni argomento. Nell' atto stesso sarà richiesto ciaschedun Socio attuale di nominarne tre (di qualunque Classe, purchè Italiani, e dimoranti attualmente in Italia); quelli cioè, che ciascuno, osservato il quesito, stimerà più adattati a giudicar le Memorie che compariranno al concorso. Quei tre, ne' quali concorrerà maggior numero di suffragi (l' uguaglianza rimovasi con la sorte), s' intenderanno destinati a pronunziare il giudizio.

§. 3. Nelle occasioni statuite sopra, saranno come non fatte le risposte de' Socj, qualora non giungano al Segretario dentro quaranta giorni dalla data della rispettiva Circolare di Lui.

§. 4 Il nome de' Giudici eletti rimarrà a sola notizia del Presidente e del Segretario: se non che ciascun di quelli sarà fatto consapevole della propria destinazione, con divieto di concorrere al programma e di manifestarla a chicchessia: niun di loro saprà i suoi Colleghi. Se qualcun ricusasse, sarà sostituito il prossimo inferiore in quantità di voti. Ogni Giudice riceverà, dopo pronunziato il giudizio, un decente compenso dell' esclusion dal concorso.

§. 5. Il Presidente, considerati i pareri de' Socj, lo stato economico della Società, e l' importanza di moltiplicare i programmi, stabilirà la grandezza del premio, ed il termine da assegnarsi al concorso. Sarà tosto promulgato il problema per tutta Italia. Ogni Italiano, anche Socio, potrà concorrere: rimangono esclusi li soli tre Giudici. Le Memorie dovranno essere inedite, scritte in lingua Italiana, e pervenute nelle mani del Segretario entro il termine prescritto dal programma: il nome degli Autori sarà occulto: ogni Memoria porterà in fronte un motto, e sarà accompagnata da un biglietto suggellato, contrassegnato al di fuori dal medesimo motto, e contenente, al di dentro in maniera occultissima, nome, cognome, patria, domicilio e profession dell' Autore. Il mancare a qualunque delle antecedenti condizioni fa perdere il premio.

§. 6. Tosto che il concorso sia chiuso, il Presidente, veduto il numero e l' estension delle Memorie, definirà il tempo, entro il quale ogni Giudice dovrà pronunziare il giudizio. Allora il Segretario trasmetterà le Memorie, tutte unite, ad uno de' Giudici: da cui restituite che siano, e notificato il proprio giudizio al Segretario, saranno da questo fatte pervenire ad altro Giudice; quindi con le regole stesse al terzo. Ogni Memoria coronata da un Giudice, sarà stampata col nome dell' Autore. Il premio sarà dato a quella Memoria, che venga coronata da tre, o da due Giudici. Se tutti e tre li giudizj fossero discordi, si dividerà il premio fra le tre Memorie coronate. Lo stesso si farà tra due coronate, qualora un Giudice neghi il premio a tutte le Memorie, e gli altri due non siano concordi. Che se fossero due li giudizj di negativa generale del premio, in tal caso il terzo giudizio non sarà di alcun valore: si notificherà alla Compagnia l'esito del giudizio e si passerà alla pubblicazione di nuovo programma, coi metodi stabiliti sopra.

§. 7. Ma quando sia conferito il premio, il Segretario annunzierà prontamente ai Socj ed a tutta l' Italia il nome degli Autori delle Memorie coronate, indicando quello cui spetta il premio. Esse Memorie saranno stampate senza indugio; se ne spedirà un esemplare ad ogni Socio, 12 della propria a ciascun degli Autori coronati, 38 di più al premiato: i rimanenti si esporranno a vendita pubblica.

CATALOGO

DE' MEMBRI COMPONENTI LA SOCIETA' ITALIANA DELLE SCIENZE

Presidente

CAGNOLI (Cav. Antonio) *Pensionario Giubilato* e Professore delle Matematiche sublimi nella Scuola Militare . *Modena*.

Socj Attuali

ALDINI (Cav. Giovanni) Professor di Fisica Sperimentale nell' Università . *Bologna* .

AMORETTI (Cav. Ab. Carlo) Bibliotecario nell' Ambrosiana . *Milano* .

ARALDI (Cav. Michele) Professore emerito di Medicina nel Liceo di Modena e Segretario dell'Istituto Nazionale. *Bologna*.

BONATI (Cav. Teodoro) Professore d' Idrostatica nel Liceo . *Ferrara* .

BONDIOLI (Cav. Pierantonio) Professore di Clinica medica nell' Università . *Padova* .

CALDANI (Floriano) Professore di Notomia nell' Università . *Padova* .

CALDANI (Leopoldo Marcantonio) Professore Emerito di Medicina teorica e pratica nell' Università . *Padova* .

CALUSO (ab. Tommaso Valperga) Professore di lingue orientali , di Critica , e di Cronologia nell' Università . *Torino* .

CANTERZANI (Cav. Sebastiano) Professore di Fisica generale nell' Università . *Bologna* .

CESARIS (Cav. ab. Angelo) Astronomo nell' Osservatorio di Brera . *Milano* .

CHIMINELLO (ab. Vincenzo) Professore d'Astronomia, di Meteorologia e di Geografia nell' Università. *Padova*.

COSSALI (P. D. Pietro) Cherico Regolare, Professore di Matematica sublime nella R. Università. *Padova*.

DELANGES (Paolo) Ispettore generale onorario alle acque e strade. *Orzinovi*.

FABBRONI (Giovanni) Professore Onorario nelle Università di Pisa e di Wilna, Direttore e soprantendente all' Amministrazione del R. Gabinetto Fisico. *Firenze*.

FERRONI (Pietro) Matematico Regio e Professore di Matematica nell' Università di Pisa. *Firenze*.

FOSSOMBRONI (Cav. Vittorio) Consigliere di Stato, e di Finanze. *Firenze*.

GIOBERT (Giannantonio) Professore d' Economia rurale, d'Arti, e Manifatture nell' Università. *Torino*.

GIOVENE (Giuseppe Maria) Canonico Arciprete. *Molfetta*.

MAIRONI DAPONTE (Giovanni) Professore di Storia Naturale nel Liceo. *Bergamo*.

MALACARNE (Vincenzo) *Pensionario giubilato* e Professore primario d' Istituzioni chirurgiche e di ostetricia nell' Università. *Padova*.

MALFATTI (Gianfrancesco) *Pensionario anziano* e Professore emerito nel Liceo. *Ferrara*.

MASCAGNI (Paolo) Professore di Notomia nel Regio Arcispedale. *Firenze*.

MOSCATI (Pietro) *Pensionario anziano*, Direttor generale della pubblica Istruzione nel Regno d' Italia e Gran Dignitario dell' Ordine della Corona di ferro. *Milano*.

PAOLI (Pietro) Professore delle Matematiche sublimi nell' Università. *Pisa*.

PESSUTI (Gioachino) Professore delle Matematiche sublimi nell' Archiginnasio della Sapienza. *Roma*.

PEZZI (Francesco) Colonnello nel Corpo Imperiale del Genio Francese e Sottodirettor delle Fortificazioni. *Genova*.

PIAZZI (P. D. Giuseppe) Cherico Regolare, Professore di Astronomia nell' Accademia degli Studj e Direttore dell' Osservatorio. *Palermo*.

PINI (Cav. Ermenegildo) Cherico Regolare di S. Paolo, Professore di Storia Naturale, Delegato alle Miniere, Ispettor Generale della pubblica Istruzione. *Milano*.

RACAGNI (P. D. Giuseppe Maria) Cherico Regolare di S. Paolo, Professore di Fisica nel Ginnasio di Brera. *Milano*.

RE (Cav. Filippo) Professore d' Agricoltura nell' Università. *Bologna*.

RUFFINI (Paolo) Professore di Matematica sublime nel Liceo e nella Scuola Militare. *Modena*.

SALADINI (ab. Girolamo) Professore emerito nell' Università. *Bologna*.

SLOP (Giuseppe de Cademberg) Professore d' Astronomia nell' Università. *Pisa*.

TARGIONI-TOZZETTI (Ottaviano) Professore d' Agricoltura e di Botanica. *Firenze*.

VASSALLI EANDI (Anton Maria) Professore di Fisica nell' Università, e Segretario dell' Accademia di Scienze, di Letteratura, e di Belle Arti. *Torino*.

VENTUROLI (Giuseppe) Professore di Matematica applicata nell' Università. *Bologna*.

ZEVIANI (Gianverardo) *Pensionario anziano* e Protomedico di Sanità. *Verona*.

Divisione de' Socj attuali in due Classi e indicazione de' Tomi in cui hanno Memorie.

Classe Matematica.

Bonati	2. 5. 8. 8. 11.
Cagnoli	3. 4. 4. 5. 5. 5. 6. 6. 6. 7. 7. 8. 8. 8. 9. 10. 11.
Caluso	9. 12.
Canterzani	2. 5. 8. 11.
Cesaris	2.
Chiminello	7. 8. 8. 9. 9. 10. 10. 11. 11. 11. 12. 12. 12.
Cossali	9. 10.
Delanges	3. 4. 5. 5. 8. 10. 12. 12.
Ferroni	5. 7. 9. 10. 10. 11. 12.
Fossombroni	3. 7. 9. 12.
Malfatti	1. 2. 3. 4. 4. 7. 8. 10. 10. 11. 12. 12.
Paoli	2. 4. 4. 6. 6. 8. 9. 9. 10.
Pessuti	11.
Pezzi	4. 5. 6. 8. 11. 11.
Piazzi	11. 12. 12.
Racagni	10.
Ruffini	9. 9. 10. 12. 12.
Saladini	9. 10. 11. 12.
Slop	2. 3. 6. 8. 10. 12. 12.
Venturoli	12.

Clas-

Classe Fisica.

Aldini	. . . . .
Amoretti	8. 10. 12.
Araldi	10. 11. 12.
Bondioli	9. 12.
Caldani *Floriano*	7. 8. 12.
Caldani *Leopoldo*	4. 7. 8. 9. 10. 12. 12.
Fabbroni	10. 11. 12.
Giobert	10.
Giovene	8. 9. 10. 11. 12.
Maironi Daponte	4. 9. 9. 11.
Malacarne	1. 2. 3. 3. 4. 4. 5. 6. 7. 8. 8. 9. 9. 10. 11. 12. 12.
Mascagni	8. 11.
Moscati	1. 5. 10.
Pini	3. 5. 6. 6. 9. 10. 12.
Re	12.
Targioni Tozzetti	11.
Vassalli Eandi	4. 8. 10. 10.
Zeviani	1. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 10. 11. 12.

Socj Emeriti.

BRUGNATELLI (Luigi) Professore di Chimica . *Pavia* .

FONTANA (P. D. Mariano) Cherico Regolare di S. Paolo, Professore emerito dell' Università di Pavia . *Milano* .

LAGRANGE (Lodovico) *Parigi* .

ORIANI (Cav. ab. Barnaba) Astronomo nell' Osservatorio di Brera . *Milano* .

POLI (Giuseppe Saverio) Direttore del R. Museo di Storia naturale . *Napoli* .

ROSA (Michele) Professore emerito nel Liceo di Modena . *Rimini* .

SALUZZO (Giuseppe Angelo) *Torino* .

SCARPA (Cav. Antonio) Professore nell' Università . *Pavia*.

STRATICO (Cav. Simone) Ispettor generale d' Acque e Strade . *Milano* .

VENTURI (Cav. Giambattista) Incaricato d' Affari pel Regno d' Italia presso la Repubblica Elvetica . *Berna* .

VOLTA (Cav. Alessandro) Professore nell' Università . *Pavia* .

Socj Onorarj .

DELBENE (Benedetto) Segretario perpetuo dell' Accademia di Agricoltura , Commercio ed Arti . *Verona* .

LANDI (Ferdinando) . *Piacenza* .

PINDEMONTE (Ippolito) . *Venezia* .

POZZETTI (P. D. Pompilio) Cherico regolare delle Scuole Pie, Bibliotecario regio in Bologna , e Professore Onorario nell' Università di Wilna . *Bologna* .

ROSSI (Luigi) Segretario Generale nel Dipartimento della publica Istruzione . *Milano* .

VIVORIO (ab. Agostino) Regio Ispettore ai publici lavori , alle acque , alle strade , ed ai ponti . *Vicenza* .

Socj Stranieri.

ACHARD . *Berlino* .
BANCKS . *Londra* .
CHAPTAL . *Parigi* .
DELAMBRE . *Parigi* .
HERSCHEL . *Londra* .
HAUY. *Parigi* .
LALANDE . *Parigi* .
LAPLACE . *Parigi* .
MASKELINE . *Londra*.
NARVOYZ . *Wilna* .
SENEBIER . *Ginevra* .
ZACH . *Gota* .

Segretario .

. . . .

Vice Segretario Amministratore .

ANTONIO LOMBARDI , Bibliotecario publico ed Ingegnere . *Modena* .

AN-

ANNALI

DELLA SOCIETA' ITALIANA DELLE SCIENZE

Dal Dicembre MDCCCV al Gennajo MDCCCVII

Continuati dal Segretario della medesima

P. D. Pompilio Pozzetti.

112. Nel catalogo de' Membri componenti la Società italiana delle Scienze posto sul principio del duodecimo tomo di essa pubblicato il sedici novembre mille ottocento cinque, osservasi il Socio Giannantonio Marini caduto dalla schiera degli *Attuali* in quella degli *Emeriti*. Pensò quindi lo zelantissimo nostro Presidente Sig. Cav. Antonio Cagnoli a riempiere il vacuo, rimaso per ciò nel novero dei Quaranta, col mettere alla scelta dei Colleghi alquanti nomi, giusta le regole prescritte dagli articoli VIII e IX dello Statuto. Scorsi i due mesi consueti prefissi alla nomina, fu manifesto che la pluralità de' voti Sociali erasi dichiarata in favor dell' egregio Sig. Cav. FILIPPO RE nativo di Reggio in Lombardia, Rettore in quel tempo della Reale Università di Bologna, e quivi Professore d' Agraria. Ed a Lui venne tosto spedito il correlativo diploma.

113. Ma la Società ebbe ragion d' attristarsi, allorquando seppe che l' anzidetto Dottor Marini era da questa all' altra vita passato nell' undecimo giorno dell' anno corrente in Savigliano. Nato Egli il quattro febbrajo del mille settecento ventisei nel Commune di Villafranca in Piemonte, spese i proprj giorni nell' esercizio della Clinica e di varj onorevoli impieghi confacenti alla sua professione, in cui ebbe grido assaissimo. Compose molte Opere spettanti alla Notomia, alla Medicina ed alla Storia naturale; parecchie delle quali vider la luce, altre restano inedite. Memorie di Lui leggonsi ne' tomi III, IV e IX della nostra Compagnia.

114.

114. Indi a sei dì, cioè, nel diciassettesimo del suddetto gennajo accadde in Pavia la compianta morte del Socio *emerito* P. D. Francesco Soave C. R. Somasco. Lugano gli diede i natali, correndo il decimo giorno di giugno del mille settecento quaranta tre. Fu scrittore indefesso e moltiplice: le sue traduzioni dal greco, dal latino, dal tedesco e dall' inglese, i libri singolarmente in ogni maniera di gentili e di severe facoltà che Ei divolgò per uso delle pubbliche scuole, costituiscono il certo, e legittimo patrimonio della sua fama. Somministrò all'ottavo tomo di questa Società la descrizione di una *nuova macchina per dividere una data retta in qualunque numero di parti eguali*.

115. Riconoscentissimi all'affezione di quegli illustri Corpi scientifici e letterarj, e di que' dotti Uomini, cui è piaciuto, nel corso dello spirante anno accademico, trasmetterne in grazioso donativo le produzioni loro, godiam registrarne quì, sotto un numero solo, i titoli insieme co' nomi de' ragguardevoli Autori.

Mémoires de l'Institut National des Sciences et Arts. Tome Quatrieme an. XI, *et Tome Cinquieme an.* XII. *Paris.*

Istruzione sui vantaggi e sul metodo d' innestare il vajuolo vaccino, pubblicata da Luigi Sacco *Dottore in Medicina e Direttore della vaccinazione.*

Memoria sul vaccino, unico mezzo per estirpare radicalmente il vajuolo umano: dello stesso.

Della Natura delle febbri e del miglior metodo di curarle ec. *del Dot.* Giuseppe Giannini *Medico nello Spedale maggiore di Milano.*

Mémoires de l'Académie des Sciences et Beaux arts de Turin pour les années x *et* XI. *Sciences physiques et Mathématiques I. Partie: Turin An.* XII.

Mémoires de l'Academie Impériale des Sciences, Litérature, et Beaux Arts de Turin pur les années XII *et* XIII. *Sciences physiques et mathematiques. Turin.* 1805.

Mémoires de l'Academie des Sciences etc. de Turin pour les années x *et* XI. *Literature et Beaux Arts. Turin.* 1805.

Mémoires de l'Academie Imperiale etc. de Turin pour les années XII *et* XIII. *Literature et Beaux Arts. Turin* 1805.

Memorie dell' Istituto Nazionale Italiano. Classe di Fisica e Matematica. Tom. I. Parte I. Bologna 1806.

116. Anche i valorosi Estensori del *Giornal* Padovano *dell' Italiana Letteratura*, sì del nuovo *Giornale* Pisano *de' Letterati*, sì delle redivive *Efemeridi Letterarie* di Roma, non meno che il Compilatore *degli Opuscoli scelti sulle Scienze e sulle Arti*, hanno, quando coll'encomiare, quando coll' epilogare ed anche riferir per intero ne' fogli loro periodici dissertazioni inserite nei recenti *Atti* nostri, obbligata altamente la gratitudine della Compagnia.

117. Nel giorno ventesimo quinto di luglio dell' anno presente, giunse nelle mie mani uno Scritto sul problema di Fisica proposto, fin dal primo luglio mille ottocento cinque, agli Scienziati nazionali dall' Istituto di che parlo, risguardante la famosa quistione intorno al *galvanismo*, il quale Scritto è contrassegnato dal motto che segue

Fert animus caussas tantarum expromere rerum
Imensumque (così) *aggedior* (così) *opus* . . . .
Lucan. Pharsal.

Col primo giorno del prossimo venturo gennajo matura il termine, dopo cui riman chiuso tal concorso.

118. Intenta la Società, non solo a promuovere l' avanzamento delle ottime Discipline, mercè i lavori che indefessa produce, ma eziandio a coadjuvare gli altrui studj e ricerche, mediante la communicazion volonterosa de' proprj lumi, ha secondato con tutto l' animo le brame del Sig. Giovanni Bargnoni Fanese, che avevale, col mezzo mio, richiesto il giudizio d' un Opuscolo *sopra un Parto mostruoso*, da Lui pocanzi mandato a stampa in Fossombrone. Deliberò adunque il Signor Presidente Cav. Cagnoli, nel dì 29 agosto p. p., che due Socj prendessero ad esaminar quel libretto, ed a risponder pure a tutte, ovvero a parte delle cinque domande ivi contenute, secondocchè le riputassero degne di attenzione, ed utili ai progressi della fisica dell' uman corpo. Uno di Essi pertanto, in data de' quattordici settembre susseguente, replicò nel modo appresso.

„ Dividerò , *comincia*, il mio parere sull' Opuscolo del Sig. Bargnoni in due parti, relative , la prima, all' Opuscolo e alle Figure , l' altra, alle questioni .

Parte I. Dell' Opuscolo , e della Tavola annessa .

„ Con l' ajuto del rame che vi è unito, l' Opuscolo è chiaro abbastanza per servir di foriere al Trattato che il Sig. Bargnoni pensa di pubblicare , e di guida a chi è invitato a sciogliere i quesiti . Osserveremo soltanto alcuni errori di stampa che generano oscurità, e possono far prendere equivoci : per esempio

A pag. 1. dice che *era già* spenta l' esistenza de' due Feti : forse doveva stamparsi , *spenta la vita*, perchè il *Feto mostruoso* è probabile che *esista* tuttavia .

A pag. 3. *Nel mostruosissimo Capo troverete mancante la comunicazione colla midolla oblongata , giacchè non vi erano le vertebre del collo .* Dovea stamparsi , *colla midolla spinale*, se si volea dire che il cervello non era continuo con quella produzion cerebrale , che è contenuta ordinariamente nelle vertebre . Soggiungo di più , darsi talvolta la mancanza delle vertebre cervicali , e il capo esser connesso così bene colle dorsali (come ho sotto gli occhi in due Feti *aencefali*) che la sostanza cerebrale si continui giù per lo canale della spina secondo il consueto .

Ivi è stampato *Winsloce* invece di *Winslow*; e posto che vi è pur citato *Fortunio Liceto* , sarà bene che il Sig. Bargnoni ne osservi nell' edizione Olandese di *Gerardo Blasio* l' appendice, e vi troverà la figura e la notomia di un Feto ben più mostruoso per difetto che non è il suo, il quale è pur singolare .

A pag. 6, manca pure qualche cosa nella stampa alla Fig. II ove descrive *il semplice lobo del cervello racchiuso nella Teca ossea priva delle ossa parietali col sol osso occipitale durissimo , e senza corrispondenza di sorte per mancanza del Foro ovale* , imperocchè non è facil capire qual *corrispondenza* manchi alla Teca ossea per mancanza del *Foro ovale* , se pur qui non dovea stamparsi *Foro occipitale* .

Ivi , nella spiegazione della Fig. III. *Fluido denominato Pericarpio* . Altro errore di stampa . Forse vi si dovea dire *acqua del Pe-*

Pericardio, non essendovi fluido del corpo umano che dicasi *Pericarpio*.

A pag. 7, Fig. IV *dd. Diaframma*. Nella tavola si osservano il ventricolo, e la milza (*a b c*) collocati al di sopra di quella sostanza così carica di vasi, e così incavata al davanti che non dà veruna idea di *Diaframma* umano. Sarebbe mai anche mostruoso tale sfiguramento e tale situazione dei visceri suddetti e del *Diaframma*?

Ivi *h. Orifizio dell' utero delineato più lungo*, e male, perchè pare piuttosto un bocchino di trombetta che l' orifizio dell' utero d' un Feto ottimestre che non si sarà presentato così.

Indicati ingenuamente i difetti che ci sembran dovuti allo stampatore, troppo frettoloso, dell' Opuscolo, passiamo alla

Parte II. Questioni.

I. *Se il mostro in questione abbia menata nell' utero materno una vita animale, o vegetabile?*

Risp. Si sviluppò, crebbe, avea moltissimi organi e membri, viziosi sì, difettosi e mostruosi, tuttavia distinti, dotati di vasi, nervi ec. quindi è certo che menò una vita vegetabile e animale.

II. *Se con la mancanza del cuore, polmoni, di porzione del cervello, di tutto il cerebello, glandola pineale ec. sia stato o nò animato?*

Risp. Oltre all'ora detto, la Patologìa insegna pur troppo frequentemente che notabili porzioni del cervello, che tutto il cervelletto, gran parte della midolla allungata nel cranio, e tratti notabili della spinale nelle vertebre, si trovarono suppurati, liquefatti, distrutti affatto, ed in ispecie la glandula pineale, eppur quegli individui avean vissuto così giorni, settimane, e mesi, finchè la morte diede luogo a scoprirvi così gravi disordini. Negli idrocefali interni poi, dove libbre, anzi rubbi di linfa distesero enormemente, assottigliarono, distrussero in grandissima parte e cervello e glandola pineale e cervelletto e midolla all ungata:

ciò non ostante alcuni di tali individui la durarono così, dalla più tenera infanzia a nove mesi, a due anni, a cinque, a sette, e fino a diciassett' anni, come in pratica osservò e descrisse il Professor Malacarne nel suo Trattato delle Osservazioni in Chirurgia. Torino 1784. Tomo secondo.

III. *Se con tali difetti organici e privazioni di tanti organi necessarj alla vita, poteva, ed in qual guisa, condurre vita animale ragionevole, a preferenza di una vita più verisimilmente vegetativa?*

Risp. Nell' utero è cosa certa che il Mostro del Sig. Bargnoni visse parasiticamente una vita vegetativa insieme e animale. Se sapessimo come stava di fauci e d'esofago (di cui leggeremo quanto ne scriverà nel Trattato) potremmo conghietturar qualche cosa di più; persuasi niun Fisico poter pronunciare negativamente sulla possibilità di condurre vita animale ragionevole un individuo umano capace di nutrirsi, ancorchè privo di molti organi necessarj alla perfezione dell' una e dell' altra delle vite suddette. Il nostro però, a cui sembra che mancassero occhi, orecchie, narici esterne, e il solito organismo della bocca, e molti visceri, e quasi tutto un braccio, e molte parti dell'altra mano, supposto che avesse potuto nutrirsi e crescere, sarebbe stato privo di molte idee, e alcune imperfette assai ne avrebbe avuto, ma sarebbe stato incapace di ragionare come uomo perfetto, benchè non oserei negargli un ragionare alla sua maniera ... È nato morto. Egli è inutile cercar cosa sarebbe stato del di lui morale se avesse vissuto. Certo egli è che con cadauno de' suddetti difetti, anzi con diversi a un tratto, vidimo alcuni individui a vivere ed a ragionare.

IV. *Se nelle storie mediche della più remota antichità e nelle recenziori si rinvenga un Mostro che lo assomigli più d' appresso nella forma esterna, e nella fabbrica viscerale interna, e quali siano gli Autori che ne trattano precisamente?*

Risp. Nella forma del viso e specialmente della bocca, io non conosco Autore che abbia dipinto o descritto Mostro che sia somigliante a questo. In riguardo poi agli altri difetti esterni e mancanze di visceri, potrebbero valere per tutti gli altri *Antonio Everardo* Olandese, e *Giovanni Giacinto Vogli* Bolognese. Del primo è la *monstrosi Foetus Historia admiranda* scritta del 1663 con due tavole in rame, e pubblicata da *Gerardo Blasio* nell'appendice al Trattato *de Monstris* in 4.° di *Fortunio Liceto*, Edizione di Olanda, a pag. 300 e seguenti. Storia che fu anche recata in francese nella traduzione del *Liceto* e del *Blasio* pubblicata in 4.° da *Giovanni Palfino*. L'altro nella *Fluidi nervosi historia, Bononiae* 1720, in 8.°, a pagg. 38 e 39, ha la breve e chiara descrizione d'una Bambinella nata lo stesso anno in Bologna, non solo mancante di quanto notò il Sig. Bargnoni, ma dell'intero capo, del diaframma, di tutto il fegato, della milza, del petto, del collo, e d'amendue le braccia. Vi son pure le *Lezioni accademiche de' Mostri umani* ec. del Prof. Malacarne anzidetto impresse nel tomo IX della Società Italiana delle Scienze; e le *Osservazioni anatomiche del Medesimo*, inserite nel XII, *in conferma d'una proposizione circa all'origine de' Mostri pubblicata* dallo stesso Sig. Malacarne *nel tomo IX* ec. Si accosta eziandio per molti riguardi al Mostro descritto dal Sig. Bargnoni quello di cui si parla nelle *Osservazioni sopra una Donna che tenne in corpo un Feto tubale per il corso di undici anni, di Giuseppe Sonsis Cittadino Cremonese con figure al naturale in rame. La sezione del cadavere fu fatta nella sera de'* 14 *Giugno* 1797. *Cremona per Giuseppe Feraboli* 1797 *in* 4.°.

V. *Se meriti che se ne tramandi colle stampe la memoria alla posterità* ec.?

Risp. Sempre utili riescono a' Naturalisti le descrizioni e le figure di simili fenomeni stravaganti che eccitano i Filosofi a riflessioni capaci di recar tosto o tardi luce vantaggiosissima alla fisica del corpo umano, allorchè sono esposte pulitamente e dirette da buon criterio, come, laudevolissimo per la sua modestia singolare, sembra promettere il diligente Sig. Bargnoni „.

L'altro Collega non ha trasmesso ancora il suo parere.

119. Dovendomi io ora discostar dalla sede in Modena della Società (cui fia sempre glorioso per me aver prestato, qual po-

potei meglio, più che quinquennale servigio) affine di trasferirmi a Bologna dove attendere al governo della Biblioteca di quella Reale Università, conformemente alle venerate Disposizioni di S. A. I. il Principe Vicerè partecipatemi con umanissima Lettera, sotto il ventisette settembre scaduto, dall' egregio nostro Collega Sig. Consigliere di Stato Consultore Moscati Direttore Generale della pubblica Istruzione nel Regno d' Italia: il nostro Preside ha decretato che per ora l' attual Vicesegretario Amministratore, Sig. Antonio Lombardi Bibliotecario pubblico in Modena, eserciti provvisionalmente le funzioni di Segretario, eccettuata quella della revisione della stampa de' nostri tomi che si affiderà di volta in volta alle Persone che dall' esperimento risulteranno più abili a soddisfarvi.

---

120. Dopo la partenza da Modena del chiar. P. Pozzetti fu benemerito Segretario di questa Società tre altre Memorie pervennero: l'una il dì 27 Dicembre 1806 con la sentenza distintiva *Non plures admittendae sunt caussae, quam quae verae sunt, & phaenomenis explicandis sufficiunt*, Newton: l'altra il dì 30 del mese stesso, col motto

,, Quì dunque intenso argomentar mi giovi
,, Sì ch' io dimostri . . . . .
Alf. Sat. VII.

ambe relative al problema di Fisica, indicato sopra al N.° 117; la terza nel giorno 31 Dicembre 1806 con l' epigrafe *A phaenomenis motuum investigemus vires naturae; deinde ab his viribus demonstremus phaenomena reliqua*. Newton Praef ad Princ. Phil. Natur., la quale riguarda il problema di Matematica esposto al concorso insieme con quello di Fisica mediante il programma medesimo del dì primoLuglio 1805.

121. Sono dunque tre i concorrenti al premio di Fisica, ed uno a quello di Matematica. Le loro memorie sono state poste in cammino immediatamente. per passar sotto l'esame successivo de' Giudici. Tosto che abbia ciascuno d' Essi appartatamente e sen-

za conoscere i propri Colleghi pronunziato il proprio giudizio, sarà reso publico il risultamento de' loro voti.

122. Riputando il Presidente convenientissima cosa, che tutte le produzioni della Società stessero unite in potere di Lei sola, ha fatto acquisto dall' Accademia di Agricoltura Commercio ed Arti di Verona de' Tomi, Rami, e Legni, che possedeva in virtù del Testamento del Cav. Lorgna fondatore della Società, il qual Testamento si legge al N.° 7 di questi Annali.

123. Come poi l'art. XXIII dello Statuto portava che l' esame dell' epistolario della Società; per distinguere i Socj, cui spettasse la compensazione statuita per la spesa ne' porti di lettere, si facesse nel mese d' Ottobre, il quale era il primo dell' anno Francese, che allor vigeva quando nacque il suddetto articolo XXIII, così al presente che l' anno Gregoriano è stato ristabilito, era forza cambiare l' Ottobre nel Gennajo, e ciò appunto si vede nell' odierna ristampa dello Statuto. L' esame pertanto eseguito entro il mese, ultimo nominato, determinò la retribuzione a favore de' Socj Signori Cav. ab. Carlo Amoretti, Cav. Pierantonio Bondioli, Floriano e Leopoldo Caldani, Tommaso Valperga Caluso, Sebastiano Canterzani, Cav. ab. Angelo Cesaris, Vincenzo ab. Chiminello, Paolo Delanges, Giovanni Fabbroni, Pietro Ferroni, Vittorio Fossombroni, Giannantonio Giobert, Giuseppe Maria Giovene, Giovanni Maironi Daponte, Vincenzo Malacarne, Gianfrancesco Malfatti, Pietro Paoli, Gioacchino Pessuti, P. Giuseppe Maria Racagni, Giuseppe Slop, Antonmaria Vassalli Eandi, Giuseppe Venturoli, Gianverardo Zeviani.

MEMORIE DI MATEMATICA

DELLA MISURA DELL' ANNO TROPICO SOLARE

MEMORIA

Del P. D. Giuseppe Piazzi

Ricevuta il dì 7 Novembre 1805.

Dopo le laboriose ricerche del Sig. De-la Lande per determinare la quantità dell'anno tropico Solare, meritamente coronate dall' Accademia di Coppenaghen, inutile per avventura potrebbe sembrare ogni ulteriore indagine su questo argomento, se un mezzo secolo e più, per cui dal di lui travaglio siamo noi lontani, non ci offrisse dei nuovi non spregevoli vantaggi. Infatti possiamo presentemente, e forse meglio, giudicare delle osservazioni degli antichi, e valerci insieme delle prime che furono fatte dopo l'invenzione dei telescopj, delle quali non poteva molto giovarsi l' Astronomo di Parigi. Per la qual cosa mi è caduto nell'animo di richiamare ad esame la misura dell' anno da essolui stabilita, comparando i miei equinozj cogli antichi e co' moderni. Al qual uopo quei d' Ipparco e Waltero tra i primi, e quei di Flamstedio tra i secondi, per quanto io possa giudicarne, debbonsi riputare i migliori. Se le osservazioni de' Chinesi fossero libere da ogni sospetto di soperchieria, sarebbero, non v' ha dubbio, di un peso grandissimo, e dovrebbero vincerla sulle altre tutte; ma non siamo noi pienamente sicuri, che non siano esse merce Europea, adattata alle rimotissime epoche di quella nazione tanto vana della sua antichità. Mi ristringerò dunque ad investigare i risultati che si hanno da Ipparco da Waltero e da Flamstedio, e dentro quali limiti possa cadere l' incertezza di ciascuno di essi. Nel che, se non vo molto lontano dal vero, si renderà abbastanza chiaro, che un secolo d' intervallo tra i moderni è ben da preferirsi a venti e più secoli rispetto agli antichi.

§. 1

Sebbene dal 1791 al 1805 quasi in ogn' anno dalle mie osservazioni ne abbia conchiusi gli equinozj; quì nondimeno non riporterò che i soli degli anni 1804 e 1805, come i migliori all' intento, e de' quali unicamente penso giovarmi nella presente ricerca. Le osservazioni verranno inserite nella continuazione della Storia della Specola, di cui spero in breve publicarne il sesto libro.

Equinozj osservati in Palermo negli anni 1804 e 1805.

1804	Marzo . . . 20 ... a	8^{h} 6′ 54″	t. m.	Equazioni	+ 1° 53′ 49″, 1
	Settembre 22 . . .	19 35 54		del centro,	— 1 53 59, 6
1805	Marzo . . . 20 . . .	13 57 18		e Pertur-	+ 1 53 55, 7
	Settembre 23 . . .	1 21 58		bazioni	— 1 54 0, 0

§. 2

Equinozj d' Ipparco.

Nello spazio di anni 34, cioè dall'anno 161 al 127 A. C. sei equinozj autunnali e tre di primavera osservati furono da Ipparco in Alessandria. Da questi tutti presi insieme, il Sig. de la Lande ne ha conchiuso la grandezza dell' anno di 365^{g} 5^{h} 48′ 48″, e di 49″ il Cassini. Lo stesso prossimamente ho trovato io ancora. Ma se in vece di raccogliere insieme quei di Marzo e quei di Settembre, si considerino separatamente, si scorgerà che quei di Marzo sono costantemente maggiori di quei di Settembre. Secondo il Cassini nella sua Astronomia pag. 217 il medio dei tre di Marzo è 49' 12", 3, ed il medio di quei di Settembre 48' 37", 6. Egli è vero che la correzione, o la riduzione di anno apparente in medio impiegata dal Cassini non è molto esatta, ma ciò non porta che la diminuzione di 2" negli Equinozj di Marzo ed un aumento di 5" negli altri di Settembre. La qual cosa riduce la differenza tra i due risultati, che secondo il Cassini sarebbe di 35", a 28" solamente. Ora 28" di differenza chiaramente provano che gli equinozj di Primavera rispetto agli altri di Autunno, l'un per l'altro, osservavansi da Ipparco quindeci ore circa prima del passaggio del Sole per l' Equatore: lo che dimostra che le armille di cui Egli servivasi non erano disposte nel piano di questo cerchio. Mi par dunque chiaro che i nove risultati che si hanno dagli equinozj d'Ipparco non si possono raccogliere in unica somma, e prenderne il medio; ma debbonsi accoppiare i tre di Marzo con altrettanti di Settembre, o quando pur si voglia tener conto di tutti li sei di Settembre, accoppiare il loro medio col medio di Marzo; nel qual modo dai calcoli del Cassini risulterebbe la grandezza dell' anno di $365^{g}\ 5^{h}\ 48'\ 65''$. Ma non volendo trarre altre conseguenze dagli Equinozj d' Ipparco se non quelle che naturalmente ne vengono, di quei di Settembre propriamente non se ne possono impiegare che tre, ed i più vicini agli altri di Marzo. E ciò tanto più che non essendo tra loro di accordo nè i primi nè i secondi, si può ragionevolmente congetturare, che l' angolo che facevano le armille con l' Equatore nell' intervallo delle osservazioni abbia sofferto dei cambiamenti ed alterazioni. Mosso da queste ragioni io ho preso gli equinozj degli anni 146-45-42 34 e 27, e valendomi delle riduzioni al meridiano di Parigi riportate da la Lande nel tomo secondo della sua Astronomia pag. 123 ne ho ottenuti i seguenti risultati.

	Marzo		Settembre
145 A.C. …	$365^g\,5^h\,49'\,0''$	146 A.C. …	$365^g\,5^h\,48'\,49''$
134 …	49 10	145 …	48 49
127 …	49 7	142 …	48 59
Anno apparente …	365 49 5,66		365 5 48 52,33
Pel movimento dell'Apogeo	+1,74		−2,83
Per la diff. della precessione tra il secolo d'Ipparco ed il nostro	+2,80		+2,80
	365 5 49 10,1		365 5 48 52,3

Vi sono quindi almeno 3″ d' incertezza su ciascuno dei medj, li quali debbonsi rifondere e nella difficoltà di osservare con precisione il momento, in cui l' ombra della parte superiore delle armille cadeva sul mezzo della parte inferiore, e in qualche sconcerto nella posizione primitiva delle armille medesime, avvenuto nell' intervallo di 19 anni, quanti ne scorsero dalla prima all' ultima delle osservazioni, che si sono prese in considerazione. Queste sole sorgenti di errore sembra che Ipparco si fosse posto innanzi agli occhi, quando, al riferire di Tolomeo, pronunciò, che le sue osservazioni si potevano riguardare come sicure dentro i limiti di sei ore circa. E veramente considerate queste sole cause, poco di più può stimarsi l' errore di ciascuna separatamente, e non più di 3″ quello dei due medj rispetto alle componenti. Ma noi abbiamo veduto che le armille non avevano la giusta inclinazione coll' orizzonte, nè forse erano bene orientate, d' onde procede la differenza di 18″ tra li due medj, della qual cosa non sembra che nè tampoco dubitasse Ipparco. Un altro errore possiamo giustamente temere nelle armille medesime, e si è, che i loro bordi non fossero in uno stesso piano, nè perfettamente circolari: il qual errore non possiamo nè stimare nè scoprire nè in conseguenza correggere. Per le quali cose niente di preciso a parer mio si può conchiudere dagli equinozj d' Ipparco; e possiamo ben dire, che sebbene da lui a noi siano ormai trascorsi circa due mila anni, nientedimeno sì grande intervallo non è bastante ancora a togliere tutti gli errori cagionati e dalla difficoltà delle osservazioni, e dall' imperfezione degli stromenti, e finalmente dall' inesatta disposizione dei medesimi.

§. 3.

Equinozj di Regiomontano e Waltero.

Tra i molti passaggi del Sole al Meridiano, che pel corso di anni 30 collo stromento detto Regola di Tolomeo osservarono a Norimberga Regiomontano e Waltero, quattro, due di Marzo e due di Settembre, cadono negli stessi giorni dell' Equinozio, e si succedono senza interruzione. Questi, io credo, che debbano preferirsi agli altri, anzichè nella presente ricerca di essi soli si possa tener conto. Cassini ne ha conchiuso i momenti degli Equinozj; io però ho amato meglio dedurli dalle longitudini, che ne ha ricavato la Caille, ridotte prima al meridiano di Palermo, e sono come siegue

1476 li 13 Settemb.	vecchio stile	a 8^{h} 7′ 25″	Equazione del Centro e Perturbazioni	— 1° 56′ 29″ 0
1477 li 11 Marzo		2 42 40		+ 1 55 56 ,6
1478 li 11 Marzo		9 51 37		+ 1 55 54 ,3
1478 li 13 Settemb.		21 37 42		— 1 56 34 ,8

Comparando questi equinozj coi miei del 1804 si hanno i seguenti risultati.

		Anno apparente	Riduzione in medio	Anno medio	
Settemb	1476	365^{g} 5^{h} 48′ 55″,7	+ 11,1	365^{g} 5^{h} 49′ 6″,8	48′ 58″,3
	1478	38 ,1	+ 11,6	48 49 ,7	
Marzo . .	1477	53 ,1	— 9,4	48 43 ,7	48 37 ,7
	1478	41 ,2	— 9,5	48 31 ,7	
				Medio . . .	365^{g} 5^{h} 48′ 48″

La grandezza dell' anno che risulta da questi equinozj è perfettamente di accordo colla stabilita dal Sig. de la Lande, e sarebbe molto da valutarsi, se accoppiando Settembre e Marzo 76 e 77, e Marzo e Settembre 78, i medj non ci presentassero una differenza di ben 14″,5.

§. 4.

§. 4.

Equinozj osservati a Greenwich da Flamstedio.

Le osservazioni di Flamstedio dal 1690 al 1720, tentate con un quadrante murale della migliore costruzione che si potesse ottenere in que' tempi, ci presenta un copioso numero di Equinozj, dei quali possiamo giovarci con vantaggio. Al presente oggetto però credo bastevoli i soli degli anni 1691-92-93-94, e per essere l' intervallo che li separa da noi non meno di 110 anni, e sì ancora perchè sono i meglio osservati. Nel passaggio del Sole al Meridiano solea Flamstedio prendere non meno di sette distanze dal vertice. 1. Dei bordi superiore ed inferiore all' ingresso nel telescopio. 2.° Di uno dei due bordi. 3.° Del centro due volte. 4.° Dei bordi nuovamente all' uscire dal telescopio. Il medio di queste replicate distanze sembra che debba ispirare non poca fiducia di una sufficiente precisione. Per maggior sicurezza però, quando alcuna di esse troppo si allontanava dal medio di tutte le altre, si è da me trascurata. Per tal maniera trattando le osservazioni dei 9 e 11 Marzo v. st. 11 e 13 Settembre 1691; 9 Marzo e 11 Settembre 1692; 8 e 9 Marzo 11 e 13 Settembre 1693; 8 e 10 Marzo e 8 Settembre 1694 ne ho conchiusi i seguenti momenti degli Equinozj, riducendoli a Palermo, e dal vecchio al nuovo stile.

1691	Marzo . . .	19 a	23h	2′	57″	t. m.	Equazione del Centro e Perturbazioni.	+ 1° 54′ 27″,9
	Settembre	22	10	44	4			− 1 54 32 ,5
1692	Marzo . . .	19	4	33	50			+ 1 54 30 ,7
	Settembre	21	16	46	26			− 1 54 31 ,4
1693	Marzo . . .	19	10	26	43			+ 1 54 43 ,6
	Settembre	21	22	32	2			− 1 54 43 ,2
1694	Marzo . . .	19	16	8	7			+ 1 54 39 ,1
	Settembre	22	4	17	2			− 1 54 17 ,4

Cran-

§. 5.

Grandezza dell' anno dedotta dai precedenti Equinozj comparati cogli osservati a Palermo negli anni 1804 *e* 1805.

Anno e Mese	Intervallo osservato	Anno apparente	Differenza delle Equazioni e perturbazioni	Riduzione dell' Anno apparente in Medio	Anno medio	Medio di Marzo e Settembre
1804						
1691 Marzo	113^a 27^g 9^h 3′ 57″	365^g 5^h 48′ 53″,1	+ 38″,7	— 8″,3	365^g 5^h 48′ 44″,8	... 48 49,15
Settemb.	8 51 14	48 46 ,3	32 ,9	+ 7 ,2	48 53 ,5	
1692 Marzo	112 27 3 33 4	49 2 ,7	42 ,3	— 9 ,2	48 53 ,5	... 48 49,85
Settemb.	2 49 28	48 39 ,4	31 ,5	+ 6 ,8	48 46 ,2	
1693 Marzo	111 26 21 40 21	49 0 ,7	54 ,5	— 11 ,9	48 48 ,8	... 48 49,75
Settemb.	21 3 52	48 41 ,1	43 ,6	+ 9 ,5	48 50 ,7	
1694 Marzo	110 26 15 58 44	49 4 ,8	50 ,0	— 12 ,2	48 52 ,6	... 48 49,95
Settemb.	15 18 54	48 43 ,0	17 ,8	+ 4 ,3	48 47 ,3	
1805						
1691 Marzo	114 27 14 54 21	365 5 48 54,0	+ 32,2	— 6,9	365 5 48 47 ,1	... 48 49,60
Settemb.	14 37 54	48 45,2	32,5	+ 6,9	48 52 ,1	
1692 Marzo	113 27 9 23 28	49 3,1	35,2	— 7,6	48 55 ,5	... 48 50,00
Settemb.	8 35 32	48 38,0	30,3	+ 6,5	48 44 ,5	
1693 Marzo	112 27 3 30 35	49 1,4	47,9	— 10,4	48 51 ,0	... 48 49,95
Settemb.	2 49 56	48 39,5	43,2	+ 9,4	48 48 ,9	
1694 Marzo	111 26 21 49 11	49 5,5	44,4	— 9,8	48 55 ,7	... 48 50,55
Settemb.	21 4 56	48 41,6	17,4	+ 3,8	48 45 ,4	
			Medio . . .	. . . .		365^g 5^h 48′ 49″,84

§. 6.

È dunque secondo questi calcoli la quantità dell'anno tropico Solare di 365^g 5^h 48′ 50″. Se si consideri ciascun risultato da per se stesso, la massima differenza sarebbe di 16″ : ma egli è chiaro, che ogni equinozio preso da se solo è affetto e dall' errore che vi può essere su l' altezza del Polo, (nè, a creder mio, vi ha in Europa un solo osservatorio, sulla di cui latitudine non si possa temere l' errore di uno in due secondi), e dall' altro delle divisioni, e finalmente da quello della grandezza dell' arco totale. Questi errori si compensano quando si accoppiano in ciascun anno i due risultati di Primavera e di Autunno, e non rimane sul medio che l' errore dell' osservazione. Per giudicare dunque del merito dei risultati, si dee prendere il medio di Marzo e Settembre per ciascun anno, siccome si è da me praticato nella tavola prececedente. La massima loro differenza dee servirci di norma per stimare l' errore, a cui possa andar soggetto ciascun medio in particolare. Nel caso nostro la massima differenza non oltrapassa 1″,4. Sono in consegnenza questi medj di lunga mano superiori ai precedenti così d' Ipparco, come di Waltero, e maggiormente a quelli che si possono ricavare dalle osservazioni di Tolomeo, Albategnìo, Ticone, e degli altri che furono sino a Flamstedio.

§. 7.

Se convenga ritenere la misura dell' anno stabilita da La-lande, o torni meglio abbracciare questa mia, la quale è la medesima che nel 1750 fissato aveva La Caille, io non ardirò asserirlo. Certo egli è che il valorosissimo Astronomo di Gota, il Barone de Zach, il quale nelle sue prime tavole Solari aveva conservata la misura di La Lande, nelle ultime pubblicate nell' anno prossimo passato, si è dalla medesima allontanato, avendo diminuito di 12″ il movimento secolare medio del Sole, il che porta un aumento di 3″ circa sulla grandezza dell' anno, il quale secondo Lui sarebbe di 365^g 5^h 48′ 51″.

§. 8.

Supposta la grandezza dell' anno di 365^g 5^h 48′ 50″ saranno i movimenti medj del Sole.

Diurno			59′	8″,3299547
Annuo	11^s	29°	45′	40″,43
Secolare comune . . .	11	29	46	43,27
Secolare giuliano	0	0	45	51,60

DE-

DESCRIZIONE

DI UNA MACCHINA PEL CUI MEZZO SI PREDICE L' AVVENIMENTO DI QUALSIVOGLIA ECCLISSI DEL SOLE, E DELLA LUNA

Del Sig. Giuseppe Veneziani

Presentata il dì 1 *Luglio* 1805

Dal P. D. Pietro Cossali.

Prima di esporre la descrizione dell'enunciata macchina, credo necessario premettere alcuni principj, sopra i quali è intieramente fondata la costruzione della medesima.

1. Se in tutto il corso dell' anno solare tropico, il quale comprende $365^g\ 5^h\ 48'\ 48''$, il movimento del Sole, o per dir meglio quello della terra, fosse costantemente uniforme, percorrerebbe essa ogni giorno un arco di ecclittica di 59', 8'', 3. Ma siffatta uniformità di moto non potendo in verun modo conciliarsi coll' indole della curva, che la terra descrive, forza è che la celerità diurna della medesima vada continuamente variando, ed or cresca e talor scemi, secondo che al Perielio, o all' Afelio si avvicina.

2. Ma ove più sensibili si manifestano le variazioni di celerità, egli è certamente nella Luna, non solo per la grande eccentricità dell' orbita, quanto per le continue, e forti perturbazioni a cui è soggetta. Dopo un esatto confronto istituito fra le antichissime, e più recenti osservazioni si è rilevato, che la rivoluzione sinodica media della Luna comprende presentemente $29^g\ 12^h\ 44'\ 3''$, nel qual tempo il Sole con moto uniforme percorrerebbe 29° 6' 24'', 3. D' onde si vede che il movimento medio diurno della Luna rispetto al Sole è di 13° 10' 35''.

3. La differenza, ossia l' eccesso dell' anno solare tropico sopra l' anno lunare sinodico è di 10^g 20^h 59′ 28″, nel qual tempo il Sole con moto medio percorrerebbe 10° 43′ 8″, 7.

4. Fra tutte le equazioni relative al movimento della Luna, merita particolar considerazione l' equazione dell' orbita, la quale ascendendo sino a 6° 18′ 31″, 6, mostra ad evidenza, quanto sia necessario il di lei uso non solo per le longitudini esatte della luna, ma per quelle eziandio, che con mediocre approssimazione debbon' esser determinate. L' uso poi di questa equazione dipende dal luogo dell' apogeo lunare, la cui posizione va continuamente variando, di sorta che in meno di 9 anni, o più esattamente in 3231^g 8^h 34′ 57″, 6 compie secondo l' ordine de' segni la intera rivoluzione tropica. Il movimento medio diurno dell' apogeo è di 6′ 41″.

5. Se l' orbita lunare coincidesse perfettamente col piano dell' Ecclittica, tutte le sizigie sarebbero necessariamente accompagnate da Ecclissi; ed il loro calcolo si ridurrebbe alla semplice determinazione de' Novilunj, e de' Menilunj. Ma essendo l' orbita lunare inclinata sul piano dell' Ecclittica di un angolo variabile da 5° sino ai 5° 18′ circa, è chiaro, che quelle sole sizigie saranno ecclittiche, le quali accadranno nei nodi della luna, o in poca distanza dai medesimi. Per determinare queste distanze comunemente appellate *limiti* degli ecclissi, ho supposto che l' inclinazione vera dell' orbita lunare sia di 5° 15′: inclinazione che si osserva in quasi tutti gli ecclissi, e che più da vicino corrisponde all' inclinazione dedotta dalle note equazioni che determinano la vera misura di quest' angolo. I seguenti valori indicano la quantità, ossia estensione de' sopradetti limiti degli Ecclissi.

Ecclissi parziali del Sole.

$$\text{Limite}\begin{cases}\text{massimo} = 17^\circ\ 23'\ 26''\\ \text{medio} \quad\ = 16\ \ 24\ \ 56\\ \text{minimo} \ \ = 15\ \ 26\ \ 46\end{cases}$$

Ecclissi totali del Sole

$$\text{Limite}\left\{\begin{array}{lll}\text{massimo} = 11^\circ & 6' & 42 \\ \text{medio} \quad = 10 & 32 & 45 \\ \text{minimo} \quad = 9^\circ & 58 & 53\end{array}\right.$$

Ecclissi parziali della Luna .

$$\text{Limite}\left\{\begin{array}{lll}\text{massimo} = 11^\circ & 34' & 43 \\ \text{medio} \quad = 10 & 37 & 45 \\ \text{minimo} \quad = 9 & 40 & 42\end{array}\right.$$

Ecclissi totali della Luna .

$$\text{Limite}\left\{\begin{array}{lll}\text{massimo} = 5^\circ & 14' & 32'' \\ \text{medio} \quad = 4 & 46 & 35 \\ \text{minimo} \quad = 4 & 18 & 34 .\end{array}\right.$$

6. Il nodo lunare compie la sua rivoluzione tropica contro l' ordine de' segni in $18^{an}\cdot\ 228^{g}\ 4^{h}\ 52'\ 52''$. Se il movimento retrogrado di questo punto fosse costantemente uniforme, percorrerebbe egli ogni giorno $3'\ 11''$, e in un anno lunare $18^\circ 45'\ 55''$. Premessi questi pochi principj passerò ora a dare una succinta, e breve descrizione della macchina, riserbandomi di trattar in seguito della costruzione , e dell' uso della medesima .

7. Otto sono le parti principali, che formano questa macchina, tutte collocate sopra un piano, che lor serve di base, e formanti tutte una sola superficie piana (Fig. 1) .

Il primo pezzo è una fascia circolare, mobile, che racchiude tutte le altre parti della macchina. Sul piano di questa fascia sono marcate due divisioni; la più vicina al lembo esteriore rappresenta il moto medio diurno del Sole per tutti i giorni dell' anno , l' altra divisione indica il moto diurno vero, ed in conseguenza la longitudine vera del Sole: le linee di questa divisione sono prolungate sino all' estremità , o bordo interiore della fascia .

Sul piano della seconda fascia è segnata la divisione dell' ecclittica: le linee di questa divisione sono prolungate sino al lembo convesso, così che la divisione dell' ecclittica divien contigua a quella della longitudine vera del Sole. La fascia di cui parliamo, è attaccata alla base della macchina, e forma col lembo convesso una battuta sopra un labbro sporgente dal lembo concavo della prima fascia, la quale in tal modo potrà girare attorno alla seconda senza pericolo che si stacchi dalla base. Lo spaccato della macchina (Fig. 2) mostra chiaramente la forma di questa, e delle altre battute. Le fascie sono indicate dai numeri 1.ª, 2.ª, 3.ª . . .

La terza fascia (Fig. 1, e 2) è mobile attorno la seconda: la prima delle sue divisioni, che vi sono segnate, rappresenta il movimento medio diurno dell' apogeo lunare: l' altra divisione contigua esprime il movimento sizigiale del medesimo, che val quanto dire gli spazj percorsi dall' apogeo in $14^g\ 18^h\ 22', 2''$, intervallo di tempo, che divide due sizigie medie consecutive (2).

Le due divisioni marcate sulla quarta fascia mobile, appartengono all' equazione dell' orbita lunare: la prima rappresenta l' anomalia media della luna: l' altra divisione contigua indica l' anomalia vera. L' indice D affisso a cotesta fascia, e prolungato sino alle divisioni segnate sulla terza, rappresenta l' apogeo lunare.

Attaccata alla base della macchina è la quinta fascia, la quale ad altro non serve, che a formar due battute sulle contigue fascie, che la rinchiudono.

Il movimento retrogrado del nodo è rappresentato dalla divisione marcata sopra la sesta fascia. I gradi di questa divisione determinano gli spazj percorsi dal nodo negli intervalli di tempo che separano le sizigie medie consecutive (2).

L' indice F attaccato alla settima fascia rappresenta il nodo lunare ascendente, al quale nell' opposta parte corrisponde il nodo discendente K. Le linee marcate a destra, ed a sinistra dei nodi F, e K indicano i limiti degli ecclissi parziali, e totali del Sole, e della Luna. Alla divisione dei limiti si potrebbe sostituire la riduzione dell'orbita lunare all'Ecclittica, dedotta dall'angolo d'inclinazione media $= 5° 8' 48''$ circa. Questa fascia è affissa ad un'altra inferiore rappresentata (Fig. 2) da MM, la quale per di sotto al cerchio QQ si estende sino alla piccola fascia P attaccata alla base della macchina. La superficie superiore della fascia MM presenta otto spazj, o zone oscure (Fig. 1) L, H, N, P... le quali indicano l'avvenimento degli ecclissi. La fascia MM verrà in seguito chiamata *piano delle oscurazioni*.

L'ultimo pezzo della macchina è il cerchio QQ (Fig. 2) mobile attorno ad un asse RC, che passa pel centro C della macchina, e termina in una vite fornita della sua controvite F, la quale esercita la pressione sopra un cerchietto EQ, intorno a cui devon girare le due righe A, B (Fig 3), delle quali parleremo in seguito. Il pezzo QQ è rappresentato nella Fig. 1 dal cerchio CkGG' sul quale sono marcate due divisioni. La prima incomincia dal punto L, ed esprime il movimento medio diurno della luna rispetto al Sole (2): l'altra divisione incomincia dal foro N, e comprende due giri di fori rappresentanti tutte le sizigie medie, che ponno accadere in un anno.

La forma delle due righe A, e B è bastantemente espressa nella Fig. 3. La riga A si estende dal centro della macchina sino alla divisione della longitudine media del Sole segnata sulla prima fascia, e porta annesso alla sua estremità un arco di circolo PD, il cui centro è C: quest'arco è mobile entro un incastro, e può esser fermato in qualunque posizione per mezzo della vite T. La estensione PD dell'arco comprende 10 in 12 gradi, ed i lati estremi P*p*, D*d* sono diretti al centro C. La lunghezza CE della riga B è uguale al raggio CA (Fig. 1).

COSTRUZIONE DELLA MACCHINA.

8 Preparate tutte le fascie, o semplicemente disegnate sopra un foglio di cartone, come si vede espresso nella Fig. 1; si incomincierà dalla divisione dell'Ecclittica, come quella che servirà di regola per eseguire tutte le altre divisioni. Condotto adun-

que dal centro C il raggio principale CA non prolungato sulla prima fascia; dal punto A risguardato come il principio del segno di Ariete, si incomincierà la divisione dell'Ecclittica in 360 gradi, i quali, se il permetterà la loro ampiezza, dovranno esser suddivisi in parti minori. Converrà inoltre costruire un Nonio adattato a questa divisione, onde prender colla massima approssimazione i diversi archi, dei quali fra poco si dovrà far uso. Se il raggio CA è corto, l'approssimazione potrà appena essere spinta ai minuti primi di grado.

9. La divisione della longitudine vera del Sole, contigua a quella dell'Ecclittica, può essere eseguita nel modo seguente. Determinata per mezzo delle tavole astronomiche, ovvero trovata nelle Effemeridi la longitudine vera, che in un dato anno, per esempio nel 1804, aveva il Sole al mezzodì del primo giorno di Marzo, e riscontrata nel punto *a* dell' ecclittica la sopradetta longitudine, si condurrà sulla direzione del raggio la linea *ad*, la quale rappresenterà il mezzodì del primo giorno di Marzo: segnando nello stesso modo le longitudini vere del Sole pel mezzodì del primo giorno di ciascun mese, risulteranno 12 spazj corrispondenti ai 12 mesi dell' anno. Per suddividere questi spazj in tante parti, quanti sono i giorni di ciascun mese, si noteranno come sopra le longitudini vere del Sole per alcuni determinati giorni di ogni mese, quali ad esempio sarebbero il 4^{to}, 8^{vo}, 12^{mo}, 16^{mo} ec. e divisi in seguito gl'intervalli compresi fra le linee indicanti le accennate longitudini, in tante parti uguali, quanti sono i giorni, che rispettivamente comprendono, resterà in fine con sufficiente approssimazione determinato il movimento vero diurno del Sole per tutti i giorni dell'anno. L'archetto $ab = 14', 34''$, 8 compreso fra il mese di Febbrajo, ed il mese di Marzo indica lo spazio percorso dal Sole nelle $5^h\ 48'\ 48''$, che compiscono l'anno solare tropico. L' altro archetto $ag = 1^\circ\ 0'\ 8''$ movimento diurno vero del Sole sul finir di Febbrajo indica negli anni bisestili il giorno 29 di questo mese. Nell' eseguir questa divisione non si è avuto riguardo al movimento dell' afelio terrestre, il quale comechè lentissimo, pure coll' andar de' secoli renderà inutile co-

testa divisione: Quando ciò avvenga, si sostituirà alla prima una nuova divisione relativa a quel grado di longitudine, nel quale si troverà l' afelio terrestre in quella data epoca.

Dalla linea *ad* incomincia pure la divisione della longitudine media del Sole: le parti che la compongono sono tutte uguali fra loro, e ciascuna comprende un arco di 59′. 8″, 3 che è il movimento medio diurno del Sole: Questa può essere eseguita in una maniera affatto simile a quella, che si è praticata per la longitudine vera: l'arco $de = 14' \, 19''$, 5 determina lo spazio percorso dal Sole nelle $5^h \, 48' \, 48''$: finalmente l' arco $dg' = 59' \, 8''$, 3 rappresenta negli anni bisestili il giorno 29 di Febbrajo.

10. Conoscendo la longitudine vera del Sole per un dato giorno, e collocando la divisione del movimento diurno vero in guisa, che la linea del proposto giorno corrisponda a quel grado dell' ecclittica, il quale indica la data longitudine del Sole, è chiaro che tutte le altre linee di questa divisione mostreranno sulla vicina ecclittica le longitudini vere del Sole per tutti gli altri giorni dell'anno. La fascia non dovrà essere rimossa dalla sua posizione finchè si arrivi all' ultimo giorno di Febbrajo: allora converrà trasportarla in guisa, che il punto *a* cada in *b*. Se l' anno sarà bisestile, si trasporterà in vece *g* nel posto di *a*, e lo spazio *ag* rappresenterà il giorno 29 del sopradetto mese (9).

11 Le divisioni segnate sulla terza fascia determinano come è già stato detto (7) il moto medio diurno, e sizigiale dell' apogeo lunare. Per eseguir la prima, si prenderà l' arco $Bh = 28° \, 31' \, 13''$ spazio percorso dall' apogeo in 256 giorni; ed essendo il numero $256 = 2^8$ sempre divisibile per 2, è chiaro che dividendo in successive metà l'arco B*h*, si perverrà ad un piccolo arco di $6' 41''$,07, che è appunto l' arco percorso dall' apogeo in un giorno (4). La divisione dell' intiero circolo può essere con somma facilità continuata trasportando di mano in mano col compasso l' arco B*h*, ed eseguendo in seguito la indicata suddivisione. Se il raggio della macchina è corto, converrà allora limitarsi a quei soli archi, che sono percorsi dall' apogeo nell' intervallo di quattro, o tutto al più di due giorni.

12. Giova quì osservare, che la rivoluzione tropica dell'apogeo (4) comprende 9 anni lunari col residuo di $42^g\ 1^h\ 17'\ 42''$, ed in questo residuo di tempo l' apogeo percorre un arco di $4^\circ\ 41'\ 10''$. Separato adunque dall' intiera circonferenza l' arco $Bm = 4^\circ\ 41'\ 10''$, e diviso il restante della medesima in 9 parti uguali si avranno gli spazj percorsi dall' apogeo nel corso de' sopradetti anni lunari, ed ogni spazio comprenderà un arco di $39^\circ\ 28'\ 41''$. Suddividendo in seguito tutti questi spazj in 24 parti uguali, si otterranno gli archi percorsi dall' apogeo in $14^g\ 18^h\ 22'\ 2''$.

13. La prima divisione marcata sulla quarta fascia rappresenta l' anomalia media della Luna, e non è altro che la solita divisione del circolo in 360 gradi. Per ottenere la contigua divisione dell' anomalia vera si prenderanno ad arbitrio alcuni gradi di anomalia media, per esempio il grado 4^{to}, 8^{vo}, 12^{mo}, ec. . . ., e segnati a destra, e a sinistra dell' apogeo D i corrispondenti archi di anomalia vera ricavati dalla tavola dell' equazione dell' orbita lunare, cioè $Dp = Dq = 3^\circ\ 55'\ 17''$, $Dl = Dl' = 7^\circ\ 10'\ 41''$, ec., e dividendo in seguito in quattro parti uguali gli archi corrispondenti $Dp = Dq$, $lp = ql'$, ecc., risulterà la divisione cercata dell' anomalia vera; l' errore, che nasce dall' ultima suddivisione in parti uguali è sì piccolo, che meritamente può essere trascurato.

14. La divisione del movimento retrogrado del nodo lunare può essere eseguita in una maniera affatto simile alla già praticata per l' apogeo. In fatti si osservi, che la rivoluzione tropica del nodo (12) racchiude 19 anni lunari col residuo di $65^g\ 5^h\ 29'\ 28''$, e che in questo residuo di tempo il nodo percorre $3^\circ\ 17'\ 55''$. Segnato adunque alla sinistra del punto E l' arco $Es = 3^\circ\ 17'\ 55''$, e diviso il restante della circonferenza in 19 parti uguali, ciascuna delle quali conterrà un arco di $18^\circ\ 45'\ 55'',1$, si avranno gli archi percorsi dal nodo nei successivi anni lunari sinodici. La suddivisione di tutti questi archi in 24 parti uguali determinerà gli archi percorsi dal nodo in $14^g\ 18^h\ 22'\ 2''$.

15. Descritti col raggio CF i due archi uFx, yKz dividenti per metà l' ampiezza della settima fascia, e presi a destra, ed a sinistra dei nodi F, K gli archi $Fu = Fx = Ky = Kz = 16^\circ\ 24'\ 56''$ (5), i pun-

i punti u, x, y, z saranno i limiti medj degli Ecclissi solari parziali: similmente presi gli archi $Fu' = Fx' = 10^\circ\, 32'\, 45''$, i punti u', x', indicheranno i limiti medj degli Ecclissi solari totali. Nella stessa maniera si determineranno i limiti medj t, t' degli Ecclissi parziali, e totali della Luna. Non sono espressi nella figura i limiti massimi e minimi degli Ecclissi per non renderla ingombrata con un numero eccessivo di linee. Segnando ora sul piano delle oscurazioni i raggi occulti Cu, Cu', e descritto col raggio arbitrario CL un circolo similmente occulto, il quale taglierà i sopradetti raggi in c, c', l'arco compreso cc' sarà la differenza fra i limiti medj degli Ecclissi parziali, e totali del Sole: si divida per metà in d' l'arco cc', e fatto centro in c' si descriva col raggio $c'\,d$ un semicircolo, che indicherà il limite, ossia confine a cui si estenderà la zona alla sinistra del punto L; indi preso l'arco $Lv = Lc'$, dal punto v come centro collo stesso raggio di prima si marcherà l'altro confine della stessa zona, la quale è finalmente rinchiusa fra due archi descritti dal centro C, e distanti fra loro quanto è il diametro degli archi estremi, che ne limitano la estensione. Per determinare le dimensioni dell'altra zona H, si descriverà col raggio CH un circolo occulto, che taglierà i raggi Ct, Ct' nei punti f, f': indi segnata la metà n' dell'arco compreso ff' esprimente la differenza fra i limiti medj degli Ecclissi parziali, e totali della Luna, e descritti dal punto f' come centro col raggio $f'\,n'$ due archi occulti seganti il raggio Ct' in due opposti punti r, r', si descriveranno coi raggi Cr, Cr' due archi concentrici, che determineranno la larghezza della zona. Rapporto agli archi estremi della medesima, si prenderà il raggio nn', che stia al dato raggio $n'f'$ :: 8 : 3 ragione approssimata dei semidiametri medj del cono ombroso terrestre, e della Luna, e dal punto n come centro col raggio nn' si descriverà l'arco estremo della zona H, la quale potrà esser dipinta a color rossastro simile a quello che tinge la luna, quand'è immersa nel cono ombroso della Terra. Adoperando i limiti massimi, e minimi degli Ecclissi (5), le zone L, ed H avranno due altre estensioni diverse dalla prima, e che dovranno essere indicate per mezzo di archi circolari, che ne stabiliranno le estremità. Le zone N, e P sono rispettivamente simili alle zone L, ed H. Le quattro zone che appartengono al nodo discendente K sono uguali alle quattro del nodo discendente F.

16. Le divisioni segnate sull' ultimo pezzo della macchina rappresentano il movimento medio, e le sizigie medie della Luna. Il foro L indica un Novilunio, e corrisponde esattamente alla prima zona colorata; il raggio di questo foro è uguale alla corda *c′ d′* della semidifferenza dei limiti medj degli Ecclissi parziali, e totali del Sole. Dal centro L di questo foro incomincia una divisione di 31 parti uguali, ciascuna delle quali comprende un arco di 13° 10′35″, movimento medio diurno della Luna (2), e tutte insieme formano un arco di 408° 28′ 5″,9: ed essendo quest' arco maggiore della circonferenza, è chiaro che un sol circolo non può senza confusione rappresentare tutte le accennate parti. Preso adunque l'arco LRSX=355° 45′ 45″ percorso dalla Luna in 27 giorni, e descritto col raggio CT l'arco indefinito TV, si dividerà il primo arco in 27 parti uguali, e le altre quattro si trasporteranno sull' arco inferiore TV: indi suddividendo tutte queste parti in 24 parti uguali, si otterrà il movimento orario medio della Luna. A questa divisione appartiene il foro Q, che rappresenta il Plenilunio: il raggio di questo foro è uguale alla corda *f′ n′* della semidifferenza dei limiti medj degli Ecclissi parziali, e totali della Luna (15): la distanza arcuale LRQ fra i centri dei fori L, e Q è di 194° 33′ 12″,3: la distanza CQ fra il centro C della macchina, e quello del foro Q è uguale al raggio CH. Le quadrature lunari sono rappresentate dai circoli R, ed S: le distanze arcuali fra i loro centri R, S, ed il centro L del Novilunio sono LR = 97° 16′ 36″, LRS = 291° 49′ 48″.

17. Tutte le sizigie medie, che possono accadere in un anno solare sono indicate dalla serie di fori, la quale incomincia in N, e termina in Π. In due fascie circolari sono distribuiti i sopraddetti fori: quelli della prima fascia rappresentano i Novilunj: essi hanno lo stesso diametro, il quale è simile al diametro

del foro L ridotto al circolo descritto col raggio CN : l' altra fascia comprende i fori rappresentanti i Plenilunj : il diametro di questi fori è uguale in tutti, ed è simile al diametro del foro Q ridotto al circolo descritto col raggio CP. Le due zone colorate N , P corrispondono alle rispettive serie di fori indicanti i Novilunj , ed i Plenilunj . Per eseguire facilmente cotesta divisione si prenderà l' arco NH $= 10^\circ\ 43'\ 8''$ (3), e si dividerà il restante della circonferenza in 24 parti uguali, ciascuna delle quali comprenderà un arco di $14^\circ\ 33'\ 12'', 3$. Il centro del foro P' è diametralmente opposto a quello del foro Q; ed il raggio CYM che passa pel centro del secondo foro noviluniare Y indica sulla divisione del movimento medio della Luna il numero de' giorni, delle ore, ecc. che formano una rivoluzione sinodica lunare (2).

USO DELLA MACCHINA.

18. Dato il giorno, e l' ora in cui accade una Sizigia vera, per esempio un Novilunio, e determinate per quell' istante le longitudini vere del Sole, dell' apogeo, e del nodo, si collocherà la prima fascia nella posizione conveniente (10) : indi posta la riga A (suppongo che le due righe A, e B (Fig. 3) sieno mobili attorno al centro C della macchina) sopra il grado dell' Ecclittica, che segna la longitudine del Sole, si muoverà il cerchio delle lunazioni in sino a che il centro del foro noviluniare L cada precisamente sotto la riga. Dirigendo in seguito per mezzo dell' altra riga B i due indici dell' apogeo, e del nodo ai rispettivi gradi di longitudine, e conducendo sotto agl' indici le linee principali, che sulla terza, e sesta fascia denotano il principio delle divisioni dei loro movimenti sizigiali, si osserverà se per di sotto al foro L spunti la zona nera; e se ciò avviene, dovrà conchiudersi, che il proposto novilunio apporterà certamente a qualche luogo della terra un Ecclissi solare, che sarà totale, o parziale, se il foro L intieramente, o solo in parte verrà oscurato dalla zona.

19. Per riconoscere se il seguente Plenilunio sarà accompagnato dall' Ecclissi lunare, si trasporteranno prima di tutto gl' indici dell' apogeo, e del nodo di un grado sizigiale nelle rispettive loro divisioni, indi collocata la riga B sul centro del foro pleniluniare Q, e notato sulla quarta fascia il grado di anomalia vera, sul quale ella va a cadere, si trasporterà sul corrispondente grado di anomalia media, e in tal posizione indicherà sulla divisione del movimento diurno della Luna il numero de' giorni, e delle ore, che scorrono fra il Novilunio, ed il Plenilunio: e poichè è data l'epoca del Novilunio, è chiaro, che per mezzo di una semplicissima operazione si determinerà pur quella del Plenilunio. Ciò posto per mezzo della riga A, e dell' arco annesso si noti sulle divisioni della longitudine vera, e media del Sole, il giorno, e prossimamente anche l' ora in cui accade il Plenilunio, e ricondotto alla riga A il centro del foro P' opposto a Q, si vedrà subito se nel dato Plenilunio accadrà, o no l' ecclissi della Luna. Dal fin quì detto si può facilmente raccogliere in quale maniera si debba procedere nella determinazione delle seguenti Sizigie: al qual intento si potrebbe eziandio pervenire in un altro modo non solo più diretto del già esposto, ma indipendente da qualsivoglia computazione, se l' inevitabile addizione di nuovi pezzi formanti un sistema di ruote dentate non rendesse troppo difficile la costruzione, e l' uso della macchina.

20. La serie di fori, che incomincia in N, somministra un altro mezzo di gran lunga più semplice, benchè non tanto approssimato come il precedente, onde predire gli Ecclissi del Sole, e della Luna. Suppongo, che si conosca la longitudine del Sole, e del nodo lunare per quell' istante, in cui accade un Novilunio. Collocata la prima fascia in guisa che il giorno del Novilunio preso sulla divisione del movimento medio diurno corrisponda a quel grado dell' Ecclittica, che indica la longitudine del Sole, e diretto allo stesso grado di longitudine il centro del foro noviluniare N, si rivolgerà l' indice del nodo al grado di sua longitudine, e sotto di lui si condurrà la linea principale, che marca il principio della divisione segnata sulla sesta fascia. Disposti

così i pezzi della macchina, il foro N indicherà se è possibile, o no l' Ecclissi del Sole. Trasportato in seguito il nodo di un grado sizigiale, il foro P′ mostrerà se l' ecclissi della Luna possa accadere in questo Plenilunio: e quando l' ecclissi abbia luogo, si collocherà la riga A sopra il centro del foro P′, e in tal posizione indicherà sulla divisione del moto diurno medio segnata sulla prima fascia il giorno in cui accadrà il plenilunio, e l' ecclissi della Luna. Scorrendo in tal modo da un foro all' altro, e trasportando di mano in mano l' indice del nodo lunare per i successivi gradi sizigiali, si ravviseranno con somma facilità tutte le sizigie ecclittiche. Quando si perverrà all' ultimo foro Π, si rimuoverà il cerchio delle lunazioni in guisa, che il centro del foro N cada precisamente in quel punto, in cui da prima esisteva il centro del foro Π: il cerchio dovrà restare in questa posizione, finchè siensi percorse tutte le sizigie, ed allora si rimuoverà come prima.

21. Rimane ora a dimostrar l' uso della macchina per la determinazione delle longitudini approssimate della Luna per tutti i giorni dell' anno, e per qualunque ora di ciascun giorno. Suppongo che per un dato istante, ad esempio, il mezzodì del primo giorno di Maggio del corrente anno, si conosca la longitudine vera della Luna, e del suo apogeo, e che si voglia determinare la longitudine della Luna pel mezzodì del seguente giorno. A questo fine si dirigerà l' indice dell' apogeo al grado di sua longitudine, e sotto di lui si farà cadere il principio della divisione del suo movimento diurno marcata sulla terza fascia: similmente diretto il centro del foro L a quel grado dell'Ecclittica, il quale indica la data longitudine della Luna, si collocherà la riga sopra la linea segnata 1 nella divisione del movimento medio lunare, e si avrà in tal modo l' anomalia media della luna: indi trasportata la riga sul corrispondente grado di anomalia vera, ella indicherà sulla divisione dell' Ecclittica la longitudine approssimata della Luna pel mezzodì del secondo giorno di Maggio. Colla stessa facilità si determineranno le longitudini approssimate

te della Luna per qualsivoglia giorno, ed ora dell' anno, trasportando convenevolmente l' apogeo per tutti i gradi dell' accennata divisione, e collocando la riga sopra quelle linee della divisione del moto medio diurno della Luna, che al dato istante corrispondono.

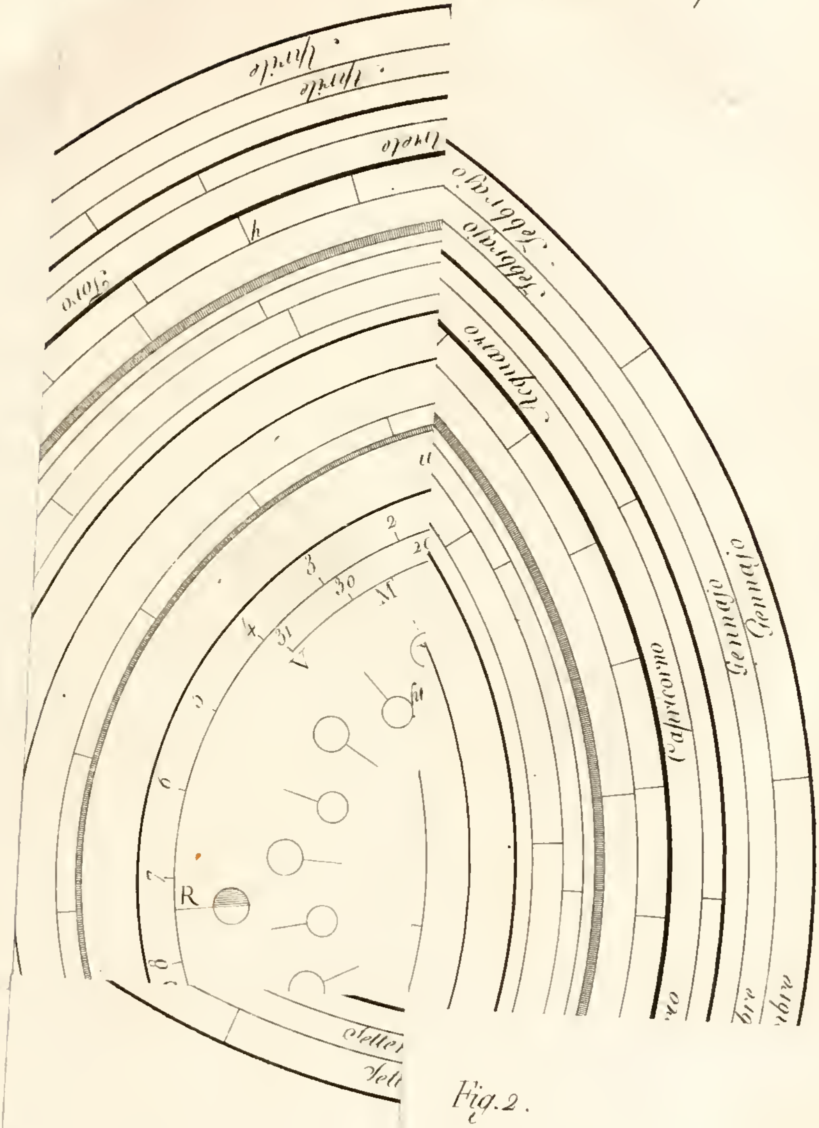

Aprile
Aprile
Toro
h
Febbrajo
Febbrajo
Aquario
u
2
20
3
30
M
4
31
V
5
6
7
R
8
Capricorno
Gennajo
Gennajo
Settem
Sett

Fig. 2.

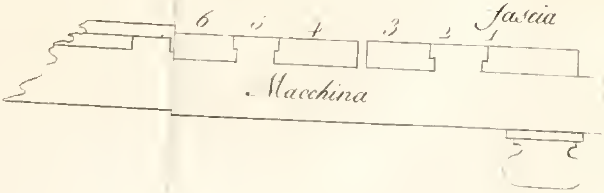

fascia
Macchina

Fig. 1

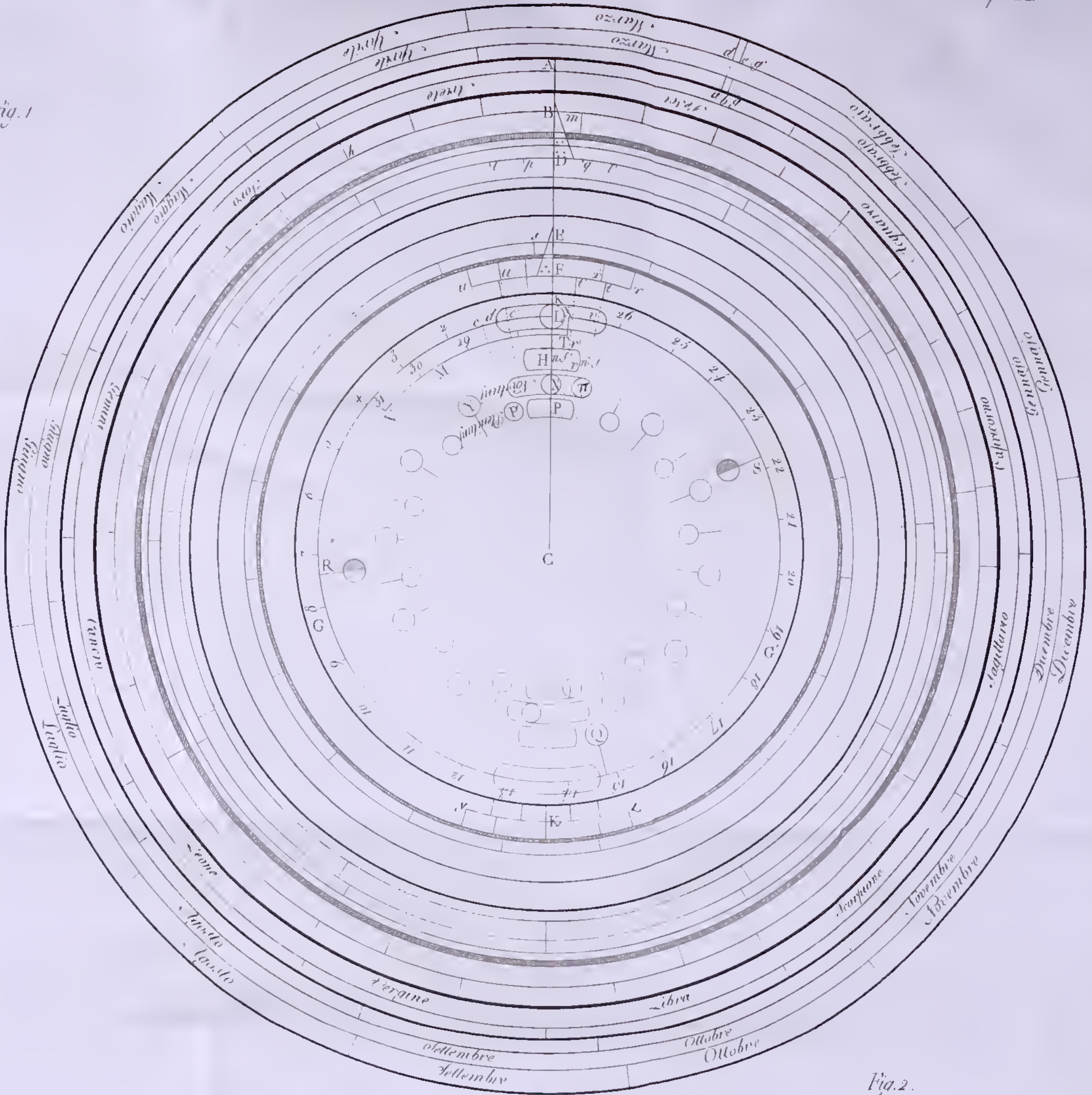

A
B
m
D
E
F
u
t
r
L
c
d
T
H
N
π
P
R
S
G
C
K
Marzo
Aprile
Maggio
Giugno
Luglio
Agosto
Settembre
Ottobre
Novembre
Dicembre
Gennajo
Febbrajo
Toro
Gemini
Cancro
Leone
Vergine
Libra
Scorpione
Sagittario
Capricorno
Acquario
Pesci
1
2
3
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
29
30

Fig. 2.

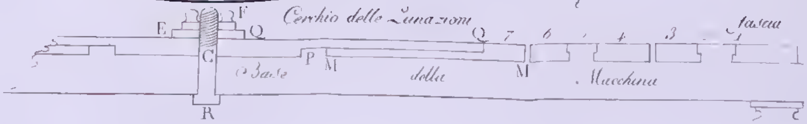
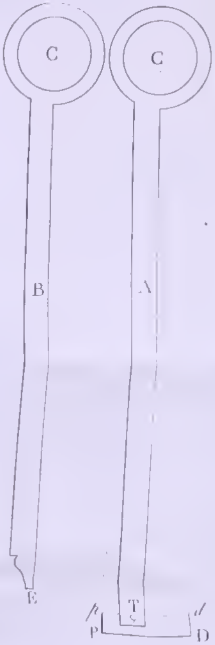

Cerchio delle Lunazioni
E
F
Q
C
P
M
R
7
6
4
3
1
tasca
Base della Macchina

Fig. 3.


C
C
B
A
E
T
p
d
P
D

SUL CALCOLO DELLE DERIVAZIONI

DEL SIG. PIETRO PAOLI

MEMORIA

Ricevuta il dì 9 *Febbrajo* 1806.

Il celebre Geometra Arbogast ha dato questo nome ad un nuovo calcolo, il quale abbraccia la teoria delle serie, e di cui il calcolo differenziale sotto un certo aspetto non è che un caso particolare. Leggendo le numerose ed eccellenti applicazioni, che Egli fa di un tal metodo, lo ebbi da principio in gran pregio, e desiderai che fosse generalmente coltivato, riguardandolo come la regia strada, per la qual sola giunger facilmente si potesse a tanti e sì nobili ritrovati. Ma dopo un più maturo esame mi accorsi, che l' esito felice delle soluzioni del Sig. Arbogast dipendeva più da alcuni artifizj ingegnosi di calcolo e da certe forme date da lui alle sue formole, che dai principj dai quali le medesime soluzioni faceva discendere; e che il calcolo differenziale era solo sufficiente a condurci agli stessi risultati in un modo forse più semplice ed anche più generale. La complicazione, a cui è giunta l' analisi, esige che le diverse ricerche si riuniscano e si colleghino insieme, e per quanto è possibile, si facciano dipendere da pochi principj. In questa breve Memoria mi propongo di mostrare, come con i metodi già conosciuti si possano trattare quelle medesime questioni, intorno alle quali si aggira l' opera del Sig. Arbogast, prendendo a risolvere il problema principale, da cui la soluzione di tutti gli altri discende.

I.

Data la funzione

$$\varphi\,.\,(a + bx + b'x^2 + b''x^3 + b'''x^4 + \text{ec.})$$

sia proposto di svolgerla in una serie ordinata secondo le potenze di x.

Tutto si riduce a trovare il valore della funzione $\frac{d^n.\varphi\ (a+bx+b'x^2+\text{ec})}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n\,dx^n}$ nel caso di $x=0$, giacchè è noto esser questo il coefficiente cercato di x^n. Facciamo a tale oggetto

$$t = b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \text{ec.},$$

sostituendo il qual valore la funzione proposta diventa $\varphi.(a+tx)$, e svolgendola in serie secondo il teorema di Taylor avremo

$$\varphi.(a+tx) = \varphi\, a + \frac{d\varphi}{da}\,tx + \frac{d^2\varphi}{1.2da^2}\,t^2x^2 + \frac{d^3\varphi}{1.2.3da^3}\,t^3x^3 .$$

$$\ldots\ldots + \frac{d^n\varphi}{1\,.\,2\ 3\,.\,.\,.\,.\,n\,da^n}\,t^n x^n + \text{ec.}$$

Ora il coefficiente di x^n in tx è $\frac{d^{n-1}.t}{1.2\,.\,.\,.\,(n-1)\,dx^{n-1}}$

in t^2x^2 $\frac{d^{n-2}.t^2}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-2)dx^{n-2}}$

in t^3x^3 $\frac{d^{n-3}.t^3}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-3)dx^{n-3}}$

$\vdots \qquad \vdots$

in $t^{n-1}x^{n-1}$ $\frac{d\,.\,t^{n-1}}{dx}$

in $t^n\,x^n$ t^n

purchè si faccia $x=0$ dopo le differenziazioni. Sarà dunque con questa condizione

$$\frac{d^n.\varphi.(a+bx+\text{ec})}{1.2\,.\,.\,.\,n\,dx^n} = \frac{d^n.\varphi\,.\,a}{1\,.\,2\ldots n\,da^n} + \frac{d^{n-1}\varphi}{1.2..(n-1)da^{n-1}}\cdot\frac{d.t^{n-1}}{dx}$$

$$+ \frac{d^{n-2}\varphi}{1.2..(n-2)da^{n-2}}\cdot\frac{d^2\,t^{n-2}}{1.2\,dx^2}\ldots + \frac{d\varphi}{da}\cdot\frac{d^{n-1}t}{1.2..(n-1)dx^{n-1}}$$

2.

L' equazione precedente ci disimpegna dalla considerazione della funzione φ di un polinomio; e riduce tutto alla ricerca del valore di $\frac{d^p\,.\,t^r}{1\,.\,2\,.\,.\,p\,dx^p}$ nel caso di $x=0$, o sia alla ricerca del coefficiente di x^p nel polinomio $t = b + b'x + b''x^2 +$ ec. innalzato alla potenza r; onde potranno quì applicarsi i varj metodi che si conoscono per l'evoluzione delle potenze dei polinomj. Ma anche indipendentemente da questi metodi potremo con i medesimi principj giungere ad ottenere il coefficiente di x^p in t^r, e quindi un ulteriore sviluppo della funzione proposta. Ponghiamo infatti

$$t' = b' + b''x + b'''x^2 + b^{\text{iv}}x^3 + \text{ec.}$$

in modo che sia $t = b + t'x$, ed in vigore del ragionamento precedente avremo

$$\text{(A)}\quad \frac{d^p.t^r}{1.2..p\,dx^p} = \frac{d^p.t^r}{1.2..p\,dt^p}.t'^p + \frac{d^{p-1}.t^r}{1.2..(p-1)dt^{p-1}}.\frac{d\,t'^{p-1}}{dx}$$
$$+ \frac{d^{p-1}.t^r}{1.2..(p-2)dt^{p-2}}.\frac{d^2.t'^{p-2}}{1.2dx^2}\ldots + \frac{d.t^r}{dt}.\frac{d^{p-1}.t'}{1.2..(p-1)dx^{p-1}}$$

ove nel secondo membro ho scritto t in luogo di b, perchè nel caso di $x = 0$ è $t = b$. Mediante l'equazione (A) potremo conseguire un ulteriore sviluppo del valore di $\frac{d^n.\Phi.(a + bx + b'x^2 + \text{ec.})}{1.2.3\ldots n\,dx^n}$, sostituendo in luogo dei differenziali di t^r quelli delle potenze di t'. Così pure facendo

$$t'' = b'' + b'''x + b^{\text{iv}}x^2 + b^{\text{v}}x^3 + \text{ec.}$$

esprimeremo i differenziali di t'' per quelli delle potenze di t''; e così in seguito. E poichè in ciascuna operazione diminuisce di una unità l'esponente del differenziale più alto, giungeremo ad ottenere l'intero sviluppo della quantità $\frac{d^n.\Phi.(a + bx + b'x^2 + \text{ec.})}{1.2.3\ldots\ldots n\,dx^n}$ espresso senza differenziali per mezzo delle lettere t, t', t'', ec., che nel caso di $x = 0$, il quale unicamente quì si considera, divengono rispettivamente i coefficienti b, b', b'', ec. del polinomio $a + bx + b'x^2 +$ ec.

3.

Ma per eseguire con più facilità e prontezza queste diverse operazioni, è opportuno di fare le riflessioni seguenti. Se nella equazione (A) ponghiamo $p + 1$ in luogo di p, avremo

$$(B)\quad \frac{d^{p+1}.t^r}{1.2..(p+1)dx^{p+1}} = \frac{d^{p+1}.t^r}{1.2..(p+1)dt^{p+1}}.t'^{p+1} + \frac{d^p.t'}{1.2..pdt^p}.\frac{d.t'^p}{dx}$$
$$+\frac{d^{p-1}.t^r}{1.2..(p-1)\,dt^{p-1}}.\frac{d^2.t'^{p-1}}{1.2dx^2}\ldots+\frac{d.t^r}{dt}.\frac{d^p.t'}{1.2..pdx^p}.$$

Di quì facilmente apparisce, che dalla formola (A) possiamo passare alla formola (B) con le seguenti operazioni: 1.° differenziando la formola (A) per rapporto ad x supposta t costante, e dividendo ciascun termine pel rispettivo esponente del differenziale, che ne nasce; 2.° facendo variare anche la t, ma nel solo primo termine $\frac{d^p.t^r}{1.2..pdt^p}.t'^p$, ove non sono i differenziali di t', onde risulta $\frac{d^{p+1}.t^r}{1.2..(p+1)dt^{p+1}}.t'^p\frac{dt}{dx}$, ponendovi t' invece di $\frac{dt}{dx}$, che nel caso di $x=0$ gli è eguale, con la quale sostituzione questo termine diventa $\frac{d^{p+1}.t^r}{1.2..(p+1)dt^{p+1}}.t'^{p+1}$, e dividendolo per l' esponente $p+1$ di t'.

4.

Così pure facendo

$$t''=b''+b'''x+b^{iv}x^2+\text{ec.}$$
$$t'''=b'''+b^{iv}x+b^{v}x^2+\text{ec.}$$
$$\text{ec.}$$

potremo esprimere il differenziale $\frac{d^p.t^r}{1.2...pdx^p}$ per t'', e nel passare al differenziale seguente $\frac{d^{p+1}.t^r}{1.2..(p+1)dx^{p+1}}$ vedremo doversi in simil guisa prendere il differenziale della formola trovata, supposta ovunque costante t' fuorchè nel primo termine, ove non sono i differenziali di t'', e divider poi questo termine per l' esponente della potenza risultante di t'', dopo di avervi posto t'' invece di $\frac{dt'}{dx}$. E la stessa regola avrà luogo per rapporto alle lettere seguenti t'', t''', ec.

5.

Quindi nel prendere uno dopo l' altro i valori della quantità $\frac{dp.t^r}{1.2\,pdx^p}$ converrà differenziare il valore già trovato per rapporto ad x facendo variare t nei soli termini che contengono t', ma non in quelli che contengono i differenziali di t', cioè le lettere t'', t''', &c.; facendo similmente variare t' nei soli termini che non comprendono t''', t^{iv}, &c., t'' nei soli termini che non contengono t^{iv}, t^{v}, &c.; e così in seguito. In una parola bisognerà in ciascun termine far variare la lettera dell' indice più alto, e quella dell' indice prossimamente inferiore, se vi è, e dividere per l' esponente delle nuove potenze, che nasceranno.

6.

Ciò posto avremo

$$\frac{d.t^r}{dx} = \frac{d.t^r}{dt}.t'$$

$$\frac{d^2.t^r}{1.2dx^2} = \frac{d^2.t^r}{dt^2} \cdot \frac{t'^2}{2} + \frac{d.t^r}{dt} \cdot t''$$

$$\frac{d^3t^r}{1.2.3dx^3} = \frac{d^3.t^r}{dt^3} \cdot \frac{t'^3}{2.3} + \frac{d^2.t^r}{dt^2}.t't'' + \frac{d.t^r}{dt} \cdot t'''$$

$$\frac{d^4\,t^r}{1.2.3.4dx^4} = \frac{d^4\,t^r}{dt^4} \cdot \frac{t'^4}{2.3.4} + \frac{d^3.t^r}{dt^3} \cdot \frac{t'^2}{2} \cdot t''$$
$$+ \frac{d^2.t^r}{dt^2} \cdot \left(t'\,t''' + \frac{t''^2}{2}\right) + \frac{d.t^r}{dt} \cdot t'''$$

$$\frac{d^5.t^r}{1.2..5dx^5} = \frac{d^5.t^r}{dt^5} \cdot \frac{t'^5}{2..5} + \frac{d^4.t^r}{dt^4} \cdot \frac{t'^3}{2.3} \cdot t''$$
$$+ \frac{d^3.t^r}{dt^3}\left(\frac{t'^2}{2}t''' + t' \cdot \frac{t''^2}{2}\right) + \frac{d^2.t^r}{dt^2}\left(t'\,t^{iv} + t''\,t'''\right) + \frac{d.t^r}{dt}.t^v$$

$$\frac{d^6.t^r}{1.2..6dx^6} = \frac{d^6.t^r}{dt^6} \cdot \frac{t'^6}{2\ldots6} + \frac{d^5.t^r}{dt^5} \cdot \frac{t'^4}{2.3.4} \cdot t''$$

$$+\frac{d^4.t^r}{dt^4}\left(\frac{t'^3}{2.3}\cdot t''' + \frac{t'^2}{2}\cdot\frac{t''^2}{2}\right) + \frac{d^3.t^r}{dt^3}\left(\frac{t'^2}{2}\cdot t^{\prime v} + t't''t''' + \frac{t''^3}{2.3}\right)$$

$$+\frac{d^2.t^r}{dt^2}\left(t't^{v} + t''t^{\prime v} + \frac{t'''^2}{2}\right) + \frac{d.t^r}{dt}\cdot t^{v\prime}$$

&c.

7.

Osservando attentamente questi valori, per esempio il sesto, vedremo che gl' indici delle lettere t', t'' &c. presi insieme formano da per tutto 6, e contengono tutte le diverse maniere, nelle quali si può far 6 con la somma dei numeri inferiori; e questo in modo tale, che nel primo termine, ov'è $t'^6 = t'.t'.t'.t'.t'.t'$, il 6 è formato dalla somma di sei numeri $1+1+1+1+1+1$; nel secondo, ov' è $t'^4.t'' = t'.t'.t'.t'.t''$, il 6 è formato dalla somma di cinque numeri $1+1+1+1+2$; nel terzo, ove sono $t'^3.t'''$, $t'^2.t''^2$, il 6 è formato dalla somma di quattro numeri, cioè $1+1+1+3$, $1+1+2+2$; nel quarto il 6 è composto dalla somma di tre numeri; nel quinto da due; nel sesto finalmente da uno; e dove gl' indici sono ripetuti, cioè dove si forma una potenza dell' esponente p, il termine corrispondente è diviso per $1.2.3...p$.

8.

Verificata questa legge in una data formola, essa avrà luogo necessariamente nella formola susseguente. Poichè, se sono dati tutti i modi, nei quali con m numeri si può formare n, per dedurne i modi, nei quali con m numeri si può comporre $n+1$, conviene accrescere in quelli di una unità il più alto dei numeri componenti, ed il numero prossimamente inferiore, quando vi si trova. Ora a questa operazione si riduce la regola del n.° 5, la quale ci prescrive, che nel passaggio da una data formola alla seguente si aggiunga in ciascun termine un apice alla lettera t d' indice massimo, e a quella d' indice prossimamente inferiore al massimo; e si divida poi per l' esponente delle nuove potenze, che ne nascono.

9.

9.

Se adesso riflettiamo, che nelle formole precedenti si deve fare $x = 0$, nel qual caso t, t', t'', &c. diventano rispettivamente b, b' b'', &c., avremo in generale

$$\frac{d^p.t^r}{1.2..p\,dx^p} = \frac{d^p.b^r}{db^p}.\frac{b'^p}{1.2...p} + \frac{d^{p-1}.b^r}{db^{p-1}}.\frac{b'^{p-2}}{1.2...(p-2)}.b''$$
$$+\frac{d^{p-2}.b^r}{db^{p-2}}\left(\frac{b'^{p-3}}{1.2..(p-3)}.b''' + \&c.\right) + \frac{d^{p-3}.b^r}{db^{p-3}}\left(\frac{b'^{p-4}}{1.2..(p-4)}.b^{\prime v} + \&c.\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{d.b^r}{db}.b^{(p)},$$

ove il termine $\frac{b'^{p-3}}{1.2..(p-3)}.b''' + \&c.$ si deve intendere, che contenga tutti i prodotti corrispondenti alle diverse maniere, nelle quali si può formar p con la somma di $p-2$ numeri; e così degli altri. La formola precedente ci dà il coefficiente di x^p nel polinomio $b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \&c.$ elevato alla potenza r.

10.

Sostituendo adunque i valori trovati in quello di $\frac{d^n\,\varphi.(a + bx + b'x^2 + b''x^3 + \&c.)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,n\,dx^n}$ avremo finalmente il coefficiente di x^n nella evoluzione della formola $\varphi.(a + bx + b'x^2 + \&c.)$ così espresso:

$$\frac{d^n\varphi.a}{1.2..n\,da^n}.b^n + \frac{d^{n-1}.\varphi.a}{1.2..(n-1)da^{n-1}}.\frac{d.b^{n-1}}{db}.b'$$
$$+\frac{d^{n-2}.\varphi.a}{1.2..(n-2)da^{n-2}}\left(\frac{d^2.b^{n-2}}{db^2}.\frac{b'^2}{2} + \frac{d.b^{n-2}}{db}.b''\right) \qquad \text{(C)}$$
$$+\frac{d^{n-3}.\varphi.a}{1.2..(n-3)da^{n-3}}\left(\frac{d^3.b^{n-3}}{db^3}.\frac{b'^3}{1.2.3} + \frac{d^2.b^{n-3}}{db^2}.b'b'' + \frac{d.b^{n-3}}{db}.b'''\right)$$
$$+\frac{d^{n-4}.\varphi.a}{1.2..(n-4)da^{n-4}}\left\{\begin{array}{l}\frac{d^4.b^{n-4}}{db^4}.\frac{b'^4}{1.2.3.4} + \frac{d^3.b^{n-4}}{db^3}.\frac{b'^2}{2}b'' \\ +\frac{d^2.b^{n-4}}{db^2}\left(b'b''' + \frac{b''^2}{2}\right) + \frac{d.b^{n-4}}{db}.b^{\prime v}\end{array}\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{d.\varphi.a}{da}.b^{(n-1)}.$$

ove il coefficiente del termine $\frac{d^{n-q}.\varphi.\alpha}{1.2..(n-q)dx^{n-q}}$ sarà generalmente $\frac{d^q.b^{n-q}}{db^q}\cdot\frac{b'^q}{1..q}+\frac{d^{q-1}.b^{n-q}}{db^{q-1}}\cdot\frac{b'^{q-2}}{1.(q-2)}b''+\frac{d^{q-2}.b^{n-q}}{db^{q-2}}\left(\frac{b'^{q-3}}{1..(q-3)}b'''+\&c.\right)+\frac{d^{q-3}.b^{n-q}}{db^{q-3}}\cdot\left(\frac{b'^{q-4}}{1.2..(q-4)}b^{\text{iv}}+\&c.\right)\ldots$
$\ldots+\frac{d.b^{n-q}}{db}.\beta^{(q)}$.

11.

La formola ritrovata (C) è di un grandissimo uso in molte ricerche, le quali possono ridursi al ritrovamento del coefficiente di x^n nello sviluppo della funzione di un polinomio. Per darne un esempio prendiamo a cercare il differenziale n.*esimo* di una funzione qualunque di x nella ipotesi di dx variabile. Si consideri x come funzione di una nuova variabile t, e sia proposto di differenziare la funzione $\varphi.x$ per rapporto a t. Ponendo $t+i$ in luogo di t, la funzione $\varphi.x$ pel Teorema di Taylor diventerà

$$(1)\qquad \varphi.x+\frac{d.\varphi.x}{dt}i+\frac{d^2\varphi.x}{2dt^2}i^2+\frac{d^3\varphi.x}{2.3dt^3}i^3+\&c.$$

Ma pel medesimo teorema la quantità x, allorchè vi si pone $t+i$ in luogo di t, si cangia in

$$x+\frac{dx}{dt}i+\frac{d^2x}{2dt^2}i^2+\frac{d^3x}{2.3dt^3}i^3+\&c.,$$

e per la medesima sostituzione la funzione $\varphi.x$ diventa

$$(2)\qquad \varphi.\left(x+\frac{dx}{dt}i+\frac{d^2x}{2dt^2}i^2+\frac{d^3x}{2.3dt^3}i^3+\&c.\right).$$

Dovendo pertanto essere identici i due risultati (1) e (2), sarà $\frac{d^n\varphi.x}{1.2..ndt^n}$ coefficiente di i^n nella serie (1) eguale al coefficiente di i^n nello sviluppo della serie (2); il qual coefficiente ci verrà dato dalla formola (C), se vi faremo $\alpha=x$, $b=\frac{dx}{dt}$, $b'=\frac{d^2x}{2dt^2}$, $b''=\frac{d^3x}{2.3dt^3}$, &c. Trovato il valore di $\frac{d^n\varphi.x}{1.2...ndt^n}$ basterà moltiplicarlo per $1.2.3 \ldots n dt^n$ per ottenere il differenziale $n.^{esimo}$ della funzione $\varphi.x$ preso nella ipotesi di dx variabile.

12.

Un metodo simile a quello usato nella soluzione del problema del n.° 1 può applicarsi allo sviluppo in serie delle funzioni di polinomj di più variabili. Mi astengo dal trattenermi in una tale applicazione, la quale dopo le cose dette non può incontrare alcuna difficoltà, perchè l' unico oggetto propostomi in questa Memoria è stato quello di accennare, come senza caricarci la mente di nuovi principj e nuovi modi di considerare lo stato variato delle quantità, troviamo nel Calcolo Differenziale i sussidj necessarj alla soluzione di tutti i problemi relativi allo sviluppo delle funzioni in serie.

OPPOSIZIONI DI HERSCHEL

OSSERVATE

Dal Sig. Vincenzo Chiminello

Ricevute il dì 10 *Febbrajo* 1806.

1789. 22 Genn. App. di ζ di Polluce al Murale 10^h 28′ 42″, 4 t. v. } Diff. di Decl.
del Pianeta . . . 11 57 49 , 8 } 0° 42′ 1″,8 A.

23 . . . . . di ζ . . . . 10 24 33 , 8 } 0 41 24 ,8
del Pianeta . . . 11 53 30 , 5 }

A. R. di ζ dal Catal. De la Caille ridotta all' appar. 102° 54′ 16″, 7
La sua Declinazione . . . . 20 51 50 , 8
Quindi ai 22 Genn. la Long. geoc. del Pianeta 4^s 2° 48′ 24″, 4. Lat. 0° 37′ 29″, 2 B.
ai 23 . . . . 4 2 45 43 , 2 0 37 29 , 6

22 Long. del Pianeta 4 2 48 24 , 4. Long. del ☼ in quell' istante dalle Tavole
Nut. . . . . . — 12 , 0. De la Lande 2.^{a} Ediz. 10^s 3° 30′ 0″, 0
Aberr. . . . . — 15 , 9. Long. del Pian. corr. 4 2 47 56 , 5
Long. corr. 4 2 47 56 , 5. Dist. dall' Oppos. passata 42 3 , 5

Movimento orario del Pianeta . . . . 7″, 18
Movim. del ☼ secondo le Tav. . . . . . 2 32 , 60
Movimento composto . . . . 2 39 , 78
Quindi risulta l' istante dell' oppos. ai 21 seguito a 20^h 10′ 13″, 2 t. v.
Nel qual istante la Longit. helioc. di Herschel ... 4^s 2° 49′ 51″, 2
La Lat. helioc. . . . . 0 35 30 , 6.

1790. 28 Gen. App. di δ del Cancro al Murale 11 45 44, 7 t. v. } Diff. di Declinazione
del Pianeta . . . . . ·53 5, 5 } 0° 9′ 46″, 2 B.

31 di δ . . . . 33 30 , 0 } 0 11 44 , 7
del Pianeta . . . . . 40 18 , 65 }

Quindi per l' A. R. di δ dallo stesso catalogo, e ridotta
ai 28 A. R. del Pianeta 130° 2' 12", 8 Declinazione 19° 4' 46", 75 B.
31 . . . . 129 54 10, 0 19 6 44, 75
Corrisp. Longit. geoc. . . . 4ˢ 7° 26' 38" Latit. geoc. 0° 40' 13", 65 B.
4 7 18 46 0 40 40, 60

28 Long. del Pianeta . . . 4ˢ 7° 26' 38", 0. Long. del ☼ per le Tav. in quell'istante
Nutaz. . . . . — 11, 5 10ˢ 9° 20' 42", 0
Abber. . . . . — 16, 0. Long. del Pian. 4 7 26 10, 5
Longit. corr. 4 7 26 10, 5 Dist. dall'Opp. pass. 1 54 31, 5
Movimento del ☼ a 71^{h} 47' 13", 0; corrispon. 3° 2' 1", 0
del Pianeta 7 52, 0
Movimento composto 3 9 53, 0
Quindi risulta accaduta ai 26 l' Opposizione a 16^{h} 36' 58", 2 t. v.
nel qual istante la Long. del ☼ 10ˢ 7° 30' 35", 26, e la helio. del P. 4ˢ 7° 30' 55", 26
La Latit. geoc. 0 39 57, 41 B.
helioc. 0 37 51, 23

1791. 31 Gen. Ap. di δ del Cancro al Murale 11 34 28, 1 t. v. } Diff. di Declinazione
del Pianeta 12 1 10, 2 } 1° 5' 0", 4 A.
1 Febbrajo di δ del Cancro 11 30 24, 8 }
del Pianeta 11 56 56, 6 } 1 4 17, 4
31 per l' A R. di δ A. R. del Pianeta 134° 54' 2", 9 Declinaz. 17° 49' 54", 5 B.
1 Febbrajo 134 51 31, 0 17 50 37, 5
Corrisp. Long. geocent. 4ˢ 12° 13' 25", 8. Latitud. 0° 42' 38", 4 B.
4 12 10 53, 2 0 42 39, 4

31 Longitud. del Pianeta . . 4 12 13 25, 8 Longit. del ☼ in quell' istante per le
Abber. . . . . — 16, 0. Tav. de la Lande 10ˢ 12° 8' 28", 2
Nut. . . . . — 11, 5. Long. del P. corr. 4 12 12 58, 3
Lon. corr. 4 12 12 58, 3 Dist. dall' Oppos. 4 30, 1
Movimento orario del ☼ 2' 32", 0
del P. 6, 38
Movimento composto 2 38, 38
Quindi ai 31 l' istante dell' Opposiz. a 13^{h} 43' 29", 7 t. v.

nel qual istante la Long. helioc. del Pian. da quella del ☼ 4' 12° 12' 47", 45
la Latit. helioc. . . . . 0 40 24 , 33 B.

1792. 5 Febbrajo App. di γ di Polluce al Murale 9^h 8' 32", 3 t. v. } Diff. di Declinaz.
del Pianeta . . . . 12 0 51 , 5 } 0° 5' 1",0 A. dub.

6 . . . . . di γ di Poll. 9 4 32 , 0 }
del Pianeta . . . . . . 11 56 41 , 8 } 0 4 10, 0-buona

Long. del ☼ conclus. da γ del C. Magg.		Long. del P. da γ di Poll.	Latitudine
5 Febbrajo	10' 16° 28' 3" , 7	4' 16° 55' 37" , 0	0°43'56", 0 B.
6	10 17 28 51 , 1	4 16 52 58 , 0	0 43 54 , 7 —

Quindi il movimento orario del Sole 2' 32", 0
del Pianeta 6 , 625
il movimento composto . . . 2 38 , 625

ai 5 Long. del Pian. 4 16 55 37 , 0 . Longitudine del ☼ in
Aberr. . . . . — 16 , 0 quell' istante 10' 16° 58' 30", 55
Nutaz. . . . . — 11 , 0 . Long. del Pianeta 4 16 55 10 , 00
Long. corr. 4 16 55 10 , 0 Dist. dall' Oppos. 3 20 , 55

ai 6. Long. del Pian. 4 16 52 58 , 0 Long. del ☼ in quell'
Aberr. . . . — 16 , 0 istante . . . 10 17 59 6, 25
Nutaz. . . . — 11 , 0 Long. del Pian. 4 16 52 31 , 00
Long. corr. 4 16 52 31 , 0 Distanza dall' Oppos. 1 6 35 , 25

Quindi risulta l'istante dell'Oppos. ai 5 Febbr. primo 10^h 45' 29", 2 t. v.
secondo 10 45 38 , 0
istante medio fra li due conclusi . . . . 10 45 33 , 6
nel qual istante la Long. del ☼ osservata 10' 16° 55' 18", 2
o sia la Long. helioc. del Pianeta . . . . . 4 16 55 18 , 2
e la Latitud. helioc. . . . . 0 41 36 , 5

1794. 17 Febbrajo App. di α del Cancro al Murale 10 40 37 , 9 t. v. } Diff. di Decli
del Pianeta . . . . 11 48 28 , 4 } 0° 51' 33", 2 B

19 . . . . . . di α del Cancro . . . . 10 32 57 , 5 }
del Pianeta . . . . 11 40 28 , 3 } 0 53 19 , 2 -

Differenza di tempo med. tra l' α, ed il Pian. ai 17 = 1^h 7' 50'' , 4
ai 19 = 1 7 30 , 0

A.R. med. di α per il catal. la Call. ai 18 Feb. 131° 48' 12'', 40 Dec. med. 12° 38' 50'', 70
Aberr. + 18 , 48 — 5 , 60
Nutaz. — 10 , 21 — 3 . 16
A. R. App. di α . . . . 131 48 20 , 67 12 38 41 , 94
Quindi l' Asc. R. App. del Pianeta ai 17 = 148 48 38 , 30 Decl. App. 13 30 15 , 10
ai 19 148 43 36 , 90 13 32 1 , 10
E le corrisp. Long. geoc. app. 4 26 17 35 , 5, Latitud. 0 47 8,3 B.
4 26 12 23 , 5 0 47 8,2 —

Onde il movimento orario del Pianeta . . . 6'',52
Il movimento orario del ☼ . . . . 2 31 .13
Movimento composto . . . . 2 37 ,65
Long. del Pianeta ai 17 = 4^s 26° 17' 35'',5 . Long. del ☼ in quell'istante per le Tav.
Nutaz. . . . . + 9 ,2 . noviss. De la Lande 10^s 29° 35' 36'',0
Aberr. . . . . — 15 ,7 . Long. corr. del Pian. 4 26 17 29 ,0
Long. geoc. del Pian. corr. 4 26 17 29 ,0 Dist. dalla pass. Opp. 3 18 7 ,0
E quindi risulta la opp. accaduta ai 14 Febbrajo a 8^h 24' 22'',8 t. v.
Nel qual istante era la Long. del ☼ per dette Tavole 10^s 26° 25' 42'',2
O sia la long. helioc. del Pianeta . . . . 4 26 25 42 ,2
E per il suo proprio moto . . . . 4 26 25 40 ,5
La Latitud. helioc. . . . . 0 44 33 ,7

1795. 25 Febbr. App. di α del Lion al Murale 11 21 17,0 t. v. } Differ. di declinaz.
del Pianeta . . . . 11 36 50,1 } 1° 3' 3'',5 A.
3 Marzo di α del Lion . . . 10 58 46,2 }
del Pianeta . . . . 11 13 20,5 } 0 57 54 ,5 —

N.B. giorni o piovosi , o nuvolosi molto e prima , e dopo l' opposizione

A. R. di α del Lione per il Catalog. de la Caille
tenuto conto del moto proprio . 25 Febbr. = 149° 21' 41'',5 Decl. 12° 58' 5'',0
Aberr. . . . . + 18 ,8 — 6 ,7
Nutaz. . . . . — 14 ,1 + 1 ,9
A. R. App. di α . . . . 149 21 46 ,2 12 58 0 ,2

Quindi l' A. R. del Pianeta ai 25 Febbrajo 153 15 41 ,0 . Decl. 11 54 56 ,7
3 Marzo 153 0 56 ,6 12 0 5 ,7

Le corrisp. Long. geocentriche . . . . . 5ˢ 0° 54′ 59″,4 Lat. 0°48′31″,2B.
5 0 39 40 ,7 0 48 12 ,6

Movimento retrogrado . . . . . . 15 18 ,7 18 ,6

Ai 25 Febbr. Longit. del Pianeta 5ˢ 0° 54′ 59″,4 . Long. del ☼ conclusa da detta
Aberr. . . . . . . — 15 ,2 stella per quell'ist. 11ˢ 7°23′51″, 0
Nut. . . . . + 13 ,5 Aberr. . . . . . — 20 , 0
Long. del Pianeta corr. 5 0 54 57 ,7 Long. del ☼ corr. 11 7 22 45 , 0
Long. del Pian. 5 0 54 57 , 7

Dist. dalla pass. Oppos. . . . . 6 6 27 47 , 3
Movimento del ☼ dai 25 Febbrajo ai 3 Marzo . . . . 6 1 55 ,20
Movimento del Pianeta retrogrado nello stesso tempo, ridotto 15 19 ,55
Movimento composto . . . . 6 17 14 ,75

Quindi risulta l' istante dell' oppos. ai 19 Febbrajo a 7^{h} 19′ 40″,0 t. v.

Nel qual istante la Long. del P. conclus. dal suo moto
geocentrica, ed heliocentrica . . . . 5ˢ 1° 10′ 42″,81
La latitudine geocentrica . . . . , . 0 48 50 ,30
heliocentrica . . . . 0 46 15 ,80

1796. 25 Feb. App. di ρ del Lion al Mur. 11^{h} 46′ 39″,4 t.v. Dist. dal vert. 35° 2′43″,3
del Pianeta 11 56 33 ,8 35 16 56 ,7
26 . . . . . di ρ del Lion 11 42 55 ,1 35 2 43 ,0
del Pianeta 11 52 39 ,2 35 16 4 ,4

Quindi l'A. R. del P. per quella del Lion ridotta ai 25 = 158° 0′ 1″,5 Decl. 10° 6′ 51″,5
ai 26 = 157 26 6 ,6 10 7 43 ,5

L' Aberrazion del P. per le Tav. in A. Retta . . . . . — 18,9 in Decl. + 6 ,7
La Nutazione . . . . + 15,3 — 4 ,9

E si concludono le due Long. geocentr. 5ˢ 5° 54′ 19″,7 le due Latit. 0° 48′ 59″ ,0 B.
5 5 51 33 ,4 0 48 50 ,5

La Long. del ☼ per le Tav. nell'ist. dell'Osserv. dei 25 = 11ˢ 7° 8′ 55″, 3
La Longitudine del Pianeta . . . . 5 5 54 19 , 7
Dist. del Pian. dall' Oppos. già passata . . . . . . 1 14 35 , 6

Il movimento orario del Pian. dalle due Long. risulta . .	6 ,95	
Il movimento orario del ☉ secondo le Tavole	2 30 ,60	
Dai quali il composto movimento	2 37 ,55	
Onde risulta l'istante dell'oppos. ai 24 Febbr. a	7ʰ 26′ 23″, 5	t. v.
Nel qual istante la Long. del ☉ secondo le Tav.	11ˢ 5° 57′ 27″,20	
del Pian. helioc.	6 5 57 27 ,20	
e secondo il suo moto	6 5 57 37 ,63	
La latitudine geocentrica	0 49 9 , 0	
heliocentrica	0 46 35 , 6	

PROBLEMA GRAFICO

Del Sig. Giuseppe Tramontini

Presentato dal Sig. Antonio Cagnoli *il dì* 27 *Febbrajo* 1806.

In parecchi opuscoli dedicati all' istruzione dei giovani coltivatori del Disegno trovai con vario metodo, ma egualmente inesatto, esposta la risoluzione di quel problema, in cui si tratta di descrivere la figura dell' ombra che, esponendo una nicchia ai raggi del sole, si produce nella superficie concava della sua volta.

L' uso frequentissimo di tal problema ne' Disegni architettonici, l'attinenza sua co' principj della stereotomia, mi parvero sufficienti motivi per offrire agli studiosi una risoluzione esatta, ed inoltre estesa a tutti i casi ne'quali la superficie della Volta sia di quelle che si generano per la rotazione di una curva conica d' intorno al proprio asse.

Per ridurre il quesito a puri termini geometrici, è d'uopo osservare che essendo dato un emisferio concavo esposto a' raggi del sole, tutti quelli che passano per la circonferenza del circolo, che forma l' orlo dell' emisferio, supponendosi fisicamente paralleli fra di loro, sono costituiti in una medesima superficie cilindrica, la cui base è la mentovata circonferenza, ed il cui lato generatore è una retta parallela a qualunque de' supposti raggi solari. Adunque tutti i raggi che passano per l' orlo, ed incontrano la superficie dell' emisferio, la incontrano appunto in quella linea che è la scambievole intersezione delle due superficie cilindrica, ed emisferica, e quella linea stessa determina il contorno dell' ombra.

Ora in luogo dell' emisferio, sostituiscasi la metà della superficie generata per la rotazione d' una curva conica d' intorno al proprio asse, e tal metà sia quella che nasce dividendo la superfificie intera con un piano che passi per l' asse. Si chiami cilindrica quella superficie, dove sono costituiti tutti i raggi solari che passano pel perimetro della supposta sezione per l' asse, e tutti incontreranno la proposta superficie concava in quella linea che è comune intersezione fra la superficie stessa, e la superficie cilindrica. Per tanto il problema considerato in quest' aspetto si presenta ne' seguenti termini.

Determinare l' intersezione scambievole tra la superficie generata dalla rotazione d' una curva conica intorno al proprio asse, ed una superficie cilindrica di cui sia base la stessa curva generatrice della superficie di rotazione.

L'esame di questo problema conduce a conoscere che la cercata intersezione è sempre una curva conica della medesima specie che la generatrice della superficie di rotazione.

Tale è il risultato delle seguenti proposizioni che formano la prima parte del presente ragionamento. La seconda parte conterrà le applicazioni alla pratica del disegno.

PARTE I.

§. 1. Se in una sezion conica GAD (Fig. 1) siano quante corde si voglia GH, EF fra di loro parallele, e segate da altre AB, CD pure fra di loro parallele; i rettangoli contenuti dai segamenti corrispondenti delle prime, e delle seconde sono proporzionali.

Siano I, L, K, M i punti delle intersezioni; dico essere il rettangolo AIB al rettangolo CLD come il rettangolo EIF al rettangolo ELF, e così il rettangolo AIB al rettangolo CKD, come il rettangolo EIF al rettangolo GKH, e similmente si dica degli altri contenuti dai segamenti che si formano intorno a due altri dei dati punti I, L, M, K. (*a*)

§. 2.

(*a*) Apoll. Con. Lib. III. pr. XVII.
Grandi Con. pr. XVII.
Cagnoli Con. pr. (XXVI, LXX. cor. VI, CVI cor. V).

§. 2. Se quante corde si vogliano AB, CD nella parabola, fra loro parallele siano segate da diametri FN, HP in O, R, N, P, i rettangoli AOB, ARB, AND, APD che si formano dai segamenti delle corde sono proporzionali ai corrispondenti segamenti, FO, HR, FN, HP dei diametri intercetti fra la curva e le corde segate. (*b*)

§. 3. Se nell' iperbole PNQ (Fig. 2) siano quante corde si voglia RS, PQ fra di loro parallele e segate da una retta TZ parallela ad un assintoto dell' iperbole, le parti TV, TZ della secante intercette fra la curva, e le corde segate, sono proporzionali ai rettangoli RVS, PZQ contenuti dai corrispondenti segamenti delle corde stesse.

Pel centro C s' intenda condotto il diametro CN, che tagli per mezzo col suo prolungamento in G ed X le corde proposte. Per T sia condotta una retta TO parallela a CN, e prodotta fino ad incontrare in O l' iperbole opposta, ed in L, K le date corde. Per N sia condotta fino ad incontrare in M l' assintoto CM la NM parallela alle corde stesse. Saranno simili i triangoli CNM, TLV, TKZ. E perchè il rettangolo TLO al rettangolo RLS (*c*) sta come il quadrato dalla CN a quello dalla MN, o come quello dalla TL a quello dalla LV, sarà permutando, e dividendo, il rettangolo OTL al quadrato dalla TL come l' eccesso del rettangolo RLS sopra il quadrato della LV allo stesso quadrato. Permutando di nuovo sarà il rettangolo OTL all' eccesso del rettangolo RLS sopra il quadrato dalla LV come il quadrato dalla TL a quello dalla LV, cioè come il quadrato dalla TK a quello dalla KZ. Ma nella medesima ragione si dimostra similmente essere il rettangolo OTK all' eccesso del rettangolo PKQ sopra il quadrato dalla KZ; dunque il rettangolo OTL al rettangolo OTK, cioè la TL alla TK sta come l' eccesso del rettangolo RLS sopra il quadrato dalla LV all' eccesso del rettangolo PKQ sopra il quadrato dalla KZ, ovvero come il rettangolo RVS con insieme il doppio rettangolo

VLG

(*b*) Grandi Con. pr. XI e coroll.

(*c*) Apoll. Con. lib. III pr. XXII.

VLG al rettangolo PZQ con insieme il doppio rettangolo ZKX. Di più, il doppio rettangolo VLG al doppio rettangolo ZKX sta come VL a ZK, cioè come TL a TK. Adunque il rettangolo RVS con insieme il doppio rettangolo VLG sta al rettangolo PZQ con insieme il doppio rettangolo ZKX come il doppio rettangolo VLG al doppio rettangolo ZKX, e quindi come il solo rettangolo RVS al solo rettangolo PZQ, cioè il primo di questi rettangoli sta al secondo come TL a TK o come TV a TZ.

§. 4. Nell' iperbole PNQ (Fig. 2) siano quante rette si voglia TZ, ΔI parallele ad un assintoto CM, segate da una corda PQ in Z, I, e dai punti T, Δ dove le date rette parallele incontrano la curva, sian condotte parallele all' altro assintoto CD le TB, ΔA fino ad incontrare l'assintoto CM. Il rettangolo contenuto da una delle date rette parallele TZ, e dalla corrispondente TB, intercetta fra la stessa TZ, e l' assintoto CM, sta al rettangolo contenuto da un' altra ΔI e dalla corrispondente ΔA intercetta fra la stessa ΔI e l'assintoto CM, come il rettangolo PZQ che si comprende dai segamenti della corda corrispondenti alla prima TZ al rettangolo PIQ contenuto dai segamenti corrispondenti alla seconda ΔI.

Pongasi condotta per I la IY parallela all' assintoto CD fino ad incontrare in Y l' assintoto CM, segando in E la curva, ed in V la TZ. Per V sia condotta la corda RS parallela alla PQ. Saranno eguali le ΔA, YI, le BY, TV, le AY, ΔI, le TB, YV. In oltre per essere la CY alla CA come la AΔ o pure la IY alla EY (*d*), sarà la CY alla AY come la IY alla EI, e perciò il rettangolo dalle CY, EI eguaglierà il rettangolo dalle AY, YI, cioè quello dalle ΔI, ΔA.

Similmente si dimostrerà essere il rettangolo dalle CY, EV eguale a quello dalle BY, VY, cioè a quello dalle TV, TB. Adun-

---

(*d*) Apoll. lib. II pr. XII.
Grandi pr. XL.
Cagnoli pr. CVIII cor. VI.

que il rettangolo dalle TV, TB al rettangolo dalle ΔI, ΔA sta come il rettangolo dalle CY, EV a quello dalle CY, EI, cioè come la EV alla EI. Ma il rettangolo dalle TZ, TB a quello dalle TV, TB sta come TZ a TV; dunque il rettangolo dalle TZ, TB a quello dalle ΔI, ΔA sta nella ragione composta dalle ragioni di TZ a TV e di EV ad EI.

Ora per le cose dimostrate nel n.° precedente, il rettangolo PZQ al rettangolo RVS sta come TZ a TV, e il rettangolo RVS al rettangolo PIQ sta come EV ad EI. Adunque il rettangolo PZQ al rettangolo PIQ sta nella ragione composta dalle ragioni di TZ a TV e di EV ad EI, cioè come il rettangolo dalle TZ, TB a quello dalle ΔI, ΔA.

§. 5. Siano quante ellissi, o iperbole si voglia NH, Fh (Fig. 3 e 2), simili, concentriche in C, poste cogli assi omologhi Nn, Ff nella medesima retta Nn. Se dalle estremità degli assi omologhi partano altrettante rette fra di loro parallele, le quali seghino le curve corrispondenti in H, h, H', h' tutti questi punti d' intersezione sono in una medesima retta, che passa pel centro comune C di tutte le proposte ellissi, o pure iperbole.

Siano condotte pei punti H, h le Hx, hX semiordinate agli assi rispettivi. Saranno simili i triangoli NHx, FhX. Siano M', N', m', n' gli assi conjugati delle proposte curve, i quali per ipotesi saranno in una medesima retta M' N' perpendicolare in C alla Nn.

Poichè il rettangolo Nxn al quadrato dalla Hx sta come il quadrato dalla NC a quello dalla CM (§. 1), o pure come il quadrato dalla FC a quello dalla Cm' e quindi come il rettangolo FXf al quadrato dalla hX, sarà il rettangolo Nxn al rettangolo FXf come il quadrato dalla Hx al quadrato dalla hX, cioè come il quadrato dalla xN a quello dalla XF. Perciò sarà il rettangolo Nxn al quadrato dalla Nx come il rettangolo FXf al quadrato dalla FX, e quindi la Nx alla xn come la FX alla Xf, e per conseguenza la metà dell' eccesso di xn sopra xN sta ad xN come la metà dell' eccesso di Xf sopra XF sta ad XF, cioè Cx sta ad xN come CX ad XF. Permutando adunque, sta Cx a CX come xN ad XF, cioè come Hx ad hX, e perciò i punti H, h, C sono in una medesima retta, nella quale similmente si dimostrerà che debbono giacere i punti H', h' che sono negli altri rami delle elissi proposte (Fig. 3), o nelle opposte iperbole (Fig. 2).

§. 6. La projezione d' un' iperbole è un' iperbole, quella d' una parabola è una parabola, quella d' un' elisse è un' elisse o un circolo, e parimenti quella d' un circolo è un circolo o un' elisse.

Prescindendo dal caso, in cui sia perpendicolare il piano della data curva obbjettiva a quello della projezione, nel qual caso la projezione è una retta linea, egli è evidente che se il piano della data curva obbiettiva sia parallelo al piano della projezione, questa è una curva eguale e simile alla obbjettiva proposta. Ora siano scambievolmente fra loro inclinati i due piani. Si concepisca quella retta, nella quale essi piani si tagliano, ed assumasi come asse delle ascisse comune alla obbiettiva, ed alla sua projezione. Se intendansi condotte delle ordinate alla obbiettiva, e descritte le corrispondenti loro projezioni, queste saranno ordinate della curva che è projezione dell' obbiettiva proposta. In oltre tutte le ordinate della obbiettiva alle corrispondenti ordinate della projezione avranno una ragione costante, la quale dipende dall' angolo d' inclinazione che forman fra loro i due piani. Adunque essendo comune l' asse delle ascisse per la curva obbiettiva, e per la sua projezione, le ordinate della prima sono proporzionali alle ordinate corrispondenti della seconda. Applicato questo principio a ciascun caso particolare, l'enunciato teorema diviene evidente.

§. 7. Sono tanti circoli, che hanno l' asse comune, quelle sezioni che nascono tagliando con piani fra di loro paralleli un solido generato per la rotazione d' una sezion conica d' intorno al proprio asse, quando questo sia perpendicolare a' piani secanti.

La proposizione è per se stessa evidente.

§. 8. Sono tante elissi tutte fra loro simili quelle sezioni che nascono tagliando una sferoide con piani fra loro paralleli, ed obbliqui all' asse dell' elisse, per la cui rotazione si genera la sferoide, de, ed in un medesimo diametro della stessa elissi generatrice giacciono i centri di tutte le sezioni (*f*).

§. 9. Sono tante ellissi, tutte simili fra di loro, le sezioni che nascono tagliando con piani fra lor paralleli una conoide parabolica, o iperbolica, purchè i piani secanti siano obbliqui all' asse della stessa conoide, e se questa sia iperbolica, il cono assintotico sia segato tutto dalla medesima parte del vertice, cioè da quella, dov' è costituita la conoide (*g*).

§. 10. Sono tutte parabole di egual parametro quelle sezioni che nascono tagliando una conoide parabolica con piani paralleli ad uno che passa per l' asse della conoide (*h*).

§. 11. Sono tante iperbole, tutte simili fra loro quelle sezioni che nascono tagliando una conoide iperbolica con piani paralleli ad uno, che passi per un diametro dell' iperbole per la rotazione della quale si genera la conoide. I centri poi di tutte le sezioni sono nella medesima retta, in cui giace il diametro conjugato di quello, per cui passa il piano parallelo a tutti i piani secanti.

S' intenda condotto per l' asse un piano PNQ (Fig. 4) perpendicolare a tutti i piani secanti. La sezion fatta da questo piano nella superficie della conoide sia l' iperbole PNQ, e le sezioni fatte dal piano stesso ne' piani secanti saranno altrettante rette come RA*a* parallele ad un diametro, che supporremo essere *o*CO, posto in C il centro dell' iperbole PNQ. All' asse N*n* della medesima s' intendano condotte perpendicolari le corde KL, PQ, le quali seghino in M, R la AR, e per esse corde passino altrettanti piani perpendicolari al piano PNQ, e secanti la conoide.

Le sezioni per KL, PQ sono circoli, ed i loro diametri corrispondenti sono le stesse KL, PQ, le quali divideranno per mezzo qualunque corda dei circoli stessi, che sia perpendicolare al piano

---

(*f*) Archim. de Conoid. et Sphæroid. pr. XV.

(*g*) Iv. pr. XIII, XIV, XV.

(*h*) Iv. Torelli in Comm. pr. XII

no PNQ. Ora le intersezioni dei piani secanti per KL, PQ, con quello per AR, passano l'una per M, l'altra per R, ed ivi sono perpendicolari al piano PNQ. Perciò le loro porzioni intercette fra le circonferenze de' rispettivi circoli sono divise per mezzo in M, R. Ma quelle rette stesse sono doppie ordinate comuni alle sezioni per KL, PQ, ed alla sezione per AR: dunque nella AR è l'asse della sezione fatta nella conoide dal piano secante per la stessa AR. Accada in *a* l'incontro della AR coll' iperbole opposta, e sarà il rettangolo AM*a* al rettangolo AR*a* come il rettangolo KML al rettangolo PRQ (*i*), cioè come il quadrato della semiordinata in M a quello della semiordinata in R. Adunque la sezione per AR è un' iperbole, e così potrà conchiudersi d' ogn' altra sezione ad essa parallela. L' intercetta poi A*a* fra le iperbole opposte è l' asse traverso della sezione per AR, e conducendo per C il diametro conjugato di O*o*, considerato questo come diametro dell' iperbole PNQ, quel diametro conjugato, se prolunghisi indefinitamente, dividerà per mezzo la A*a*, e così pure ogn' altra ad essa parallela che sia l'asse d' una sezione parallela a quella per A*a*. Adunque una medesima retta linea, in cui giace il diametro conjugato corrispondente al diametro traverso O*o* dell' iperbole PNQ, passa per tutti i centri delle sezioni parallele a quella per O*o* o per AR.

Finalmente sia la PQ tagliata in S dal prolungamento della O*o*. Per la testè citata proposizione il rettangolo OS*o* al rettangolo PSQ sta come il rettangolo AR*a* al rettangolo PRQ. Quindi considerate le O*o*, A*a* come assi delle sezioni fatte nella conoide dai piani per OS, ed AR, sarà il rettangolo OS*o* al quadrato della semiordinata in S come il rettangolo AR*a* al quadrato della semiordinata in R, e per essere iperbole le sezioni per OS, AR, sta il rettangolo OS*o* al quadrato della semiordinata in S come il quadrato della O*o* considerata come asse della sezione per OS al quadrato del suo asse conjugato. Nella stessa ragione, per le co-

se

(*i*) Apoll. Con. lib. III p. XII.

se precedentemente dimostrate si prova essere il quadrato della Aa considerata come asse della sezione per AR al quadrato del suo asse conjugato. Adunque le sezioni per OS, AR, ed altre ad esse parallele hanno gli assi omologhi proporzionali, e però quelle sezioni sono tutte simili fra loro.

§. 12. Se una conoide iperbolica sia tagliata da piani paralleli ad uno che tocchi il cono assintotico, le sezioni sono tante parabole, i parametri delle quali sono proporzionali alle distanze de' loro piani da quello che tocca il cono assintotico.

Segando la conoide con un piano per l'asse, e perpendicolare ai piani seganti, sia l'iperbole PNQ (Fig. 2) la sezione che nasce nella superficie della conoide. Siano le rette CD, CM le sezioni che nascono nella superficie del cono assintotico, le quali per conseguenza saranno assintoti dell' iperbola PNQ. Le ΔI, TZ parallele alla CM siano le intersezioni dei piani secanti col piano PNQ, e la CM sarà l'intersezione del piano stesso col piano tangente il cono assintotico. Dico primieramente essere parabole tutte le sezioni fatte nella conoide dai piani condotti per le TZ, ΔI, e perpendicolari al piano PNQ; in secondo luogo essere i parametri di tali sezioni proporzionali alle distanze de' piani stessi da quello che passa per la CM ed ivi tocca il cono assintotico, le quali distanze eguagliano quelle delle TZ, ΔI dalla CM.

Imperciocchè siano le corde RS, PQ perpendicolari all' asse dell' iperbole PNQ, e per esse passino altrettanti piani perpendicolari allo stesso PNQ e secanti la conoide. Le RS, PQ saranno diametri dei circoli che nascono per tali sezioni, e le corde dei circoli stessi che passano per V, Z, I e sono perpendicolari al piano PNQ, saranno divise per mezzo nei medesimi punti, e saranno inoltre doppie ordinate comuni ai circoli dei diametri SR, PQ, ed alle sezioni per ΔI, TZ. Adunque le ΔI, TZ sono assi delle corrispondenti sezioni, i vertici delle quali sono Δ, T. Si è poi dimostrato essere come VZ a TV, così il rettangolo PZQ al rettangolo RVS, cioè il quadrato della semiordinata in Z a quello della semiordinata in V. Adunque la sezione per TZ è parabola, e similmente si potrà dimostrare di qualunque altra sezione parallela a quella per TZ .

Ora pei punti Δ, T ove le ΔI, TZ incontrano la curva , sian condotte le Δa , Tb normali alla CM in a , e b , e le ΔA , TB parallele all' altro assintoto CD . Saranno le Δa , Tb proporzionali alle ΔA , TB , e però come il rettangolo dalle ΔI , ΔA al rettangolo dalle TZ , TB , così il rettangolo dalle ΔI , Δa al rettangolo dalle TZ , Tb . Ma come il rettangolo dalle ΔI , ΔA al rettangolo dalle TZ , TB , così il rettangolo PIQ al rettangolo PZQ (§. 4), cioè il quadrato della semiordinata in I nella sezione per ΔI al quadrato della semiordinata in Z nella sezione per TZ ; e per essere parabole quelle sezioni , il quadrato della semiordinata in I nella prima sezione al quadrato della semiordinata in Z nella seconda sta come il rettangolo dalla ΔI e dal parametro della prima sezione al rettangolo della TZ e dal parametro della seconda . Adunque come il rettangolo dalle ΔI , Δa al rettangolo dalla TZ , Tb , così il rettangolo dalla ΔI e dal parametro della prima sezione al rettangolo dalla TZ e dal parametro della seconda . Laonde si deduce essere i parametri delle sezioni per TZ , ΔI proporzionali alle Tb, Δa .

§. 13. Se in un piano perpendicolare a quella retta che passa pei centri di tutte le sezioni ellittiche , le quali nascono nel modo definito ai §§. 8 , 9 , siano descritte le projezioni delle sezioni stesse , quelle projezioni se non siano circoli saranno altrettante elissi , concentriche , poste cogli assi omologhi in una medesima retta , e tutte fra loro simili .

Che le projezioni delle ellissi obbiettive siano ellissi , o circoli , ciò apparisce dal §. 6 . Ora rappresenti GAD (Fig. 1) la curva che nasce nella superficie del solido , tagliato da un piano GAD per l' asse , e perpendicolare ai piani paralleli che segano il solido stesso . Siano EF , GH le intersezioni di quel piano coi piani secanti il solido , e per conseguenza le EF , GH saranno assi delle corrispondenti sezioni . I punti I , K siano i centri rispettivi . Le projezioni di quei centri cadranno tutte nel punto , ove la retta che passa per I , K incontra il piano di projezione .

ne. Rappresenti C quel punto (Fig. 3). Gli assi primarii delle elissi obbiettive sono tutti nel piano GAD perpendicolare a quello delle projezioni, e perciò le projezioni di tutti quegli assi cadono nella medesima retta ove il piano GAD taglia quello delle projezioni. Rappresenti N*n* quella retta (Fig. 3). Gli assi conjugati corrispondenti agli EF, GH sono perpendicolari, l' uno in I, l' altro in K al piano GAD, ed ivi divisi per mezzo. Adunque sono essi pure costituiti tutti in un medesimo piano che passa per la IK, e perciò nella retta ove il piano che li contiene sega il piano delle projezioni, cadranno tutte le projezioni de' medesimi assi conjugati. Rappresenti M′ N′ cotal retta che passerà per C (Fig. 3). Perchè poi il piano delle projezioni è perpendicolare tanto al piano degli assi, quanto a quello de' conjugati, e questi due piani sono pure tra loro scambievolmente perpendicolari, le rette N*n*, M′ N′ si taglieranno ad angoli retti in C. È finalmente manifesto che le projezioni degli assi primarii EF, GH (Fig. 1) le quali possono essere rappresentate dalle F*f*, N*n* (Fig. 3) sono assi delle elissi F*m*′*f*, N M′*n*, che rappresentano le projezioni delle sezioni per EF, GH: in secondo luogo le F*f*, M*n* (Fig. 3) sono evidentemente proporzionali alle EF, GH (Fig. 1), mentre le projezioni delle ordinate agli assi nelle elissi obbiettive sono parallele ed eguali alle corrispondenti ordinate medesime. Per tanto se M′N′, *m*′*n*′ (Fig. 3) rappresentino gli assi conjugati degli N*n* F*f*, saranno M′N′, *m*′*n*′ rispettivamente eguali agli assi conjugati delle elissi obbiettive, delle quali gli assi primarii sono projettati negli N*n*, F*f*, ed eguagliano le GH, EF (Fig. 1). Adunque essendo come GH ad EF, così l' asse conjugato nella sezione per GH all' asse conjugato nella sezione per EF, e parimenti essendo come GH ad EF così N*n* ad E*f*, sarà pure N*n* ad F*f* come M′N′ ad *m*′ *n*′, e quindi saranno simili le elissi F*m*′*f*, NM′*n*, e similmente dimostrar si potrà di altre sezioni parallele alle prime fatte per EF, GH.

§. 14. Se le sezioni considerate nel caso precedente siano in vece altrettante iperbole secondo ciò che si propone al §. 11, si potrà dimostrare che le projezioni sono iperbole, simili, concencentriche, poste cogli assi omologhi nella medesima retta, senz' altri cangiamenti nella precedente dimostrazione se non che sostituire la Fig. 2 alla Fig. 3, e porre il piano di projezione perpendicolare a quella retta che passa pei centri di tutte le sezioni iperboliche nate nel modo definito al §. 11.

Le loro projezioni saranno rappresentate dalle iperbole NH, Fh, delle quali gli assi rispettivi saranno Nn, Ff, i conjugati corrispondenti M'N', $m'n'$, ed il centro comune C (Fig. 2).

§. 15. Se la superficie d' un solido generato per la rotazione d' una sezion conica d' intorno al proprio asse, sia segata da una superficie cilindrica, la quale abbia per base il perimetro della stessa sezion conica generatrice del solido, l' intersezione delle due superficie sarà una sezion conica della medesima specie che la generatrice del solido.

Rappresenti GAD (Fig. 1) la sezion conica generatrice del solido, ed il suo perimetro sia base d' una superficie cilindrica secante quella del solido stesso. Per una retta parallela alla generatrice della superficie cilindrica s' intenda passare un piano perpendicolare al piano GAD, e paralleli a quel piano siano quanti altri si voglia secanti ad un tempo la superficie cilindrica, e quella del solido. Le sezioni fatte nella prima saranno altrettante rette fra di loro parallele, e le sezioni fatte nella seconda saranno curve, ellittiche, paraboliche, iperboliche, secondo la natura del solido segato, e la posizione dei piani secanti. I punti ne' quali s' incontrano le rette che nascono per le sezioni della superficie cilindrica, e le curve che nascono per le sezioni della superficie del solido, appartengono tutti alla comune intersezione delle due superficie essendo punti comuni all' una, ed all' altra delle superficie medesime.

§. 16. Ora ponghiamo in primo luogo che le sezioni fatte nella superficie del solido siano altrettante ellissi, ed in tal caso le intersezioni dei piani secanti col piano GAD (Fig. 1) siano le EF, GH parallele fra loro e terminate alla curva in E, F, G, H. Le rette stesse saranno assi delle mentovate sezioni, ed i loro estremi ne rappresenteranno i vertici. Le rette nelle quali i piani secanti tagliano la superficie cilindrica passeranno pei punti E, F, G, H. Sia IK il diametro delle EF, GH considerate come doppie ordinate della curva GAD, e sopra di un piano perpendicolare alla IK si concepiscano descritte le projezioni di quelle rette nelle quali la superficie cilindrica è segata dai supposti piani, e le projezioni delle sezioni elittiche fatte nel solido dai piani medesimi. Tali projezioni saranno nel caso considerato al §. 5. Quelle delle sezioni elittiche potranno essere rappresentate dalle ellissi (Fig. 3) NM'n, F$m'f$ e quelle delle sezioni rettilinee posson essere rappresentate dalle NH, Fh tra loro parallele. Quindi i punti H, h d' intersezione tra le rette stesse ed i corrispondenti perimetri elittici saranno projezioni d' altrettanti punti che spettano all'intersezione della superficie cilindrica con quella del proposto solido; ma i punti H, h giacciono in una medesima retta che passa pel centro C: dunque i punti obbiettivi ad essi corrispondenti giacciono in un medesimo piano eretto per la CH perpendicolare al piano di projezione.

Similmente si dimostrerà che la projezione di qualunque altro punto comune alle due proposte superficie giace nella medesima retta HC o nel suo prolungamento. Adunque tutta l'intersezione delle due superficie proposte giace in un piano perpendicolare al piano NM'n e condotto per la retta HC.

Laonde nel caso presentemente considerato l' intersezione delle due superficie è una sezione piana fatta nella superficie del proposto solido per un diametro della sua curva generatrice.

§. 17. È manifesto che se la retta generatrice della superficie cilindrica sia perpendicolare al piano della curva che genera la superficie del proposto solido in quella curva stessa le due superficie invece di tagliarsi saranno scambievolmente a contatto.

§. 18. È del pari evidente che tutte le cose dimostrate supponendo ellittiche le sezioni del solido dai piani per EF, GH (Fig. 1), convengon pure al caso in cui le stesse EF, GH siano perpendicolari all' asse della curva GAD, e quindi le sezioni siano circolari.

§. 19. Rimangono da considerare i casi, ne' quali le sezioni fatte nel solido come si prescrive dal §. 15 riescano paraboliche ovvero iperboliche. L' uno e l' altro dei due casi può intervenire segando la conoide iperbolica. Al secondo di questi casi si applica evidentemente tutto ciò che fu detto nel §. 16, sol che riferiscasi quel discorso alla Fig. 2, considerando le iperbole NH, F*h*, invece delle ellissi indicate dalle medesime lettere nella Fig. 3.

§. 20. Che se nella conoide iperbolica le mentovate sezioni riescano parabole, i parametri di esse sono dimostrati proporzionali alle distanze dei piani delle sezioni dal piano ad esse parallelo, tangente il cono assintotico.

Rappresenti la Fig. 2 tutto ciò che fu indicato nel §. 12, e si concepiscano inoltre le rette, nelle quali i piani secanti per TZ, ΔI tagliano la proposta superficie cilindrica. Queste rette passano per Δ, I ed incontrano in altri punti diversi dai punti Δ, T i perimetri delle corrispondenti sezioni fatte nella superficie del solido dai piani per ΔI, TZ. Ponghiamo che da quei punti dove le sezioni rettilinee della superficie cilindrica incontrano le sezioni paraboliche della superficie conoidale siano condotte le semiordinate agli assi corrispondenti ΔI, TZ delle sezioni stesse, e l' ordinata nella sezione per TZ incontri il suo asse in V, quella della sezione per ΔI incontri il suo asse in I. È manifesto che essendo parallele fra loro le sezioni rettilinee fatte nella superficie cilindrica, riesciranno proporzionali le semiordinate in I e V alle corrispondenti ascisse ΔI, TV.

S' immagini ora un piano perpendicolare all' asintoto CM, e sopra quel piano siano descritte le projezioni delle sezioni paraboliche fatte nella superficie della conoide, e delle sezioni rettilinee fatte nella superficie cilindrica. I piani che contengono queste sezioni essendo tutti paralleli ad uno che passa per la CM, e questa perpendicolare al piano di projezione, saranno tutti normali a questo piano medesimo, e perciò le projezioni delle sezioni paraboliche, e delle cilindriche saranno in quelle rette medesime nelle quali i piani delle dette sezioni incontrano il piano delle loro projezioni. Siano queste rette rappresentate dalle

TX,

T′X, △′Y, (Fig. 5) le quali esser debbono fra di loro parallele.

Perchè il piano PNQ (Fig. 2) è perpendicolare a quello che tocca in CM il cono assintotico, sarà normale ancora a tutti i piani delle sezioni per TZ, ΔI. Il piano poi delle projezioni è normale tanto al piano PNQ quanto ai piani delle sezioni: dunque l' intersezione del piano PNQ col piano delle projezioni sarà perpendicolare alle projezioni stesse T′X, △′Y (Fig. 5), e passerà per la projezione di CM cioè per quel punto dove la stessa CM incontra il piano delle projezioni. Sia quel punto rappresentato in C′ (Fig. 5) e la retta C′T′△′ rappresenti l' intersezione del piano PNQ con quello delle projezioni.

Ciò posto sarà T′ (Fig. 5) la projezione della retta TZ (Fig. 2) che è l' asse della sezione per TZ, e similmente △′ sarà projezione della ΔI (Fig. 2) che è l' asse della sezione per ΔI, quindi C′T′ eguaglierà T*b* e C′Δ′ eguaglierà Δ*a* (Fig. 2).

Finalmente delle ordinate agli assi TZ, ΔI nelle sezioni corrispondenti (Fig. 2) avendo ciascheduna tutti i suoi punti equidistanti dal piano delle projezioni, ed essendo divisa per mezzo dal piano PNQ, le loro projezioni saranno ad esse uguali, e divise per mezzo dalla retta C′T′Δ′. Perciò se T′X, △′Y rappresentino le projezioni delle semiordinate in V ed I (Fig. 2), sarà T′X eguale alla stessa semiordinata in V, e △′Y eguale alla semiordinata in I.

Pertanto (Fig. 2) il quadrato della semiordinata in I nella sezione per ΔI al quadrato della semiordinata in V nella sezione per TZ sta come il rettangolo dall' ascissa ΔI e dal parametro della prima sezione al rettangolo dalla ascissa TV e dal parametro della seconda sezione. Ma si è veduto essere la semiordinata in I alla semiordinata in V come l' ascissa ΔI all' ascissa TV. Dunque il quadrato dalla ascissa ΔI a quello dalla ascissa TV sta come il quadrato dalla semiordinata in I al quadrato dalla semiordinata in V, cioè come il rettangolo dalla ΔI e dal parametro della prima sezione, al rettangolo dalla TV e dal parametro della seconda. Adunque sarà ΔI a TV come il parametro della sezione per ΔI al parametro della sezione per TV, cioè come △*a* a T*b*.

Ma come ΔI a TV, così la semiordinata in I alla semiordinata in V: dunque sarà quella a questa come Δ*a* a T*b*.

Ora passando alla Fig. 5 si conchinderà essere Δ'Y a T'X come Δ'C' a T'C'; e quindi i punti Y, X, C' essere in una medesima retta C'Y. I punti poi Y, X sono projezioni di punti comuni alle due superficie proposte, perciò questi esistono in un piano eretto per la C'Y perpendicolare al piano di projezione. In simil guisa si potrà dimostrare che qualsivoglia altro punto comune alle due proposte superficie ha la sua projezione nella medesima retta C'Y prolungata indefinitamente, e per conseguenza l'intersezione delle due superficie sarà tutta in un medesimo piano eretto per la C'Y perpendicolare al piano di projezione.

Laonde se nella conoide iperbolica le sezioni fatte come si prescrive dal §. 15 riescano iperbole, l' intersezione tra la superficie cilindrica, e quella della conoide sarà una sezion piana fatta nella superficie del solido per un diametro conjugato della sua iperbole generatrice (§. 19). Se poi le sezioni riescano parabole, l' intersezione sopraccennata è pure una sezion piana fatta nella superficie della conoide per un assintoto della sua iperbole generatrice.

§. 21. Nella conoide parabolica le sezioni fatte secondo il §. 15 possono essere o circolari, o elittiche, o paraboliche. Ai primi due casi fu data la conveniente dimostrazione nei §§. 16, 18; quanto all' ultimo, rappresenti GAD (Fig. 1) una sezion piana per l'asse della conoide, e perciò GAD sarà la stessa parabola generatrice della conoide. Le FN, HP, diametri della curva stessa rappresentino le intersezioni del piano GHD coi piani secanti e la conoide, e la superficie cilindrica. Le sezioni della superficie cilindrica passano pei punti H, ed F e vanno ad incontrare le corrispondenti sezioni della superficie conoidale in punti diversi dagli H, F. Da quei punti d' incontro si concepiscano condotte le semiordinate agli assi FN, HP, e pongasi che la semiordinata nella sezione per NF incontri il suo asse NF in N, e la semiordinata nel'a sezione per HP incontri il suo asse HP in Q. Con un ragionamento simile a quello che fu adoperato nel §. precedente si giungerà a conchiudere che la semiordinata in N alla semiordinata in Q sta come il parametro della sezione per NF a quello della sezione per HP. Ma questi parametri sono eguali: dunque eguali pur sono quelle semiordinate, e da ciò si deduce che i punti comuni alle due proposte superficie sono tutti egualmente distanti dal piano GHD, e perciò la intersezione delle medesime, giace in un piano parallelo ad un piano GHD che passa per l' asse della conoide.

§. 22. Raccogliendo ora ciò che fu dimostrato, si conchiude dai §§. 16, 17, 21, che l' intersezione tra la superficie d' una conoide parabolica, ed una superficie cilindrica, della quale sia base la parabola generatrice della superficie conoidale è sempre una parabola il cui parametro eguaglia quello della stessa generatrice, ed il cui piano è parallelo ad uno che passa per l' asse della conoide. Dai §§. 16, 17 apparisce che l' intersezione tra la superficie d' una sferoide, ed una superficie cilindrica, di cui sia base l' ellisse generatrice della superficie sferoidale è sempre un' ellisse concentrica alla stessa generatrice. Le citate dimostrazioni sono pure applicabili al caso in cui sia sostituita una sfera alla considerata sferoide, ed è facile vedere che la mentovata intersezione è un circolo massimo della supposta sfera.

Finalmente dai §§. 16, 19, 20 è manifesto che l' intersezione tra la superficie d' una conoide iperbolica con una superficie cilindrica della quale sia base l' iperbole generatrice della superficie conoidale è sempre un' iperbole concentrica alla stessa generatrice.

PARTE II.

§. 23. Dato un emisferio concavo di cui sia projezione verticale il circolo AMN e projezione orizzontale il semicircolo *pqr* posto col suo diametro *pr* parallelo alla comune sezione XZ dei due piani coordinati, rappresentare il contorno dell' ombra che si produce nella superficie concava dell' emisferio supposto illuminato da' raggi paralleli ad una retta, le cui projezioni siano XY, XV.

Pel centro C del circolo AMN si conduca un diametro AB parallelo alla XY ed un altro MN perpendicolare al primo. Pel punto A calata una perpendicolare alla comune sezione XZ in *d* ed alla *pr* in *a*, si tiri *ab* parallela ad XV, e si produca ad incontrare in *b* la XZ. S' innalzi perpendicolare alla XZ la *b*G, che incontri in G la AB, prolungata se fa d'uopo. Pongasi GD perpendicolare ad AB ed eguale alla *ad*, e si tiri AD che segherà in un punto K la circonferenza AMN. Per K si conduca KO perpendicolare ad AB in O, e descrivasi la semiellisse MON col semiasse primario CM e col secondario CO. Sarà la curva MON projezione del contorno dell' ombra.

Poichè il contorno dell' ombra è nella semiperiferia d' un circolo massimo, del quale MN è un diametro (§. 22) la sua projezione verticale sarà nel semiperimetro d' un' ellisse (§. 6) che passa per M, N, ed ha il centro in C. Adunque MN sarà il massimo suo diametro, cioè l' asse, e per conseguenza l' asse secondario si troverà nella AB. Ora si concepisca per O condotta una retta perpendicolare al piano verticale di projezione, e prodotta ad incontrare la superficie dell' emisferio. La porzione di essa retta che giace tra la base, e la superficie dell' emisferio, sarà manifestamente eguale alla KO.

S' immagini un' altra retta la quale congiunga quel punto d' incontro col punto dell' orlo emisferico che corrisponde alle projezioni A, *a*. Questa retta sarà in un piano che passa per AB ed è perpendicolare al piano verticale di projezione. In oltre la retta stessa formerà col piano della base emisferica un angolo d' inclinazione eguale all' angolo BAD nel punto corrispondente alle projezioni A, *a*. Ma tale è pur l'angolo d'inclinazione che forma col piano stesso ed in quel punto medesimo il raggio projettato nelle AB, *ab* (*p*). Dunque tal raggio coincide con quella retta, ed il punto dov' esso incontra la superficie emisferica è projettato in O, e quindi per O passerà la projezione del contorno dell'

(*p*) La Croix. Essais sur les plans. §. 11.

dell' ombra. Adunque CO sarà un semidiametro, e per essere normale all' asse MN sarà il semiasse secondario dell' ellisse cercata.

§. 24. È manifesto che se ciascuna delle rette XY, XV formi colla XZ angolo semiretto, come per l' ordinario si suppone dagli Artisti, allora per ottener l' angolo BAD basterà porre scambievolmente normali, e fra loro eguali due rette *nm*, *mr*, tirata la *nr* condurre ad essa perpendicolare in *r* la *tr* e farla eguale alla *mr*, indi tirare *nt* che farà l' angolo *rnt* eguale al cercato.

§. 25. Innanzi di passare ad altro, torna in acconcio considerare due risoluzioni diverse del medesimo problema, le quali sono comunemente adottate come geometriche dagli Artisti.

In esse le projezioni de' raggi si pongono nell' inclinazione precedentemente indicata (§. 24) per rispetto alla comune sezione XZ.

§. 26. *Risol.* 1. Poste le projezioni dell' emisferio come superiormente (Fig. 7) siano AB, *aq* le projezioni di un raggio che passa per un punto della circonferenza, la quale costituisce l'orlo dell' emisferio.

Dal punto *q* dove la *aq* incontra la circonferenza *pqr* s' innalzi una perpendicolare alla XZ che incontri in O la AB, e per O conducasi parallela alla XZ la 1O1 che incontri in 1 la circonferenza AMBN. Per 1 s' intenda calata la 12 normale ad XZ, e prodotta a segare in 3 la *cr*. Col centro *c* e col semidiametro *c*3 si descriva una circonferenza che seghi in *u* la *a q* Se da *u* si innalzi una perpendicolare ad XZ, e si produca a segare la AB in K si afferma essere K un punto del cercato contorno, e lo stesso metodo viene prescritto per determinare qualunque altro punto del contorno stesso (= *Leçons elementaires des ombres* = par M^r^. De la Gardette. Paris 1797. = Regole del chiaro-scuro: di Carlo Amati. Milano 1802).

§. 27. È facile discoprire come le parti della esposta costruzione si contradicono a vicenda nel loro significato. Diffatti assumendo per la costruzione medesima che il punto *u* sia projeziozione orizzontale d'un punto esistente nella superficie emisferica, ne segue ch'esso punto si troverà in una semicirconferenza circolare che è nella stessa superficie emisferica, ha il suo piano orizzontale, ed il suo diametro eguale alla corda Ii del circolo AMBN. Ora nel dato emisferio due sole semicirconferenze esistono in tali condizioni, ed una di esse è projettata verticalmente nella corda Ii, l'altra in un'altra corda eguale e parallela alla Ii e posta dall'altra parte del centro C. Adunque la projezione verticale di quel punto che si vuole projettato orizzontalmente in u deve ritrovarsi in una delle mentovate corde. Ma ciò si oppone appunto all' ultima parte della costruzione, ove si assegna il punto K come projezione verticale corrispondente all' orizzontale u: dunque la costruzione è contradittoria.

§. 28. *Risol.* 2. Si conduca il diametro MN perpendicolare alla AB, e l'altro A'B' ad essa parallelo. Intendasi eretta una ZR normale ad XZ e condotta parallela alla stessa XZ la retta CP che incontri in P la ZR. Col centro P e col semidiametro PR eguale a CM si descriva una semicirconferenza RTS. Conducasi una retta A'E parallela a CP e pel punto E dove incontra ZR si conduca EL che formi con ZR l'angolo ZEL semiretto e seghi in L la semicirconferenza RLS. Si conduca per L una retta LV parallela ad XZ che incontri in V la A'B'; si conclude essere V il punto dove la projezione del cercato contorno incontra la A'B' (*Saggio Teorico-pratico intorno alla determinazione dell' ombre*. Firenze 1805).

§. 29. Per dimostrare che ciò non sussiste, concepiscasi un piano condotto per A'B' perpendicolare alla base dell'emisferio ed al piano verticale di projezione. Se quel piano condotto per A'B' seghi la superficie emisferica nasce una semicirconferenza circolare, il cui semidiametro è uguale e parallelo a CA'. Il punto poi dove quella circonferenza s' incontra col raggio rappresentato dalla projezione sua A'B' è un punto del contorno, del quale si vuol descrivere la projezione. Ora s' immagini condotto per RZ un piano perpendicolare alla XL, e sopra di esso concepiscansi descritte le projezioni della semicirconferenza che na-

nasce tagliando l' emisferio col piano supposto per A'B', e del raggio projettato nella stessa A'B'. È manifesto che la projezione del raggio sarà una retta come EL la qual forma in E colla ZR un angolo semiretto, e la projezione della semicirconferenza sarà il semiperimetro d' un' ellisse come ETS', di cui PT è il semiasse maggiore, e PE il minore. Il punto G, dove supporremo tagliarsi il perimetro ellittico e la retta EL, rappresenterà la projezione di quel punto ove s' incontrano la semicirconferenza projettata in ETS', ed il raggio projettato in EL. Ma il punto G sarà sempre più distante dalla retta XZ che il punto L: dunque ancora la projezione verticale del punto ove la superficie emisferica è incontrata dal raggio la cui projezione è A'B' dev' essere più distante dalla XZ di quello che il punto V, e perciò V non puot' essere nella projezione del contorno dell' ombra.

§. 30. Per trovare altri punti della projezione cercata secondo l' insegnamento del citato opuscolo, si fa CΔ eguale a CV, ed eretta $\Delta\Gamma$ normale ad MN sicchè incontri in Γ la circonferenza AMNA si prende l' arco $\Gamma\pi$ eguale all' arco A'Γ, e per π si conduce una normale $\pi\varepsilon$ ad MN. Presa $\Delta\omega$ eguale a $\Delta\varepsilon$ si afferma esser ω un punto spettante alla projezione del contorno dell' ombra, e similmente si determinano altri punti successivi.

Se tutto ciò potesse sussistere converrebbe che le CV, $\Delta\omega$ fossero semiordinate d' un' ellisse, il cui semiasse primario sia CM, ed il secondario CV (§. 27), ponendo la determinazione di CV esente dal difetto superiormente dimostrato. Ciò posto ne seguirebbe la proporzione A'C : $\Gamma\Delta$: : CV : $\Delta\omega$, e quindi nominato ρ l' arco A'Γ, ed r il semidiametro A'C ne viene $r : \cos.\rho : : \text{sen}.\rho : \text{sen}.2\rho - \text{sen}.\rho$, d' onde, sostituito il valore di $\text{sen}.\,2\rho$ espresso da $2\,\text{sen}.\rho\cos.\rho$, e fatto $r = 1$ si ottiene l' equazione $\text{sen}.\rho = \text{sen}.\rho\cos.\rho$, risultato impossibile se l' arco AΓ non è nullo.

§. 31. (Fig. 8) Data un' emisferoide concava, di cui sia projezione verticale l' ellisse AMBN, e projezione orizzontale il semicircolo *pqr*, posto col suo diametro *pr* parallelo alla XZ, rappresentare il contorno dell' ombra che si produce nella concava su-

superficie della emisferoide supposta illuminata da raggi tutti fra di loro paralleli, d' uno de' quali sian date le projezioni.

Pel centro C della data ellisse AMBN si conduca un diametro AB parallelo alla projezion verticale del dato raggio. Dal punto A si cali una perpendicolare alla XZ producendola ad incontrare in *a* la *pr*, e per *a* si conduca una retta *aq* parallela alla projezione orizzontale del raggio dato. Saranno AB, *aq* projezioni d' un raggio che passa per un punto dell' orlo della data emisferoide, e le projezioni di tal punto sono A, *a*. Si conduca il diametro MN conjugato di AB e il diametro GD parallelo ad XZ. Si faccia l'angolo BAK eguale all' angolo d' inclinazione che forma col piano verticale il raggio projettato nelle AB, *aq* (§. 23), e trovisi il punto K, dove AK incontra il perimetro d' un' ellisse della quale AB sia l'asse primario, e GD eguale al secondario. Per K si conduca la retta KO perpendicolare in O alla AB, e si descriva la semiellisse MON, della quale MC sia un semidiametro, e CO sia il suo conjugato. La curva ellittica MON rappresenterà il cercato contorno.

Il contorno dell'ombra è nel semiperimetro d' un'ellisse concentrica alla generatrice della sferoide (§. 22). La sua projezione esser deve un semiperimetro ellitico (§. 6), che passa per M, N; ha il centro in C; ed è contenuto nell'ellisse AMBN. Adunque l' ellisse cercata, e la AMBN hanno comune il diametro MN e le tangenti in M, N; quindi il diametro conjugato di MN nella ellisse cercata giace sulla AB. Ora in modo simile a quello che fu adoperato nel §. 23 si dimostrerà essere in O un estremo del diametro conjugato ad MN nell' ellisse cercata. Adunque il semiperimetro ellittico MON è quello che si cerca.

§. 32. (Fig. 9, 10, 11). Data un'emiconoide concava iperbolica, di cui sia projezione verticale l' iperbole GAI, e projezione orizzontale il semicerchio *pqr* posto col diametro *pr* parallelo alla XZ; rappresentare il contorno dell' ombra che si produce nella concava superficie della data emiconoide supposta illuminata da raggi, tutti fra di loro paralleli, d'uno dei quali siano date le pro-

je-

jezioni AB, *a*Q, ed i punti A *a* siano in una medesima perpendicolare alla XZ.

Caso 1.° Abbia la AB (Fig. 9) ambi i suoi termini nella curva GAI.

Si divida per mezzo in D la AB e pel centro dell' iperbole GAI, che pongasi esser in C si tiri la retta CDN, la quale incontri in N la XZ. Si costruisca l' angolo BAK eguale all' angolo d' inclinazione che forma col piano verticale il raggio projettato nelle AB, *aq*, e si trovi il punto K dove la AK taglia il perimetro d' un' elisse, della quale AD sia un semiasse, ed il semiconjugato eguagli la media proporzionale fra i due segamenti GD, DI della GI parallela alla XZ, e terminata da ambe le parti nella curva GAI. Sia condotta KO perpendicolare in O alla AB, e pei punti O, N si tirino due perpendicolari alla XZ e producansi fin che incontrino la *pr*, la prima in *o*, la seconda in *n*. Sulla prima inoltre si pigli *ok* eguale ad OK e si tirino le *ck*, CO. Dal punto E dove CO incontrerà XZ si conduca perpendicolare a questa una retta che tagli in *e* la *ck*, e sia condotta la retta *nef* terminata in *f* alla circonferenza *pqr*. Si faccia *cl* perpendicolare in *l* alla *nf*, e nella *cp* si pigli *c*1 eguale a *cl*. Pei punti 1, *l* si conducano due rette perpendicolari ad XZ in 2 ed L.

Si descrivano le rette 2C, LC, e pel punto 3 dove la 2C taglia la curva GAI si conduca parallela alla XZ la 3V che incontri in V la LC, e per *f* si conduca una perpendicolare in F alla XZ.

Se descrivasi una curva iperbolica MVOF, nella quale CV sia semidiametro traverso, VL l' ascissa in esso corrispondente all' ordinata LF, la curva MVOF sarà projezione verticale del cercato contorno.

La dimostrazione per provare che il punto O è projezione verticale d' un punto del cercato contorno è simile alla già esposta nel §. 23. Adunque essendo il contorno stesso nel perimetro d'un' iperbole (§. 22) che ha il suo centro projettato verticalmente in C, ed un punto pure verticalmente projettato in O, sarà la projezione verticale di tal contorno un' iperbole, che ha il centro in C e passa per O (§. 6). In oltre il punto che è projettato verticalmente in O avrà la sua projezione orizzontale nella *ok*; e la retta che da quel punto cade perpendicolare sul piano dell' iperbole, la quale costituisce l' orlo della data emiconoide, eguaglia la O*k*, cioè la *ok*. Adunque il punto *k* è projezione, orizzontale di quello che verticalmente è projettato in O e giace nel contorno dell' ombra. Ma il piano dell' iperbole che forma col suo perimetro il contorno predetto, passa per la retta, di cui sono projezioni le CN, *cn* (§. 19), e pel punto di cui sono projezioni i punti O, *k* : dunque passa ancora per la retta projettata nelle CO, *ck*, e perciò sega il piano orizzontale nella retta *nef*, essendo i punti *n*, *e*, quelli dove le rette che sono projettate nelle *cn*, *ck*, CN, CO incontrano il piano stesso orizzontale (*y*).

Per tanto se immagineremo passare per l'asse della data emiconoide un piano che sia perpendicolare al piano ove giace il contorno dell' ombra, quel piano per l' asse della conoide passerà per *cl*, e la stessa *cl* sarà projezione orizzontale dell' asse di quell' iperbole il perimetro della quale costituisce il detto contorno. Dunque nella retta CL sarà la projezione verticale dell' asse medesimo, e quindi sarà nella CL un diametro dell' iperbole il cui perimetro è projezione verticale del contorno predetto. Inoltre la FL è projezione verticale della *fl* e la FL è la metà di quella retta che sarebbe projezion verticale della doppia *fl*, la quale è manifestamente ordinata all' asse del supposto contorno; perciò la retta CL divide per mezzo in L la projezione della doppia *fl*, e parimenti le projezioni di tutte le ordinate all' asse del contorno : quindi LF è semiordinata al diametro CL di quell' iperbole ch' è projezione verticale del contorno dell'ombra. Ora se in quel piano che passa per l'asse della data emiconoide, e per *cl* concepiscansi descritte le sue intersezioni colla superficie della stessa emiconoide e col piano del contorno supposto è chiaro che la prima sarà una curva eguale e simile alla GAI e la seconda è una retta posta nella sezione dell'emiconoide come la 2 3 *c* è posta nel-

---

(*y*) La Croix Essais sur les plans §. 11.

nella GAI. Adunque l'asse del supposto contorno è segato dalla superficie della data emiconoide in un punto che è distante dal piano orizzontale, quanto il punto 3 è distante dalla XZ, e perciò quel punto che sarà vertice dell' asse del contorno supposto deve avere la sua projezione verticale nella retta 3V parallela alla XZ; ma deve pure averla nella retta CL; dunque sarà in V. Per la qual cosa la projezione del cercato contorno è un' iperbole della quale un semidiametro traverso è CV, ed in esso all' ascissa VL corrisponde la semiordinata LF. Ma tale è l' iperbole MVOF: adunque essa è projezione del cercato contorno, e perciò lo rappresenta.

§. 33. *Caso* 2.° Se la AB (Fig. 10) riesca parallela ad un assintoto CN dell' iperbole AGI, si prolunghi CN fino a segare in N la XZ, ed a questa si conduca per N una perpendicolare, la quale incontri in *n* la *pr*. Si trovi il punto K dove AK incontra il perimetro d' una parabola di cui l' asse è AB, ed in esso all' ascissa AD corrisponde una semiordinata eguale alla media proporzionale tra i segamenti GD, DI della GI, e si tiri la KO perpendicolare in O alla AB. Continuando la costruzione come la precedente si descriva l' iperbole FVS, della quale CV sia un semidiametro traverso, ed in esso all' ascissa LV corrisponda la semiordinata LF, o LS, e sarà FVS la projezione verticale del cercato contorno.

Nel §. 12. è dimostrata la ragione per cui nel supposto caso deve costruirsi sulla AD come asse una parabola, anzi che un' ellisse come si fece di sopra §. 32. È pur dimostrato nel luogo medesimo che il piano dell' iperbole il cui perimetro costituisce il contorno cercato passa per un assintoto dell' iperbole, il perimetro della quale forma l' orlo dell' emiconoide data. È poi manifesto che le CN *cn* sono projezioni di quell' assintoto, essendo AB projezione dell' asse della sezione parabolica. Dunque il piano del cercato contorno sega il piano orizzontale in una retta che passa per *n*, dove il piano stesso orizzontale è incontrato da quella retta che ha per sue projezioni le CN, *cn*. La dimostrazione prosiegue come nell' articolo precedente.

§. 34. *Caso* 3.° Che se finalmente la AB (Fig. 11) passi pel centro C dell' iperbole GAI, all'iperbole stessa conducasi la tangente in A e per C si tiri parallela a quella tangente la CN che incontri in N la XZ, e per N si conduca ad XZ una normale, che tagli in *n* la *pr*. Si trovi il punto K dove AK incontra il perimetro d' un' iperbole, della quale CA è un semidiametro traverso, ed in esso all'ascissa AD corrisponde una semiordinata eguale alla media proporzionale tra i segamenti GD, DI della GI e si compia la costruzione come fu esposto negli altri due casi.

Riferendo a questo caso ciò che fu indicato nel §. 19, apparirà che il piano del cercato contorno deve passare per quella retta, la quale orizzontalmente è projettata in *cn*, e verticalmente dev' essere projettata nella retta in cui giace il diametro conjugato di CA, e quindi nella CN. Perciò il piano del contorno segherà il piano orizzontale in una retta che passa per *n* dove il piano stesso orizzontale è incontrato da quella retta, la quale ha le sue projezioni CN, *cn*.

È pur dimostrata nel §. 11 la ragione per cui si debba descrivere un' iperbole sulla AB come diametro traverso, anzi che un' ellisse come nel §. 32, o una parabola come nel precedente. Il rimanente della dimostrazione è lo stesso che pel Caso 1.°

§ 35. Data un' emiconoide concava parabolica di cui sia projezione verticale, la parabola GAB (Fig. 12, 13), e projezione orizzontale il semicircolo *pqr* posto col diametro *pr* parallelo ad XZ, rappresentare il contorno dell'ombra che si produce nella concava superficie della data emiconoide, supposta illuminata da' raggi fra di loro paralleli, uno de' quali sia projettato nelle AB, *a q*, e siano i punti A *a* nella medesima perpendicolare ad XZ.

Caso 1.° Sia primieramente AB terminata da ambe le parti nella curva GAB.

Divisa per mezzo in D la AB si conduca il diametro MDN della parabola GAB, e si produca ad incontrare in N la XZ ed in *n* la *pr*.

Sia BAK l'angolo che forma col piano verticale il raggio projettato nelle AB, *aq*, e si trovi il punto K, dove la AK incontra il pe-

perimetro dell'ellisse della quale AB sia l'asse primario, ed il semiasse secondario eguagli la media proporzionale tra i segamenti GD, DI della GI terminata da ambe le parti nella curva GAB, e parallela alla XZ. Condotta KO perpendicolare ad AB in O, per O si cali una retta perpendicolare ad XZ e si produca ad incontrare in *o* la *pr*. Sulla stessa perpendicolare si pigli *ok* eguale alla OK e si tiri la *nk*, prodotta fino alla circonferenza in *f*. Alla *nf* si conduca perpendicolare dal punto *c* la *cl* in *l*. Per *l*, ed *f* si conducano due perpendicolari alla XZ, la prima *l*LV indefinita, la seconda fino ad incontrare la XZ in F. Presa nella *cp* la *c*1 eguale a *cl* ed elevata pel punto 1 la 1 2 3 perpendicolare ad XZ, pel punto 3 dove sega la curva GAB si conduca parallela ad XZ la 3V che incontri in V la LV. Se descrivasi una parabola VMOF, della quale sia l'asse LV, il vertice V, ed FL semiordinata corrispondente al punto L dell' asse, sarà dessa la projezione verticale del contorno dell' ombra.

Dal §. 22 si ricava che il contorno dell' ombra è nel perimetro d' una parabola il cui parametro eguaglia quello della GAM, e che il piano di essa passa per quella retta, la quale orizzontalmente è projettata nel punto *n*, e verticalmente nella retta MN. Col metodo usato nelle dimostrazioni precedenti si proverà essere un punto del suddetto contorno quello che è projettato ne' punti O, *k*, quindi *nf* sarà nell'intersezione del piano orizzontale col piano del contorno, ed il punto *l* sarà projezione orizzontale dell'asse di quella parabola, nel perimetro della quale è costituito il contorno stesso. Perciò la projezione verticale di quell'asse esser deve nella LV. Ora si immagini un piano che passi per l'asse della data emiconoide, e per la *cl*. La sezione fatta da esso piano nella superficie della emiconoide sarà una semiparabola eguale e simile alla GAN, e la sezione fatta nel piano del cercato contorno sarà una retta posta nella sezione della semiconoide come la retta 2 3 è posta nella GAM. Adunque il vertice della parabola, nel cui perimetro è il contorno cercato dev' esser distante dal piano orizzontale quanto il punto 3 è distante dalla retta XZ, e quindi quel vertice sarà projettato nella 3V; e lo è pure nella LV. Dunque

que V sarà la sua projezione verticale. Per la qual cosa la projezione del cercato contorno esser deve una curva parabolica, della quale l' asse è la retta LV, il vertice V, e la semiordinata al punto L dell' asse è la LF. Ma tale è la curva MOF : dunque dessa è projezione del contorno dell' ombra.

§. 36. *Caso 2.°* Se le AB, *aq* (Fig. 13) si trovino ambedue costituite in una medesima retta perpendicolare alla XZ, si condurrà l' asse MN della parabola GAI, e descritta la MK che formi l' angolo KMN eguale all' angolo d' inclinazione che forma un raggio col piano verticale, pel punto K, dove la MK taglia la curva GAI si condurrà parallela ad XZ la KO che incontri in O la MN.

Se descrivasi la parabola SOF coll' asse ON, col vertice O e col parametro eguale a quello della GAI sarà SOF projezione verticale del supposto contorno.

Se per MN si concepisca condotto un piano perpendicolare al piano verticale, e secante la data emiconoide, la sezione fatta nella superficie della medesima sarà una parabola eguale e simile alla GAI, ed il punto dove la superficie della conoide è incontrata dal raggio projettato verticalmente in MN, sarà egualmente distante dal piano orizzontale che il punto K dalla XZ, e perciò la projezione verticale di quel punto sarà in O.

Inoltre il punto stesso sarà distante dal piano della parabola il cui perimetro costituisce l'orlo della data emiconoide quanto il punto K è distante dalla MN. Ma per essere tutte parabole di egual parametro le sezioni parallele per MN, AB &c. e paralleli tutti i raggi projettati verticalmente in MN, AB &c. si potrà conchiudere che ogni altro punto del contorno supposto è distante dal piano dell' orlo della emiconoide come il punto K dalla retta MN. Dunque il piano del contorno è parallelo a quello dell' orlo della data emiconoide e distante da esso quant' è KO, ed inoltre l' asse del contorno stesso sarà nel medesimo piano secante condotto per MN perpendicolare al piano verticale, e quindi la projezione di quell'asse sarà nella MN, e la projezione del vertice sarà in O. Ma il contorno cercato è una curva parabolica di parametro eguale a quello della GAI, e si è dimostrato che il suo piano è parallelo a quello della GAI: dunque il contorno cercato è eguale e simile alla sua projezione e perciò la parabola SOF sarà questa projezione.

Che se vogliasi pure la projezione orizzontale, si prenda nella *co* che è per diritto alla MN la porzione *ck* eguale ad OK, e per *k* si conduca la *skf* parallela alla *pr* terminata alla circonferenza *pqr*, e sarà *sf* la dimandata projezione orizzontale ed ancora la retta, ove il piano del contorno sega il piano orizzontale.

§. 37. Dopo queste cose è facile che nasca in taluno il desiderio di conoscere qual sia la curva che divide la parte illuminata dalla oscura nella superficie convessa d' un solido generato per la rotazione d' una sezion conica d' intorno al proprio asse. Per amore di brevità mi limiterò ad enunciare la risposta, omettendone la dimostrazione che si presenterà facilmente a chi per poco abbia vaghezza di cercarla.

La curva dimandata segue anche in questo caso la natura della proposta superficie, ed è un circolo massimo nella sfera; un circolo o un' ellisse nella sferoide; un' iperbole nella conoide iperbolica; una parabola nella conoide parabolica.

Fig 4

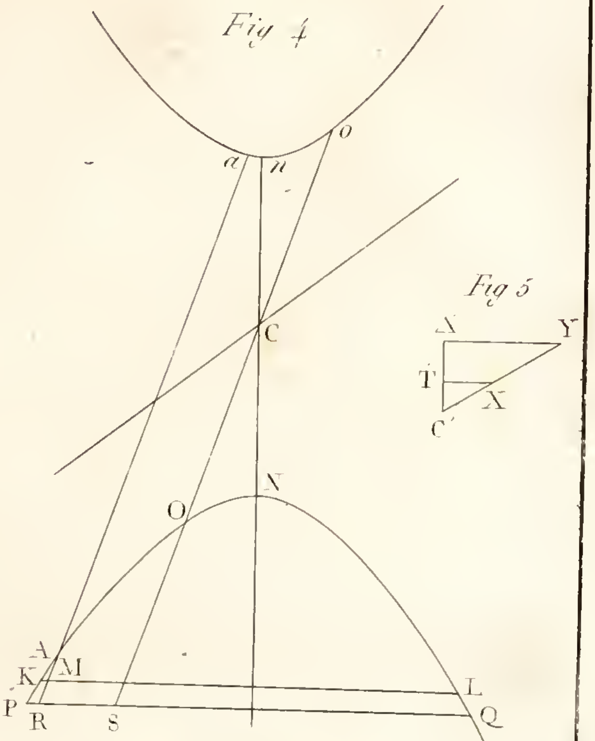

o
a
n
C
N
O
A
K
M
P
R
S
L
Q

Fig 5

A
Y
T
X
C

Fig 6

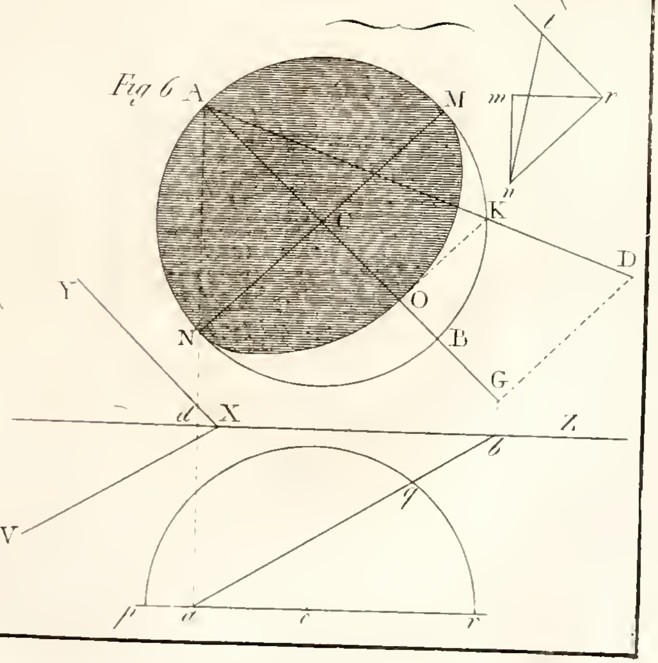

A
M
t
m
r
n
C
K
D
O
B
G
N
Y
d
X
Z
b
q
V
p
a
c
r

Fig 1

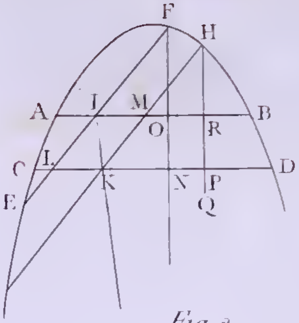

F
H
A
I
M
B
O
R
C
L
D
K
N
P
E
Q
G

Fig 2

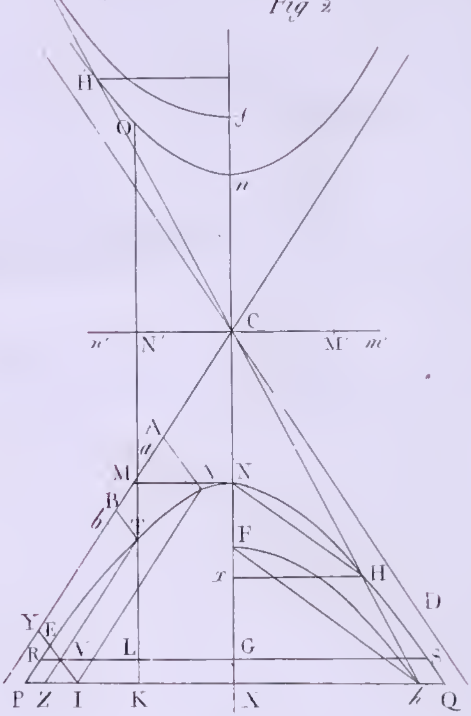

h
H
g
O
n
C
n'
N'
M'
m'
A
a
M
V
N
B
b
T
F
x
H
D
Y
E
R
V
L
G
S
P
Z
I
K
X
h
Q

Fig 3

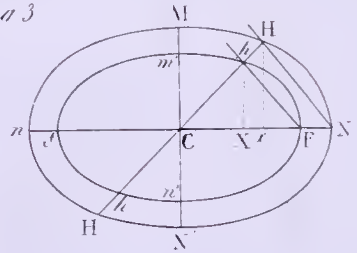

M
H
m'
h
n
g
C
X
x
F
N
n'
h
H
N'

Fig 4

Fig 5

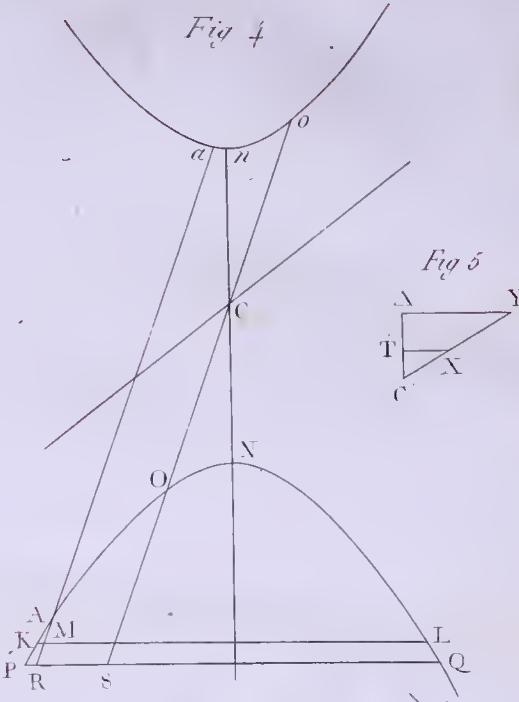
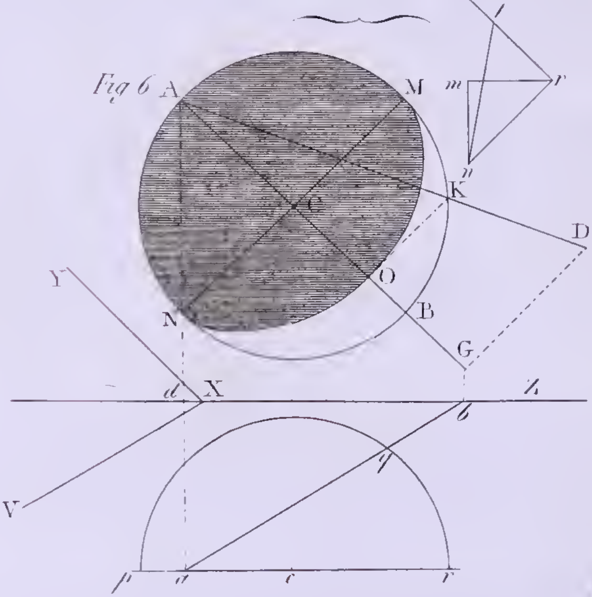

o
a
n
C
N
O
A
K
M
L
P
R
S
Q
A
Y
T
X
C

Fig 6


A
M
m
r
n
K
C
D
O
B
Y
N
G
d
X
Z
b
q
V
p
a
c
r

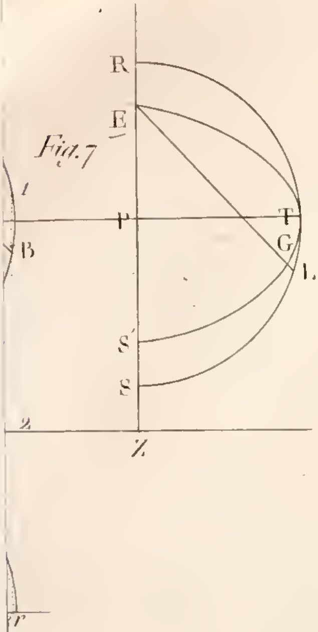


Fig. 7

R
E
P
T
G
L
S'
S
Z
B
1
2
r

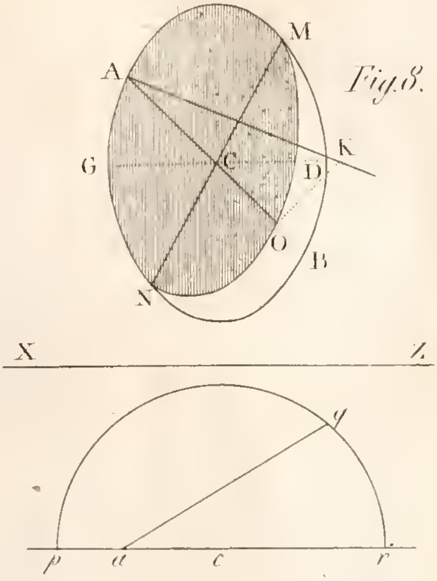


Fig. 8.

M
A
K
G
C
D
O
B
N
X
Z
q
p
a
c
r

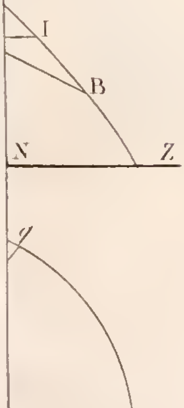


Fig. 9.

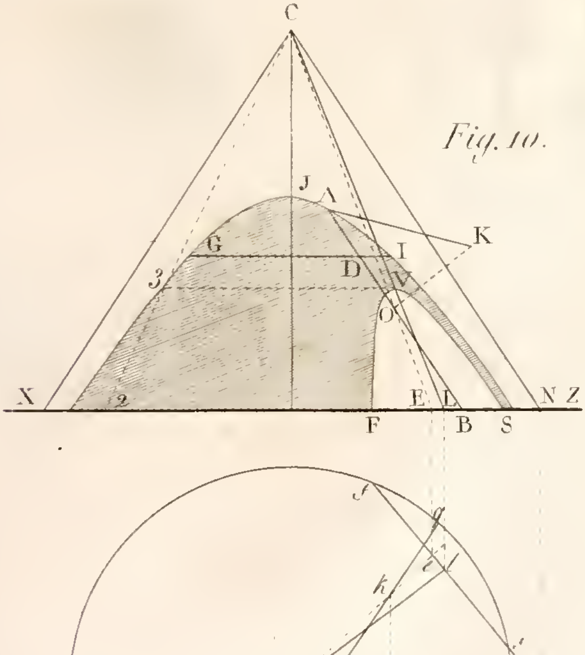


Fig. 10.

C
J
A
K
G
I
D
V
3
O
X
2
E
L
N
Z
F
B
S
f
g
i
l
k
1
p
c
d
o
r
n

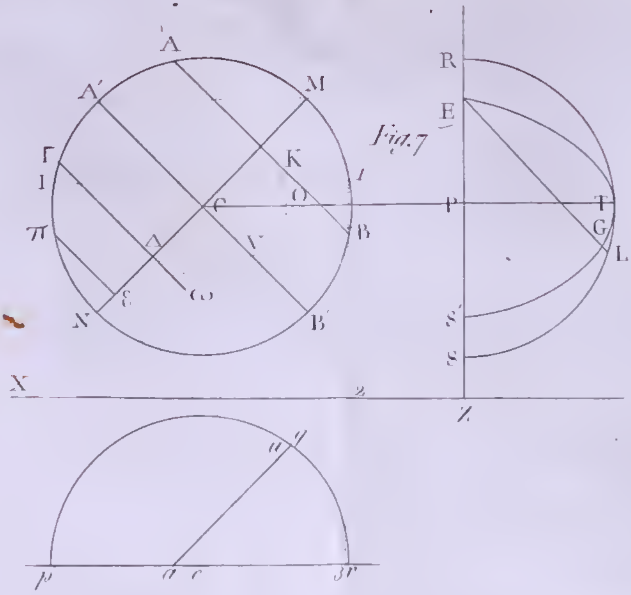


Fig. 7
A
A′
M
Γ
I
K
O
C
P
T
π
B
Δ
V
ε
ω
N′
B′
R
E
G
L
S′
S
X
Z
a
q
p
a
c
3r

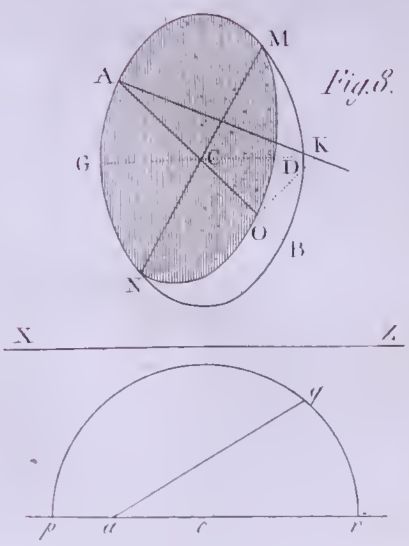


Fig. 8.
M
A
K
G
C
D
O
B
N
X
Z
q
p
a
c
r

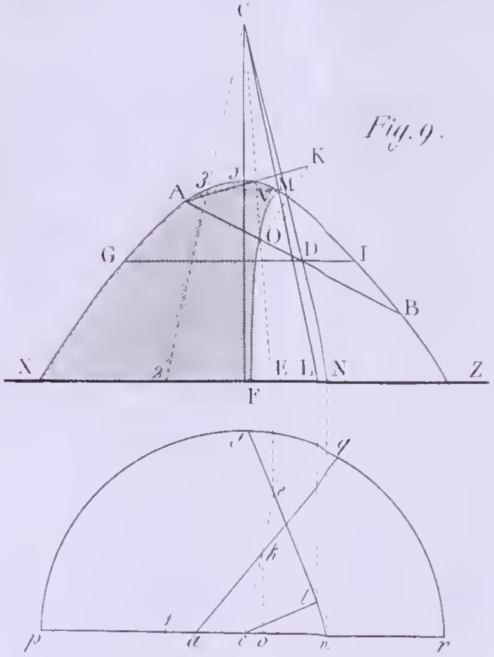


Fig. 9.
C
K
3
J
A
V
M
O
G
D
I
B
X
2
E
L
N
Z
F
s
q
e
k
l
p
1
a
c
o
n
r

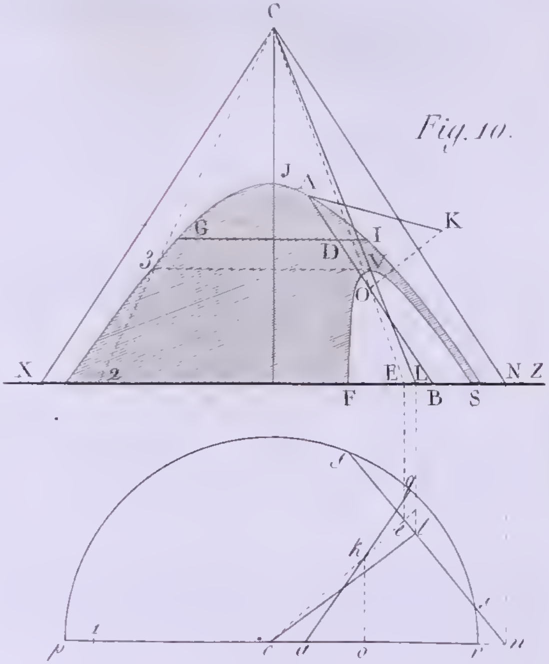


Fig. 10.
C
J
A
K
G
I
D
3
V
O
X
2
E
L
N
Z
F
B
S
s
q
e
l
k
t
p
1
c
a
o
r
n

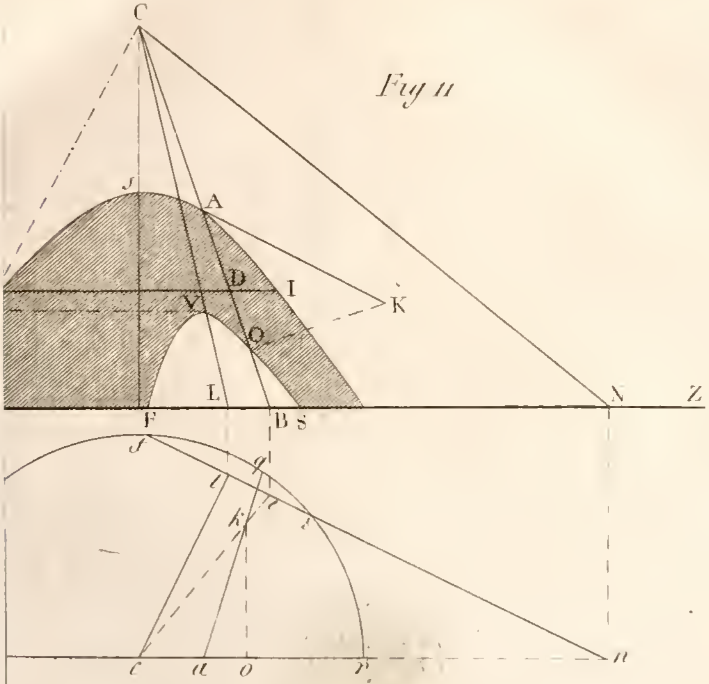


Fig 11
C
s
A
D
I
K
V
O
L
F
B
S
N
Z
f
q
l
n
k
t
c
a
o
r
n

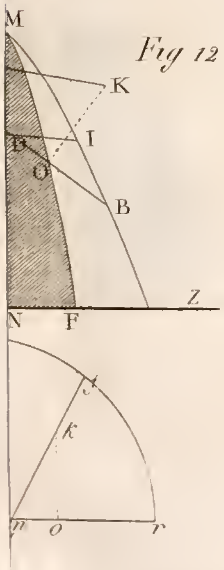


Fig 12
M
K
I
D
O
B
Z
N
F
f
k
n
o
r

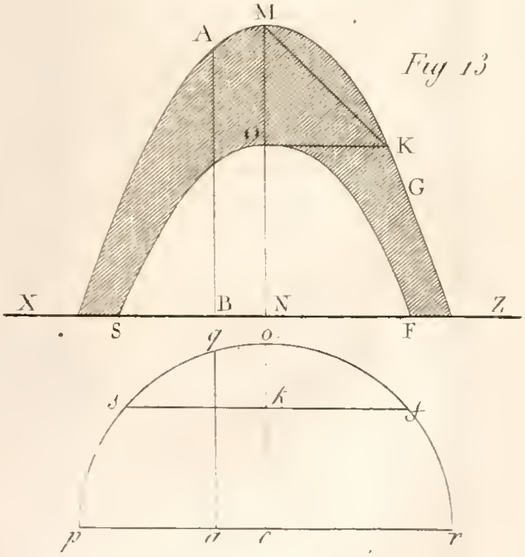


Fig 13
A
M
O
K
G
X
B
N
Z
S
F
q
o
s
k
f
p
a
c
r

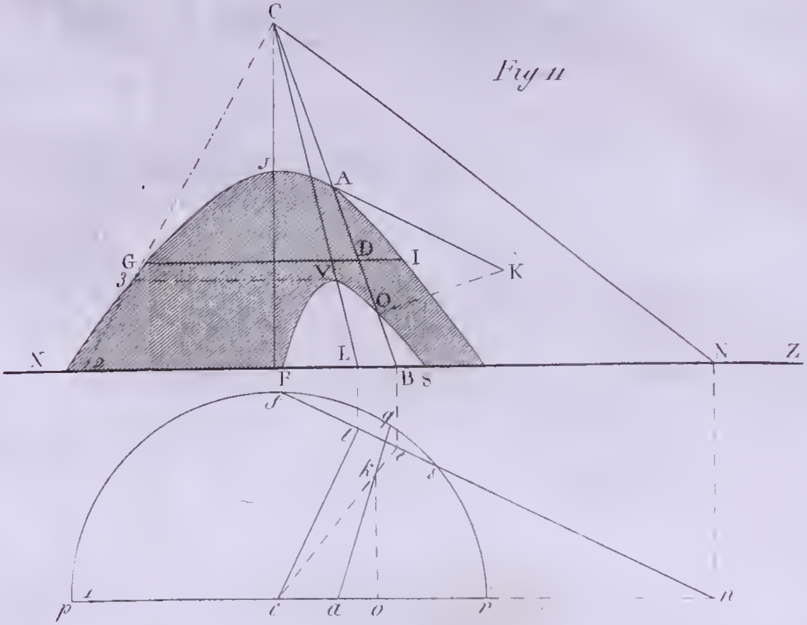


Fig 11

C
J
A
G
D
I
K
3
V
O
X
12
L
N
Z
F
B
S
f
q
l
k
s
p
1
c
a
o
r
n

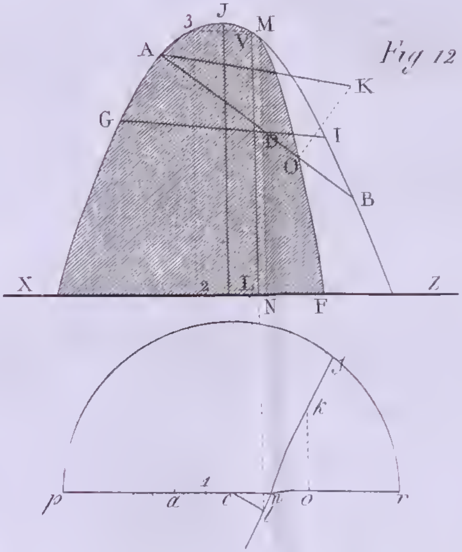


Fig 12

J
M
3
V
A
K
G
I
D
O
B
X
2
L
N
F
Z
f
k
1
p
a
c
n
o
r
l

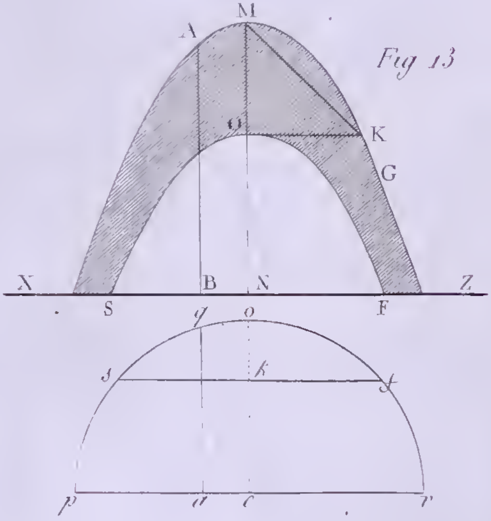


Fig 13

M
A
O
K
G
X
B
N
Z
S
F
q
o
s
k
f
p
a
c
r

MEMORIA

INTORNO ALLA RIFRAZIONE LUNARE

Del Sig. Abate Francesco Bertirossi-Busata

Presentata il dì 10 *Aprile* 1806

Dal Sig. Ab. Vincenzo Chiminello.

Il celeberrimo Manfredi (*Istituz. Astronom. P. I, Cap. V, Sez. II*) accenna esservi stati alcuni Astronomi, i quali pensavano, che la Rifrazione dei raggi luminosi degli Astri nella nostra Atmosfera fosse maggiore, o minore secondo ch' essi più, o meno distano dalla Terra, oppure (ciò che probabilmente intendevano) che la Rifrazione dovesse tenersi maggiore nei raggi più deboli, minore nei più forti e più vibrati, a qualunque sia densità dell' aria più, o meno alterata da' diversi elementi. Riccioli medesimo, non so se mosso dallo stesso principio, attribuiva egli pure agli Astri differenti Rifrazioni (*Astronom. Refor. pag.* 47); ed analoghe a questo proposito sono l' esperienze, ed osservazioni fatte dall' incomparabile Sig. Herschel. La ragionevolezza pertanto di questa cosa, e l' indicazione data da' uomini così insigni eccitò in me la voglia di ricercare dietro al lume di un qualche fenomeno, che mi ricordo di aver avuto l' occasione di frequentemente osservare senza allora riflettervi, e coll' ajuto di quelle sperienze che potessi fare colla mia scarsa abilità, e co' miei deboli Stromenti, se quanto viene supposto in fatto si verifichi ad evidenza; e diressi le mie ricerche alle Rifrazioni del Sole e della Luna, di cui la luce secondo le osservazioni di M. Bouguer è 300000 volte meno intensa di quella del Sole (*Smith, Traité d'Optique, not.* 86) parendomi che i risultati, che ne ricavassi sarebbero decisivi in guisa da non poterne dubitare.

Or quanto ai fenomeni mi ricordo di spesso avermi preso il piacere di osservare la Luna molto vicina alla sua opposizione, e tante volte nell'opposizione stessa, tanto nel suo levare, che nel tramontare, così pure il Sole, che in quegli istanti ha una luce sì debole da non offendere l' occhio il più delicato, e vi rimarcai sempre una qualche notabile differenza nell'apparimento del disco tra l' una, e l' altro, anzi posso asserire costantemente di aver osservato, che la figura ellittica che prende la luna in quei punti non è mai paragonabile alla poca ellitticità, che sembra prendere il Sole nell'orizzonte medesimo. Questa ellitticità, che fa comparire il diametro orizzontale degli Astri maggiore del verticale ad altro non puossi attribuire, com' è già noto, che alla Rifrazione che soffrono i raggi luminosi, allorchè entrano nella nostra Atmosfera, la quale fa che il lembo inferiore, soggetto a maggior Rifrazione che il superiore per esser più basso, comparisca innalzato più del dovere, e così sembri che il Diametro verticale dell' Astro sia più corto dell' orizzontale, e l' Astro medesimo acquisti in tal maniera quella figura ellittica apparente, che non si osserverebbe mai, se non esistesse l' Atmosfera. E siccome questa ellitticità, come dissi, sembra costantemente maggiore nella Luna che nel Sole, così par che si possa con tutta ragione inferire, che le Rifrazioni lunari siano maggiori delle solari. Questa osservazione, benchè unica, ed isolata, esser potrebbe forse bastante a provare la verità della sovra enunciata proposizione, ma da essa non si possono ricavare risultati determinanti la quantità, e però procurai, come ho potuto, fare delle sperienze a tal fine dirette. Sapeva già per osservazioni, che qualche volta una semplice curiosità mi aveva eccitato a fare, che presentando una lente convessa al lume di una candela a diverse distanze si osserva sempre una sensibile differenza tanto nella grandezza dell'immagine quanto nella lunghezza del foco della medesima; ora rintracciando la causa di questo fenomeno ad altro non credei di poterlo attribuire che alla maggior, o minor intensità della luce a diverse distanze, di modo che li raggi passando per li stessi mezzi rifrangenti soffrano diverse alterazioni in una certa tal qual proporzione della loro forza, o debolezza; dal che mi parve di poter ragionevolmente conchiudere, che l'immagine sarebbe più picciola, e il foco più corto quanto più la luce di un corpo qualunque si andasse indebolendo, e viceversa un' immagine più grande, ed un foco proporzionatamente più lungo si otterrebbe diminuendo la distanza, o, ciò ch' è lo stesso, accrescendo l' intensità della luce. Tutto questo supposto esser vero, verrebbe la conseguenza, che quanto più li raggi, passando per gli stessi mezzi, sono indeboliti tanto più facilmente si abbiano a piegare, od incurvarsi, ciò che certamente darebbe una maggior Rifrazione.

Presi dunque una lente convessa di due pollici, circa, di diametro, e nel tempo medesimo una candela, che accesa collocai sopra una Tavola, ed io mi vi situai in qualche picciola distanza, per osservare l' immagine, ed insieme la lunghezza del foco della lente; vidi che il foco era assai lungo, e l' immagine molto grande; ma di mano in mano ch' io mi allontanava, osservai che l'immagine s' impiccioliva, e che il foco andava parimenti accorciandosi, cosicchè arrivato alla distanza di quindici piedi Parigini il foco era molto più corto, e l' immagine ridotta ad un semplice punto Questa sperienza dunque fa vedere, che quanto più la luce s' indebolisce tanto più li raggi laterali che cadono sulla lente si uniscono, e si concentrano, che vuol dire, tanto più facilmente si piegano, e questo è in fatti quanto mi aveva immaginato di poter osservare. Ma se questo effetto (andava fra me stesso dicendo) succede al lume di una candela, perchè non succederà poi ugualmente alla luce della Luna in confronto di quella del Sole? Se tanta differenza si osserva in così poca distrazione, o indebolimento di raggi di una candela, perchè dunque non si dovrà trovare differenza alcuna adoperando la stessa Lente, ed esponendola ai raggi Lunari? Vediamo. La mattina dei 30 Settembre dell' anno 1805 procurai colla maggior diligenza che mi fu possibile di trovare la lunghezza del foco della Lente adoperata nell' antecedente sperienza ai raggi Solari coi metodi, e regole insegnate da Smith nell' eccellente suo Trattato di Ottica, indi divisi il Piede di Parigi in Pollici, Linee, e quarti di Linea colla maggior esattezza a me possibile, e le divisioni, a dir vero, mi riuscirono così fine, che a stento potevansi vedere ad occhio disarmato. Fatto tutto questo, nella susseguente mattina, in cui era il cielo perfettamente sereno determinai la distanza focale di detta Lente con cinque, o sei successive osservazioni, e trovai ch' ella aveva un foco di Poll. 6, lin. 10, 47; segnai accuratamente questo punto sul piede, e sopra v' incollai a perpendicolo un pezzetto di cartone bianco sul quale andasse dipingersi l' immagine del Sole, che si forma nel foco, onde poterla misurare a piacere. Il giorno dietro (1.° Ottobre) m' ingegnai di determinare il diametro dell' immagine focale del Sole, tirando delicatamente una linea che dividesse diametralmente l' immagine stessa, e terminasse da una, e dall' altra parte nella circonferenza del cerchio racchiudente la picciola immagine suddetta, poi prendendo un compasso con punte molto delicate misurai questa diametrale grandezza trasportandola su d' un altro piede che avevo antecedentemente diviso con pari esattezza del primo; osservai questa apparente grandezza, e la registrai a parte, indi continuando nella stessa maniera feci 25 simili osservazioni tutte registrate quì in fine: presa la media di tutte, non differendo esse di molto, ritrovai la grandezza dell' immagine focale del Sole Poll. 0 1, 30 $\frac{1}{2}$. In simil maniera cercai di determinare la grandezza del diametro dell' immagine focale della Luna, che aveva già di molto passata la prima quadratura prendendo la distanza verticalmente. In questo tentativo, a dir vero, confesso d' aver incontrata qualche difficoltà, non potendo tutte le volte precisamente vedere a cagione della oscurità, se la distanza presa fosse realmente uguale al diametro dell' immagine, oppure minore, o maggiore, e per questo le differenze, che in queste osservazioni s' incontrano, sono maggiori di quelle che si trovano nelle osservazioni solari; tuttavia per trenta osservazioni ch' io feci incominciando dai 3 del mese suddetto, e terminando alli 7, giorno antecedente al Plenilunio, e tempo, in cui il diametro apparente della Luna era uguale a un di presso a quello del Sole, ho trovato la grandezdezza media di tutte Poll. 0. 0, 85, ciò che dà la notabile differenza di centesime 45 ½ di cui è minore l' immagine focale della Luna di quella del Sole. Questa differenza mostra apertamente, che li raggi lunari che cadono lateralmente sulla Lente si uniscono, e si concentrano molto di più che li raggi laterali del Sole con che si viene ad ottenere un foco immaginario più corto nelle osservazioni fatte con una Lente ai raggi lunari di quello che ai raggi solari, conseguentemente l' angolo che si forma nel detto foco immaginario alla luce della Luna è maggiore di quello formato coll' istessa Lente ai raggi del Sole; e in fatti trovai l'angolo solare 13° 25', mentre il Lunare collo stesso metodo ritrovato viene ad essere di 13° 47' piuttosto più che meno. Tutto questo, se non m' inganno, par che manifestamente provi, e di una maniera da non poter dubitare, che anche nelli stessi mezzi i raggi lunari, come più deboli, s' incurvino assai di più che li raggi solari, i quali (per così esprimermi) sono più tesi, e più forti. Si aggiunga per ultimo anche il riflesso ch' io feci sull' osservazione, che quì riferisco: Tutte le volte che per accidente, o a bella posta io allontanava dal foco un tantino il picciolo cartone su cui ricevevo l' immagine solare, i raggi si distraevano talmente, che davano subito un' immagine molto confusa, ciò che prova la gran difficoltà, o, per dir così, la ripugnanza che ha il raggio solare a spiegarsi in confronto di quel della Luna, la di cui immagine, affinchè apparisse confusa ricercava, che il cartone fosse smosso dal foco per lo meno un mezzo pollice, circa.

Stanti dunque le cose in tale maniera, e data la differenza degli angoli nel foco immaginario sopra trovati, di 0° 22', circa, e sapendosi a un dipresso il rapporto di rifrazione, che soffrono li raggi passando dall' aria nel vetro, ch' è di 17 ad 11, come ha osservato l' immortale Isacco Newton, io tentai di calcolare qual differenza porterebbero le mie osservazioni sulla rifrazione orizzontale supponendo questa per il Sole, secondo le Tavole recenti, 33″ 52', 8, e ritrovai che se tale fosse quella del Sole, la Lunare sarebbe per lo meno maggiore di 54″, circa, i quali si renderebbero sensibili, di due in tre decime, sino ad 80 gradi di elevazione dall' orizzonte, ciò che certamente non sarebbe trascurabile nelle tanto delicate osservazioni astronomiche che si fanno a questi nostri giorni, nei quali con tutta cura si cerca di arrivare all' ultima precisione.

Tali sono le mie ossesvazioni, e le mie sperienze sulla luce di questi due Astri, le quali, se non sono del tutto decidenti, almeno lasciano luogo a un qualche ragionevole sospetto, che le rifrazioni solari possano ad uguali circostanze esser differenti dalle lunari. Se ciò con replicate sperienze verrà confermato, anche i Pianeti potranno aver la lor parte; ma io intanto non fo che prender la cosa come in sospetto, dubitando ancora, che osservazioni più scrupolose fatte con metodi, e stromenti diversi da qualche sagace, ed industrioso Fisico possano mostrare, ch'io mi lasciai condurre in errore, abbagliato, per così dire, e sorpreso soltanto da una vaga seducente illusione.

QUADRO DELLE OSSERVAZIONI

Foco della Lente Poll. 6. 10, 47 : Diametro della medesima Poll. 1. 10, 35.

Osservazioni sulla grandezza del diametro dell' immagine focale del Sole dei giorni 1, e 2 Ottobre 1805.

Ott. 11^h matt. circa	4^h cir.ª sera.	2. Ott. 9^h cir.ª matt.	4^h cir.ª sera.
sser. 1ª Poll. 0. 1,30	Osserv. 8ª Poll. 0. 1,30	Osser. 14ª Poll. 0. 1,32	Osser. 20ª Poll. 0. 1,32
2ª Poll. 0. 1,32	9ª Poll. 0. 1,30	15ª Poll. 0. 1,32	21ª Poll. 0. 1,30
3ª Poll. 0. 1,28	10ª Poll. 0. 1,35	16ª Poll. 0. 1,30	22ª Poll. 0. 1,30
4ª Poll. 0. 1,35	11ª Poll. 0. 1,32	17ª Poll. 0. 1,30	23ª Poll. 0. 1,30
5ª Poll. 0. 1,30	12ª Poll. 0. 1,25	18ª Poll. 0. 1,25	24ª Poll. 0. 1,29
6ª Poll. 0. 1,30	13ª Poll. 0. 1,30	19ª Poll. 0. 1,30	25ª Poll. 0. 1,34
7ª Poll. 0. 1,30			

Media di tutte Poll. 0. 1, 30 ½.

Osservazione per la determinazione della grandezza del diametro dell' immagine focale della luna dei giorni 2, 4, 6, 7 del mese suddetto.

Ottob. *h* 7. 15' sera.	4. *h* 7. cir' sera.	6. *h* 7. 15' sera.	7. *h* 8. cirª sera.
	Osser. 4ª Poll. 0. 0,80	Osser. 14ª Poll. 0. 0,85	Osser. 21ª Poll. 0. 0,87
ser. 1ª Poll. 0. 0,85	5ª Poll. 0. 0,87	15ª Poll. 0. 0,88	22ª Poll. 0. 0,80
	6ª Poll. 0. 0,85		23ª Poll. 0. 0,84
2ª Poll. 0. 0, 90	7ª Poll. 0. 0,82	16ª Poll. 0. 0,87	24ª Poll. 0. 0,84
	8ª Poll. 0. 0,87		25ª Poll. 0. 0,86
3ª Poll. 0. 0, 87	9ª Poll. 0. 0,87	17ª Poll. 0. 0,88	26ª Poll. 0. 0,90
	10ª Poll. 0. 0,82	18ª Poll. 0. 0,80	27ª Poll. 0. 0,87
	11ª Poll. 0. 0,84		28ª Poll. 0. 0,85
	12ª Poll. 0. 0,85	19ª Poll. 0. 0,85	29ª Poll. 0. 0,87
	13ª Poll. 0. 0,85	20ª Poll. 0. 0,82	30ª Poll. 0. 0,86

Media di tutte Poll. 0. 0, 85 Differenza Poll. 0. 0,45 ½.

Angolo formato nel foco immaginario del Sole Gr. 13 25'.
Angolo formato nel foco immaginario della Luna Gr. 13 47'.
Differenza . . . 0 22.

Rifrazione orizzontale secondo le Tavole del Bradley (*Connaissance des Temps An. XV*) competente all' angolo solare . . . 32' 53", 8.

Rifrazione Lunare secondo i miei calcoli supposta vera quella del Bradley per il Sole, e competente all' angolo Lunare sopra notato . . . 33' 47", 8 c.ª

ESAME

DI ALCUNI TENTATIVI DI SOLUZIONE DI UN FAMOSO PROBLEMA DI MECCANICA STATICA

Del Sig. Michele Araldi

Ricevuto il dì 18 *Aprile* 1806.

CHe il Mondo sia stato consegnato alle dispute interminabili degli Uomini è sentenza nota e celebre e niente bisognosa delle prove e conferme, che offerteci in folla dalla giornaliera sperienza sono rendute superflue dall' autorità infallibile dell' oracolo, che primamente la pronunziò. Dello studio della Natura sembra infatti lecito il dire, ch' esso per poco non è tanto un campo, che gli Uomini mirino a coltivare, quanto una specie di steccato, in cui discendono a battagliare, per tal modo trovansi essi continuamente alle prese gli uni cogli altri. Ma se in questo studio gli ostacoli, che si paran loro davanti per ogni dove, e l' oscurità, di che la Natura si avvolge, rendono inevitabile e la frequenza degli errori, e il conflitto delle opinioni, ben pare che dell' un danno e dell' altro dovrebbero essere immuni le Scienze, che versano sopra nozioni dagli Uomini stessi in certa guisa create, e alle quali conseguentemente è in loro balia di aggiugnere la precisione, e perspicuità ed esattezza richiesta come a tener lontano l' errore, così a chiuder l' ingresso a qualunque division di pareri. E non pertanto alcuni esempii di questa incontransi fino nelle Matematiche pure, non senza forse qualche sorpresa e qualche scandalo de' Profani, che non sono la più parte in istato di comprendere come in simili incontri le dispute, più che non da veri dubbii e fondati, partano per solito da meri equivoci. Se, come tutto cospira a persuadercene, la Meccanica teoririca non a torto pretende di sostenere nella certezza metafisica de' suoi principii il confronto delle Matematiche pure, sorgendo in essa dispute, dovrebbe dirsi che qualche equivoco le faccia nascere, e concorra a mantenerle. Intorno a che mi si permetta di avventurare il sospetto, in cui sono, che un simil giudizio portar debbasi d' una controversia, che bolle da qualche anno in Italia intorno al Problema denominato degli appoggi, e renduto celebre dal numero e dalla celebrità de' Matematici insigni, de' quali ha desso, per quanto sembra, delusi fin' ora gli sforzj estremi diretti a renderne in ogni caso determinata la soluzione. Ad ottenerla tale si lusingò d' esser giunto l' Eulero, che da prima propose il Problema, ed essendosi accinto a scioglierlo, inciampò in un abbaglio, che non tolse ad altri la speranza d' essere più fortunati. Poichè gli scritti comparsi su questo argomento in Italia trovansi la più parte consegnati ai volumi di questa nostra Società; non isdegnino i valentuomini, che mi hanno preceduto, ch' io entri a prender posto fra essi, e inserisca in questo stesso deposito le presenti mie riflessioni. Per esse senza arrogarmi di decidere una controversia tanto famosa, ritengo qualche fiducia di riuscire a mostrare che trattasi di un Problema essenzialmente e per propria indole indeterminato. Forse, giacchè gli Atti di questa lite trovansi sparsi assai e divulgati, non è male il prevenire gli avvisi e le ammonizioni, che per parte di qualche Oltramontano potessero per avventura giugnere agl' Italiani di cessare omai da un' impresa d' impossibile riuscimento.

Difetto della soluzione di Leonardo Eulero.

Giova ritenere l' enunciazion del Problema, qual Eulero lo propose da prima, invitando i Matematici ad occuparsene. Concepiscasi un Corpo collocato sur un Piano rigido e immobile, cui esso tocchi e prema in un numero determinato di punti. Sia noto il peso del Corpo, e ne sia pur noto il centro di gravità; cioè il punto, in cui una normale abbassata da detto centro sul Piano, lo incontrerebbe: per ultimo sia noto il numero e la posizione de' punti toccati e premuti dal Corpo. Si tratta di determinar la pressione sofferta da cadauno de' detti punti. Nel tentar di sciogliere generalmente questo Problema non tardò l' Eulero ad accorgersi che i soli comuni principii della Meccanica non bastavano all' uopo. Le formole analitiche esprimenti le pressioni, alle quali guida la semplice applicazione di que' principii, tosto che il numero de' punti premuti sorpassa il tre, riescono indeterminate, e vestono irreparabilmente l' aspetto della nota frazione, in cui nello zero diviso da zero gli Analisti ravvisano l' indizio e il criterio della indeterminazione. A toglier di mezzo l' inciampo ha ricorso l' Eulero a una ipotesi. Se concepiscasi, dice egli, che le pressioni esercitate da un Corpo sovrapposto a un Piano contro ai punti, ai quali si appoggia, vengano rappresentate da linee rette innalzate normalmente sopra i punti corrispondenti, queste linee avranno, secondo lui, per luogo, come suol dirsi, geometrico un Piano. Infatti, egli aggiunge, se immagineremo che il Piano divenga per un istante tutt' all' improvviso un tal poco molle e cedente, i punti del Corpo si profonderanno in esso qual più qual meno per una discesa momentanea, scorrendo spazietti proporzionali alle pressioni, ed esprimenti queste stesse pressioni. Di questi spazietti non potrà non avverarsi, che i loro estremi appartengano tutti allo stesso Piano, siccome quelli a cui simultaneamente giungono nel discendere i punti del Corpo appartenenti senza dubbio tutti ad un Piano. Dunque le linee proporzionali a questi spazietti, ossia alle pressioni avranno a luogo geometrico un Piano. Con questo dato accoppiato agli altri offertigli da noti principii della Meccanica avvisò l' Eulero di poter giugnere all' intento. Ma per una di quelle inavvertenze, a cui qualche volta anche i grand' uomini vanno soggetti, ei trascurò di osservare che appunto perchè i punti del Corpo nello scendere non cessano di appartenere allo stesso Piano, cioè sono vincolati essenzialmente gli uni cogli altri, della discesa di cadaun d' essi si risente quella degli altri; ch' essi modificano scambievolmente questa discesa cosicchè non può dessa rappresentare acconciamente la pressione esercitata dianzi da cadaun punto sul Piano supposto rigido e immobile . Queste pressioni erano tali, quali avrebbe potuto farle sorgere un sistema di corpi sciolti e disgiunti affatto gli uni dagli altri . L'ipotesi dunque, e le speranze, che su di essa fondò l'Eulero, sono in tutto illusorie . Egli è il vero, ch' ei valendosi della sua ipotesi giugne nel caso de' tre soli appoggi, a quella stessa determinata soluzione, a cui guidano i principii ordinarii della Meccanica . Ma questa specie di accidente non è già una presunzion favorevole, da cui sia lecito d' inferire la legittimità dell' ipotesi . A mio avviso ciò accade perchè nel caso de' tre punti, e in questo solo, sieno i punti vincolati o no, non ponno essi nel discendere non ritrovarsi in un Piano . Del resto confesso che il discorso da me fatto non è quasi che una specie di commento del breve cenno, con cui il chiarissimo e acutissimo Sig. Paoli additò l' abbaglio dell' Eulero .

Tentativo del Sig. Lorgna e riflessioni su di esso .

Dell' illustre Fondatore della Società nostra è noto che in lui all' acutezza e al vigor dell' ingegno accoppiavasi quella tempera d' animo nobile ed elevato, per cui chi n' è fornito amoreggia le imprese più ardue ; nè gli ostacoli bastano a sconfortarlo, ma lo irritan piuttosto, e gli servon di stimolo, e in più incontri di cose, onde giugnere a vincerli . Il perchè non è a stupire ch' ei volesse pure esperimentar le sue forze intorno a un Problema, che aveva resistito a quelle d' un Eulero . Il successo per vero dire non corrispose al coraggio e alle speranze . Parecchi anzi non tardarono ad avvertire che il tentativo reggevasi sur un principio arbitrario . Poichè tuttavia non mi è noto che niuno abbia mostrato, in che ne consista precisamente l' inutilità; e che d' altronde mi verrà il destro di recare qualche osservazione applicabile ad alcune soluzioni uscite in luce posteriormente, chieggo licenza di poter riferirlo e disaminarlo alquanto estesamente . Delle regole ordinarie della Meccanica è d' avviso il Sig. Lorgna, ch' esse bastino all' uopo di sciogliere generalmente il Problema ove loro si associi un suo nuovo principio da niuno non per anche avvertito, e cui giova espor tostamente, giacchè nella esposizion dello stesso è rinchiusa quella dell'intero tentativo. Venga il Corpo sostenuto su quattro soli punti del Piano immobile. In questo caso e in ogni altro di un numero maggiore di punti non sono giunti i Meccanici a determinar la pressione sofferta da cadaun punto; e ogni loro artificio riesce a voto salvo che nel caso di due punti, e in quello pure di tre: anzi in quest' ultimo, se i tre punti sieno posti nella stessa linea retta, rivive e risorge la nemica indeterminazione; e infetta, e macchia indelebilmente la soluzione, a cui giungono. A cessar tanta molestia osserva il Sig. Lorgna, scegliendo il caso de' quattro punti, che ponno questi concepirsi combinati assieme a tre a tre; cosicchè ne risultino quattro combinazioni, o come ei li chiama, sistemi di tre punti cadauno, i quali sistemi, affinchè l'immaginazione riesca con meno fatica ad afferrarli, ponno col soccorso di linee rette condotte da un punto all' altro concepirsi trasformati in quattro triangoli descritti sul Piano, a cadaun angolo de' quali corrisponde uno de' quattro punti, che reggono il Corpo. Di questi quattro sistemi due vengono per lui detti attivi, due inutili. Ei chiama attivi quelli, che nel triangolo corrispondente rinchiudono il punto, in cui una normale abbassata sul Piano dal centro di gravità del Corpo, taglia il Piano stesso; inutili quelli, che non comprendon quel punto. Posto ciò egli osserva, che de' due sistemi attivi potrebbe l' uno indipendentemente dall'altro sostenere il peso intero del Corpo; poichè per l' una parte il Piano è immobile, e per l'altra cadauno nel triangolo corrispondente rinchiude il centro di gravità. Ma siccome non ponno essi non sostenerlo congiuntamente, non essendo essi che due diverse combinazioni di que' quattro punti, a cui realmente il Corpo si appoggia, gli sembra lecito d' inferirne che debbano concorrere egualmente a sostenerlo; ossia che il peso del Corpo debba distribuirsi e spezzarsi egualmente fra l' uno e l' altro. L' Autore ottiene speditamente l' intento con questo soccorso, in faccia del quale, sgombra ogni indeterminazione; e giacchè il resto è un affare di puro calcolo, le pressioni ni sofferte da cadaun punto ci si presentano in ultimo espresse da formole di un certo e determinato valore.

Giova prima di tutto esaminare il motivo, per cui il Sig. Lorgna si mostra persuaso che la Meccanica per l' una parte abbisogni di nuovi soccorsi, e per l'altra, malgrado l'austerità sua, vorrà apporre per così dire il suo marchio a un principio di lega manifestamente inferiore agli altri da essa impiegati. Il principale e anzi unico di questi motivi è il seguente. Osserva egli che la Natura in mille incontri certamente scioglie compiutamente il Problema; ch' essa in niun caso non si mostra mai indecisa. Or se ciò è vero, per qual motivo dovrà esser disdetto alla Meccanica teorica di giugnere a scoprire il valore di quelle pressioni? Forse che non è dessa conforme in tutto alla Meccanica, a cui la Natura obbedisce? che non procede reggendosi su gli stessi principii? Se non vi è giunta per anche, vuol dire che i mezzi da essa posseduti non bastano all' uopo; non vuol dire che l' acquisto di altri mezzi, de' quali appartiene ai Matematici di provvederla non possa metterla in istato a qualche tempo di giugnervi. Questo argomento specioso a prima vista è l' Achille dell' Autore, a cui è giunto ad imporre, sebbene non sia poi tanto formidabile, che osservandolo con occhio riposato, non si scorga senza stento, dove annidi l' equivoco.

È vero che in ogni caso speciale ognuno de' quattro punti del Piano soffre una determinata pressione; ma è vero altresì che il corpo esercita quella determinata pressione con quattro determinati suoi punti, con quelli cioè che in ogni caso speciale combaciano co' quattro punti del piano. È questa una condizione, che non può in ogni incontro non avverarsi. Ma di essa nè si fa motto, nè si tien conto nel Problema, qual se lo propongono i Meccanici, che prescindendone si arrestano nella considerazione de' quattro punti o fulcri, che sostengono il Corpo; della posizion loro rispettiva; e di quella pure del centro di gravità del corpo sostenuto. Or potendo questo collocarsi su quattro punti del Piano in più guise e diverse e per modo che agli stessi quattro punti del Piano corrispondano ad ogni nuova posizione quattro nuovi punti del corpo senza che per questo cangi luogo il centro di gravità; o ciò, che torna allo stesso, essendo lecito di concepire che altri ed altri corpi pesanti come il primo, e il centro di gravità de' quali coincida pure con quello del primo, ma diversamente conformati e voluminosi vengano allo stesso sostituiti, è manifesto che per siffatte sostituzioni potrà cangiarsi la distribuzione della carica totale sopra i sostegni, che soffriranno cariche diverse, sebbene la somma ne rimanga sempre la stessa. I Meccanici in una parola propongonsi un Problema astratto, e la Natura scioglie problemi concreti. Però non è a stupire che la soluzione, a cui giungono, lo dichiari indeterminato. Nè per questo debb' essa sbagliarsi per difettosa. Essa ha tutta l' esattezza, che le compete, se colla indeterminazione, in cui lascia il Problema ne avvisa ed informa del numero indefinito de' Problemi concreti in esso rinchiusi. E a gran torto certamente l' Analisi e la Meccanica conosciute si biasimano di ciò, di che loro piuttosto debbesi saper grado, avverandosi anche in questo incontro, come in tanti altri che il simbolico loro linguaggio adegua l'ampiezza illimitata della Natura.

Ma quì a taluno potrebbe affacciarsi un dubbio non molto fondato, e cui non pertanto mi giova sciogliere nella lusinga di svolgere alquanto la metafisica di questa specie di ricerche meccaniche; la qual Metafisica, comechè non abbiavi Matematico di qualche polso, che non conosca, pur temo che qualche volta venga dimenticata. Dirà forse taluno. Convengo che il Problema, qual i Meccanici lo si propongono guidi ad uno scioglimento indeterminato. Ma se venga esso modificato un tal poco, se cerchisi per mo' di esempio, qual pressione una forza applicata ad un punto di un piano sostenuto da più di tre fulcri immobili faccia sorgere in cadaun d'essi, com' è che anche questo Problema rimansi fra le mani de' Matematici indeterminato? direm noi ch' esso fra quelle della Natura sia tale? Oh che è troppo manifesto che la Natura non rimane mai indecisa. Resta dunque che s' inferisca non essere per anche il nodo sciolto compiutamente; abbisognar tuttavia probabilmente la Meccanica di nuovi soccorsi;

si ; e adoperar saggiamente que' Matematici, che pensano ad arricchirnela.

Non mi arresto attorno a questo dubbio che all' oggetto di palesare ognora meglio l' origine di quella indeterminazione, che giudico inevitabile ed essenziale a questa sorta di problemi. A motivo di chiarezza scelgo l' esempio sopra ogni altro semplice di tre fulcri posti in linea retta, sopra de' quali attraverso a una verga rigida stesa su di essa agisca una forza applicata a un punto di detta verga. A scoprire il valore delle tre pressioni sofferte dai tre fulcri non ci si presentano che due equazioni, offerta l'una dall' eguaglianza, che passar debbe tra la forza applicata alla verga, e la somma delle tre pressioni; tratta l' altra dalla proprietà de' così detti momenti. Attesa la semplicità del caso è manifesto che nella Meccanica teorica e astratta non è possibile di aggiungere niun altro dato ai due, ch' essa possiede. Il Problema è dunque essenzialmente indeterminato. Nè vale il dire che la Natura lo scioglie compiutamente. Essa ne' casi concreti lo scioglie perchè in questi non mancano mai condizioni, e circostanze Fisiche, che tolgon l' indecisione. Di siffatte circostanze fisiche indefinitamente numerose e svariate non può, nè debbe tener conto la Meccanica astratta, o a meglio dire essa le abbraccia tutte, lasciando indeterminata la soluzion del Problema. Che se a qualche Matematico venga per avventura il capriccio di renderlo determinato, valendosi di un nuovo dato o principio; se a cagion d' esempio osservi che ponno i tre fulcri concepirsi combinati a due a due, cosicchè ne sorgano tre sistemi di due fulcri cadauno, tra i quali due n' ha sempre, che potrebbero sostenere disgiuntamente l' intera forza; e però si creda lecito d' immaginare, che questa dovendo pur agir sopra entrambi, possa concepirsi divisa fra entrambi egualmente, se, dico, qualche Matematico proceda e riesca all' intento in tal guisa, niuno sarà tanto scortese e salvatico, che negar gli voglia un sì innocente trastullo. Ben non sarà disdetto di avvertirlo ch'ei probabilmente si prende una poco util fatica; che il Problema per lui sciolto non appartiene nè alla Meccanica astratta nè alla reale. Non a quest' ultima, perchè senza dubbio in ogni caso speciale e concreto non mancano mai dati e condizioni, che combinate co' principii ordinarii della Meccanica pongono la Natura in istato di scioglierlo compiutamente; non alla teorica, a cui certamente è disdetto d'introdur principii, de' quali non si possa credere fondatamente che la Natura gli adotti. Or poichè questa può farne senza ottimamente, e che le circostanze fisiche compagne indivisibili e necessarie di ogni caso speciale la mettono in istato di non abbisognarne è manifesto ch' essa nè gl'impiega, nè gli adotta.

Digressione su la controversia, se le leggi della Meccanica sieno necessarie o contingenti.

Sembra lecito di sospettare che que' valentuomini, i quali nell' accesa brama di ottenere una soluzion generale del Problema degli appoggj credon necessario di provveder la Meccanica di nuovi ajuti, intendano che que' principii, a cui essi hanno ricorso, sieno non solo legittimi, ma modellati per così dire nelle stesse forme, da cui uscì, sono omai venti secoli, il principio dell' indifferenza posto dal sommo Archimede alla testa della medesima. Non si tratta forse a parer loro che di allargare questo principio, e di dargli una maggiore estensione. Forse che, dirà taluno, potendo sì l' uno che l' altro di due sistemi di fulcri sostenere un certo peso, e dovendo sostenerlo congiuntamente, non è chiaro che la Natura indifferente a far cader maggior carica piuttosto su l' uno, che sull'altro, sceglierà di caricarli egualmente? Tal' altro pure pretenderà che per lo stesso motivo tutte le volte che la Natura si troverà in circostanze simili, debba essa operar similmente. Ma davvero che queste idee, anzi che allargare il principio dell' indifferenza, temo assai che lo travisino, e lo trasformino in un altro, che potrebbe forse acconciamente appellarsi il principio della convenienza; nome, che volendo introdurlo in una Scienza sì austera, qual è pur la Meccanica, sembra che porti con seco la sua condanna.

Se infatti si penetri alquanto più addentro colla ragione, e col senno nella natura intima di questi oggetti non peneremo forse ad accorgerci che il principio dell' indifferenza confina, e per pochissimo non coincide con quello della contraddizione. Nell' avventurare questa proposizione io che mi trovo a fronte una folla di Metafisici, quelli, che su le orme del Leibnitz, disputando se le leggi della Meccanica sieno necessarie o contingenti, anzi che dal principio della contraddizione amano di derivarle da quello della ragion sufficiente; e ad esse però rifiutano quella inflessibile autorità, che loro si accorda da quelli, che le appoggiano al primo de' detti principii. Senza entrar di proposito in una quistione sì ardua, non mi credo disdetto di osservare che forse non è poi tanto certo ciò, che a favore della contingenza delle leggi meccaniche recasi dal Sig. Beguelin in una Memoria inserita ne' volumi dell' Accademia di Berlino, laddove dice ch' esse partono manifestamente dal principio della Ragion sufficiente, i diritti del quale non si estendono che su le verità contingenti. Ei crede di provarlo coll' osservare che nel caso semplicissimo della Leva; su cui a distanze uguali dal fulcro agiscano forze uguali, essendo essa indifferente a muoversi piuttosto in un senso che in un altro, però sta ferma, e le forze si bilicano, perchè non avvi ragion sufficiente, che la tolga da quello stato. In tal guisa pare che il principio dell' indifferenza coincida con quello della Ragion sufficiente. Ma se si interpreti la cosa alquanto diversamente; se dicasi che però la leva resta immobile, perchè non potrebbe moversi senza che delle due potenze l' una superasse l' altra, ossia senza che fossero esse a un tempo eguali, e disuguali, il che è impossibile, scorgesi con bastevol chiarezza, che il principio della indifferenza coincide con quello della contraddizione: la qual conseguenza, ove venga accordata renderebbe le verità meccaniche certe e necessarie di una certezza e necessità assoluta ed eterna quanto le geometriche. Nell' adottare infatti questo concetto della certezza propria delle verità meccaniche consentono omai i Matematici più reputati sì nostri che esteri; tra i quali alcuni per altro accoppiano allo stesso idee, che, se non erro, vengon con esso palesemente a contrasto. Come a cagion d' esempio accade al famoso Sig. d' Alembert, il quale dopo aver recato alcune prove a favore della necessità delle leggi meccaniche aggiugne, o s' infinge almeno di credere, ch' esse avrebber potuto esser diverse da quel che sono.

E parimente, affine di frapporre un' altra osservazione suggeritami dal filo delle idee, di cui mi occupo, dalla supposizione che le verità meccaniche nella certezza sostengano il confronto delle geometriche, sembra lecito d' inferire che lodevoli riguardo al fine, ma non egualmente forse riguardo all' esito sieno gli sforzi del Maupertuis inteso a stabilire la prima verità della Teologia naturale sopra un certo minimo, ch' ei chiama di azione, e che interviene ne' casi qualunque di cambiamento di stato de' corpi condotti ad agire gli uni su gli altri. È manifesto che quel minimo partecipando della necessità assoluta, che nella detta ipotesi il principio della contraddizione diffonde su tutta la serie delle verità meccaniche, e conseguentemente non avendo potuto riguardo allo stesso essere luogo a scelta, non può gran fatto servire all' uso, a cui si destina. Di che per altro non ha quella nobilissima Scienza motivo di molto dolersi; giacchè a stabilire l' augusta verità, di cui parlo, possiede argomenti sì vittoriosi che può sdegnare ogni maniera di prove esposte a qualche eccezione.

Ma troncando omai una digressione forse soverchio dilicata, si lasci pure indecisa, questa nobilissima controversia su la necessità, o contingenza delle leggi della Meccanica. Rimanga pur dubbio a quale de' due principii o della contradizione, o della Ragion sufficiente abbia la Natura raccomandata e sospesa la catena delle verità meccaniche, malgrado questa incertezza par manifesto che non convenga a un Matematico l' introdurre in questa Scienza principii, de' quali sia impossibile lo scioglierli in ultima analisi nel principio della contraddizione. Or a questa eccezione è visibilmente esposto il principio del Sig. Lorgna, essendo manifestissimo che la distribuzion disuguale della forza di un Corpo fra due sistemi di fulcri atti egualmente a sostenerla non involve contraddizione tutte le volte che ne turba l' uguaglianza, che passar debbe tra la forza stessa e la somma delle pressioni sofferte dai fulcri; nè parimente altera il luogo e il punto, in cui, coincidendo col centro di gravità del corpo, cade la così detta resultante delle pressioni medesime. Siffatti principii non ponno sperare d' essere accolti in una Scienza, che aspira al grado di quell' assoluta certezza, cui raggiungono le dottrine geometriche, e a cui non può dessa pretendere salvo che procedente collo stesso assoluto rigore. Ben pare anzi che non possa essa adoperare altrimenti; mentre valendosi ad ogni momento delle verità geometriche, di cui si rinforza ed assoda, e che incorpora e fonde ne' suoi ragionamenti, non può non adottare i principii, che loro servon di base. Senza ciò essa si esporrebbe al risico di non poter più rappresentar degnamente il piano e sistema quanto magnifico altrettanto solido adottato in Meccanica dalla Natura; nè più le competerebbe quel grande ed unico privilegio, per cui mercè le applicazioni numerosissime, che riesce a fare, de' suoi teoremi e delle sue verità astratte alla natura corporea e ai fenomeni di questa, in essa ci si offre una specie per così dire di ponte di aperta e sicura comunicazione fra il Mondo intellettuale e il Mondo reale.

Dubbii proposti ai Chiarissimi Sigg. Delanges e Malfatti.

Anche i dottissimi miei Colleghi Delanges e Malfatti hanno voluto intorno al Problema degli Appoggi esperimentare le loro forze proporzionate senza dubbio ad ogni più ardua intrapresa, e nel tentar questo guàdo mostrano qualche lusinga di riuscire ad evitare gli scogli, ne' quali urtò e ruppe l' Eulero. Su i tentativi loro chieggo rispettosamente licenza di movere, o più veramente di assoggettare al loro imparziale giudizio alcuni pochi miei dubii.

E facendomi prima dal Sig. Delanges, questi si mostra persuaso che il Problema degli appoggi nel caso anche nel quale il corpo posa su tre soli punti, non debba confondersi con quello, per cui data una potenza applicata normalmente a un piano, e a un dapato punto di questo, e considerandola come la resultante di tre altre, si tratti di determinare il valore di queste dipendentemente dalla notizia de' luoghi e punti del Piano, a cui esse pure si concepiscono normalmente applicate. Di questo secondo Problema ci concede, che sia di pertinenza della dottrina delle potenze parallele del primò non già. Intorno a ciò si degni il mio rispettabilissimo Collega di soddisfare alla seguente domanda, ch' io gl' indirizzo al solo fine di essere tratto di un inganno, da cui confesso che s' ei non si compiace d'assistermi nen mi è possibile di uscire. Suppongasi che il Corpo posto su tre punti del Piano immobile ed inflessibile venga sostenuto non più da questo, ma da un Piano rigido soltanto, e a un tempo nè immobile nè pesante. Ad impedire che questo Piano non ceda, nè sia strascinato al basso, basterà senza dubbio l' applicare al disotto dello stesso nel punto direttamente opposto al centro di gravità del corpo una forza, che agisca dal basso verso l' alto uguale precisamente al peso del corpo. Questa forza applicata nel modo supposto non solo impedirà la discesa del piano, ma non permetterà nè anche che in esso sorga niun movimento rotatorio. Infatti essa se fosse senza l'interposizion del Piano applicata immediatamente al Corpo, passando pure pel suo centro di gravità, non ha dubbio ch'esso rimarrebbesi equilibrato in tutti i sensi; dunque esso questo stesso Corpo concepito sul Piano esercita pressioni incapaci di far sorgere in esso movimenti rotatorii nell' atto che la forza applicata, come è detto, di sotto in su ne impedisce la discesa; dunque le pressioni corrispondono con assoluta uguaglianza a forze applicate agli stessi punti, e che avessero per resultante una forza uguale al peso del Corpo, e applicata al punto corrispondente al centro di gravità dello stesso. Dunque la ricerca di dette pressioni è un Problema identico a quello della ricerca di queste ultime forze; nè avvi niuna essenzial differenza fra l' uno e l' altro, e sì l' uno che l' altro dipende dalla dottrina delle potenze parallele.

Dal concetto che il Sig. Delanges si è formato nell' animo della natura del Problema partono le eccezioni da lui date alle so-

soluzioni recatene da altri, a cagion d'esempio a quella , che ha per vero dire tutti i caratteri di legittima, a cui nel caso de' tre punti , evitando ogni indeterminazione , giugne il Bossut . Il raziocinio, a cui questi appoggia la sua soluzione può, ritenendo la teoria delle potenze parallele , esporsi in questo modo . Qualunque sieno (Fig.ª 1.ª) le pressioni sofferte dai punti A , B, può concepirsi senza dubbio che alle forze , che si bilicherebber con esse , sia sostituita una resultante . Or questa dove caderebbe ? Certamente nella linea AB, e cadendo in questa non potrebbe non essere uguale alla loro somma . E in qual punto inoltre di questa linea caderebbe ? Certamente in un punto D tale, che guidando da esso una retta al punto C in questa rimanesse compreso il punto P , che corrisponde al centro di gravità , ossia quello , in cui cade la resultante di tutte e tre le pressioni . Questa considerazione guida il Sig. Bossut alla determinazione delle tre pressioni ; ed essa basta all' uopo, e per giugnervi si può prescindere dalla considerazione del Vette ; la teoria del quale emana per altro da quella delle potenze parallele sì vicinamente e necessariamente , che forma un tutto con essa . Procedendo con questo metodo , vale a dire attenendosi e impiegando la dottrina delle potenze parallele, almeno fino a tanto che il Sig. Delanges non abbia mostrato concludentemente che il Problema degli Appoggi pende da un' altra teoria, si scorge subito il motivo per cui nel caso de' tre punti se ne ottiene una soluzione determinata. Questa si ottiene, perchè come si è veduto e mostrato non può non essere determinato il punto D, che non può non ritrovarsi nel concorso delle due rette AB, CP prolungata fino a tagliare la prima. È questa singolarità, propria del caso de' tre appoggi quella che scancella ogni indeterminazione ; la qual sorge tosto che. come immagina il Sig. Delanges , i tre appoggi vengono trasportati su la stessa linea retta . In questa ipotesi svanisce il punto D , e con esso svanisce , risponderebbe il Sig. Bossut , l' eccezione data dal Sig. Delanges alla mia soluzione .

Per simil modo l' Eulero non penerebbe forse a rinvenir risposte e difese contro gli attacchi mossigli dal nostro egregio Collelega. In lui al saper sommo accoppiavasi il più puro amore del vero. Ei non esiterebbe a riconoscere la forza irresistibile dell' opposizione contro il principio per lui adottato mossa dal Sig. Paoli e da me sviluppata. Ma de' dubbii propostigli dal nostro Collega egli avvertirebbe che l'uno si riduce ad una semplice asserzione, dell' altro può sospettarsi che parta da un equivoco. Nel primo si dice che la soluzione recata dall' Eulero non è determinata, perchè se fosse tale, ove suppongasi (Fig.ª 2.ª) che il centro O di gravità del Corpo cada in un altro punto O' della linea OQ parallela alla AB, e che il sostegno B si trasporti in B' dovrebbero cangiar le pressioni sofferte da cadaun punto, e non già quelle de' soli punti A, B, come resulta dalla soluzione Euleriana, secondo la quale, malgrado il concepito trasporto, il punto C ritiene la pressione di prima. E bene, quale sconcio ha in ciò? direbbe l' Eulero. Come prova egli il Sig. Delanges che tutte e tre le pressioni dovrebber cangiare? Ei si contenta di asserirlo. Infatti impiegando alla soluzion del Problema la teoria delle potenze parallele i supposti trasporti non alterano punto la pressione in C; e questa conseguenza ci è pure offerta dal riflettere che la relazione fra i due triangoli ACB', AO'B' esprimente quella, che passa fra il peso totale del Corpo, e la pressione in C, è uguale a quella degli altri due triangoli ACB, AOB, che la esprimevano dianzi. Dell' altro dubbio si può temere, come ho avvertito, che consista in un equivoco. Si oppone in esso che nel caso anche, in cui il centro di gravità cadesse fuori del triangolo, agli angoli del quale son posti i fulcri; nel qual caso il Corpo dovrebbe senza dubbio rotolare, secondo la soluzione euleriana esso eserciterebbe pressioni, come in quello, in cui ne è sostenuto. Risponderebbe l'Eulero che in simil caso la pressione di uno di quelli appoggi, per esempio quella di A, (Fig.ª 3.ª) divien negativa. Io la stabilisco, esso direbbe $= G \times \left(1 - \frac{AP}{AB} - \frac{AQ}{AC} \right)$ che per chiarezza maggiore può trasformarsi in questa $G \times \left(\frac{AB \times AC - AP \times AC - AQ \times AB}{AB \times AC} \right.$. Or supponendo che per trasporto di B in B' il centro O cada su be la linea CB', questa formola, cangiato in essa AB in AB' a motivo della somiglianza de' triangoli AB'C, PB'O, per cui $AB' \times AC$ è $= AP \times AQ + AE \times AB'$ diviene $= 0$. Donde si vede che se per un trasporto ulteriore dell'appoggio B in B'' il centro di gravità cada fuori del triangolo, l'anzidetta pressione diverrà negativa, ossia che il punto A dovrà considerarsi siccome spinto all'insù; il che è lo stesso che il dire che il Corpo dovrà rotolare.

Conforme a questo può sospettarsi che sia un altro equivoco preso nell'applicazione delle formole esprimenti la pressione esercitata dal Corpo sopra tre punti del Piano al caso, in cui questi cadano nella stessa linea retta. Modificando queste formole, come a parer del nostro Collega richiede il nuovo uso, a cui le rivolge, ci crede di assicurarsi che due soli punti soffran pressione, quelli cioè, fra cui cade il centro di gravità; il terzo ne rimanga sgravato. Nel giugnere a questa conclusione gli è, per quanto sembra, sfuggito di tener conto del cambiamento essenziale, che nel passaggio di un caso all'altro sopravviene alle equazioni, da cui ricavansi quelle formole. Nel caso, in cui (Fig.^{a} 4.^{a}) il fulcro B situato fra gli altri due A, e C diviene il centro del movimento del peso totale concepito in G, e denominato g, e di due forze, che in direzione opposta a quella del peso si concepiscano agire ne' punti A, C, chiamando queste a, c, e le distanze loro dal fulcro o centro del moto B, f, m; e b quella del peso totale raccolto in G, l'equazione offerta dalla teoria de' momenti non è già, com' ei suppone $bg = fa + mc$; ma sibbene $bg = fa - mc$. Infatti in questo caso il peso posto in G, e la forza applicata in C si accordano a far nascer rotazione in senso opposto a quello, in cui tende a produrla la forza applicata in A. Debbe dunque aversi $fa = bg + mc$, ossia $bg = fa - mc$. Se il Sig. Delanges si compiacerà d'introdurre questa necessaria riforma in quella equazione, ei non penerà ad avvedersi che, accoppiandola colle altre i valori delle pressioni resultano $= \frac{0}{0}$, cioè indeterminati.

Mi accosto ora al dottissimo Sig. Malfatti e istantemente lo prego a permettermi ch' io m' intertenga per poco con lui sul tentativo di soluzione di questo stesso Problema, di cui ha egli arricchiti i Volumi della nostra Società; e per farmi strada cominci dall' aprirgli un mio timore, del quale ho dato qualche cenno in altro incontro.

Temo assai che ai Valentuomini, che sonosi esercitati intorno a questo Problema siasi sottratta una osservazione semplice al segno che potrebbe darsi che la stessa sua somma semplicità fosse concorsa a tenerla loro nascosta. Tengono essi fiso lo sguardo su i punti del Piano dati e noti, che sorreggono il corpo, e trascurano di por mente ai punti del Corpo, che combacian co' primi. Eppure non ha dubbio, che non debba tenersi conto anche di questi. Ponno agli stessi punti del Piano corrispondere altri ed altri punti del Corpo, ove questo cangi di posizione; e dipendentemente da questi cambiamenti cariche ognor diverse potranno sorgere su gli stessi punti del Piano. Or quì si osservi che nel caso di tre soli punti del Piano ogni cambiamento di posizione del Corpo, per cui cangino i punti ad essi corrispondenti del Corpo stesso, e assiem con questi cangin le cariche, sposta irreparabilmente il centro di gravità, e il punto, in cui una normale condotta da esso cade sul Piano: laddove nel caso di un numero di punti superiore al tre pel cambiamento di posizione del Corpo il centro di gravità può rimanere, ma può anche non rimanere spostato. Asserì il primo l' Eulero, e si dimostra facilmente che un Corpo (Fig.^{a} 5.^{a}) appoggiato a tre punti A, B, C, e il cui centro di gravità corrisponda al punto O, se concepiscasi che il suo peso intero sia rappresentato dall'aja del triangolo ABC, la carica del punto A sarà espressa dal triangolo OBC; quella del punto B dal triangolo OAC; e quella del punto C dal triangolo OAB. Quinci si vede subito che cangiando le cariche dovrà spostarsi il punto O.

Se poi il Corpo sia posto sopra i quattro punti *a*, *b*, *c*, *d*, (Fig.6) cangiandone la posizione potrà agevolmente accadere che la resultante delle tre cariche *a*, *b*, *c* cada in un punto *p* tale, che una retta condotta da esso al punto *d* passi pel punto O corrispondente al centro di gravità del Corpo; e potrà pure avverarsi che questa stessa resultante stia alla carica del punto *d* come me *do* a *po*; nel qual caso il centro di gravità, malgrado il cambiamento di posizione, riterrà il luogo di prima. O io molto m' inganno, o è questa l' essenzial differenza fra il caso de' tre appoggi, e quello di un numero superiore al tre; e questa differenza e pur quella, che rende nel primo caso determinato il Problema, indeterminato irreparabilmente nell' altro.

Ma quì opporrà per avventura taluno. Accordo, dirà egli, che sia invincibilmente indeterminato il Problema, qual fu da prima proposto, ma chi ne obbliga a concepire che quello che si ennuncia al presente dal Professore Malfatti sia identico al primo! Chi vieta ai Matematici di metter da parte la considerazione di un Corpo appoggiato con alcuni de' suoi punti a un Piano immobile e di restringersi piuttosto e cercar le pressioni, che una certa forza applicata a un punto di un Piano sostenuto da più fulcri fa sorgere in cadauno di questi? Esso presentato in questo aspetto forse che non merita che i Matematici se ne occupino? Eh ch' esso lo merita certamente, e ben ce ne assicura lo stesso nobil lavoro, con cui il Sig. Malfatti è giunto a scioglierlo compiutamente. Forse che, si aggiugnerà, non è desso alquanto diverso dal primo? A buon conto è manifesto che ad esso non competono le eccezioni per le quali si mostra indeterminato il primo, tratte dal concepire che il Corpo rotando attorno al suo centro di gravità presenti combinazioni ognor nuove de' proprii punti ai punti del Piano; ed è pur manifesto ch' esso tollera l' applicazione del nuovo principio introdotto dal Professore Ferrarese. In fatti se concepiscasi che nel bel mezzo di un Piano quadrato sostenuto agli angoli da quattro fulcri venga applicata una data forza, come può egli seriamente dubitarsi, che non giungano a cadauno di que' fulcri pressioni uguali! Or che altro è il dir ciò salvo che l' ammettere come principio opportuno a servir di base alle discussioni meccaniche che la Natura posta in circostanze simili opera similmente? E parimente se concepiscasi che sia applicata una forza ad un punto *p* di una linea, da cui venga tagliato in mezzo precisamente (Fig. 7) il Romisco *abcd* retto da fulcri posti ai suoi quattro angoli, è chiaro che qualunque pressione faccia essa sorgere nel punto *a* ne farà pur sorgere una eguale nel punto *b*. E se ciò è pur forza accordarlo, non è egli per ultima conchiusion manifesto che questa uguaglianza mette in mano all' Analista una condizion nuova, e un dato di più, che aggiunto agli altri rinchiusi nella enunciazion del Problema gli offre il modo di ottenere una soluzione determinata? Mi lusingo che a questo concetto, ch' io mi sono formato nell' animo delle mire e dello scopo del Chiarissimo Professor Ferrarese ei non rifiuterà la sua approvazione; e s' ei mi è di tanto cortese, confido pure che non vorrà adontarsi ch' io persista nell' opinion mia, e non cessi di dubitar fortemente che di qualunque tentativo diretto a sciogliere il Problema interpretato anche conformemente a questo concetto possa la Meccanica avvantaggiarsi di molto, e riporre i cosiffatti sforzi, e le soluzioni con essi ottenute fra le conquiste degne che se ne faccia conserva.

Rappresenti il Bomisco *abcd* un Piano rigido posto sopra i fulcri immobili *a*, *b*, *c*, *d*. Si concepisca applicata al punto *p*, preso nella normale *qr* condotta fra i due punti *r*, *q*, posti a uguale distanza l' uno da *a* e *b*; l' altro da *c* e *d*, la forza F. Si cerca se si abbia diritto di concepire e di ammettere come principio che questa forza F faccia sorgere pressioni uguali ne' due punti *a*, *b*; e parimente pressioni diverse dalle prime, ma uguali fra loro ne' due punti *c*, *d*. Non esito a dir che ne dubito. Nella Meccanica teorica e astratta la forza F applicata al punto *p* rappresenta a cagion d' esempio e tien luogo tanto di due forze applicate ai punti *m*, *n* della linea *rq* eguali cadauna alla metà della forza F e poste quinci e quindi a eguale distanza dal punto *p*; quanto di due altre forze eguali alle prime e poste similmente, ma su la linea $q' r'$, e applicate ai punti m', n' di questa.

Or queste ultime farebbero bensì sorgere ne' fulcri *a*, *b*, *c*, *d* pressioni, che nella loro somma adeguerebbero la forza F; ma non è mica certo che cadaun fulcro sarebbe premuto come dianzi, quando le due forze agivano su i due punti *m*, *n* della *rq*. In fatti al Piano *abcd* (Fig. 7) si concepiscano sostituiti i vetti inflessibili *ab*, *ad*, *bc*, *cd*; e in un caso stendasi su i vetti *ab*, *cd* *cd* il vette *rq* , nell' altro su i vetti *ab*, *ad* il vette *r' q'* . È manifesto che nel primo caso il vette *rq* recherebbe ai due punti *r*, *q* pressioni, che caricherebbero egualmente quinci i due fulcri *a*, *b* ; quindi i due *c*, *d*. Ma è chiaro per simil modo che pel vette *q' r'* non potrebbero giugnere a niun fulcro pressioni eguali a quelle di niun altro ; e che de' due fulcri *c*, *d*, il primo non sosterrebbe pression niuna . Ma il Piano *abcd* rappresenta sì l' uno che l' altro di questi sistemi di vetti, e anzi infiniti altri ; e quando il Meccanico teorico immagina una forza applicata al punto *p* implicitamente tutti gli abbraccia; dunque, ov' egli pur voglia attenersi ai suoi principii , non ponno non rimanere indeterminate le pressioni sofferte da quattro punti . In queste ultime parole intendo di rinchiudere la risposta a chi per avventura si facesse ad ammonirmi che nel mio discorso io non ho ritenuta pura , com' io doveva, l'ipotesi del Professore di Ferrara . Questi, mi si dirà, già non immagina che sul punto *p* del suo Bomisco cada una resultante , ma sibbene che una certa forza per esempio un certo peso agisca realmente contro quel punto . Va bene , ed io insisto , e chieggo ; con questo peso , che tende a spingere tutto il Piano all' ingiù, e così fa sorgere pressione ne' fulcri, qual forza potrebbe bilicarsi ed eliderla, ed annientarne gli effetti ? Una forza senza dubbio eguale a quel peso, e applicata , contro quel punto in direzione opposta ? Or questa forza si bilicherebbe per simil modo , ed eliderebbe , e annienterebbe ogni effetto su i fulcri *a* , *b* , *c* , *d* de' corpi *m* e *n* ; e de' corpi *m'*, *n'*, e così vie discorrendo di qualunque delle infinite combinazioni di pesi, che concepiti sul Piano avessero a resultante una forza , che corrispondendo al punto *p* adeguasse il peso , che si è supposto collocato realmente su quel punto . Dunque il Problema , qual la Meccanica teorica se lo propone , abbraccia tutti questi casi ; cadaun de' quali , giova ripeterlo , costituisce un Problema concreto e tale che tra le mani della Natura, a cui non si presentano salvo che problemi concreti, ammette una soluzione determinata .

Os-

Osservazioni sopra alcuni pochi luoghi di un' Opera intitolata = Della Dinamica *libri tre* = *Pavia*.

Anche con un nuovo Atleta, e quanto niun altro robusto, il mio assunto mi obbliga ad entrare in lizza con forze troppo disuguali. Un altro mio illustre Collega e Professore emerito dell' Università di Pavia in una sua eccellente opera in cui con molta estensione e accuratezza sono esposte le dottrine dinamiche, annunzia l'opinione che il Problema generale degli appoggi non sia in tutto indomabile. A parer suo esso probabilmente resiste alle industrie tutte dell' Analisi; ma giova sperare che a qualche tempo cederà a quelle della Sintesi; cui egli in fatti mette alle prove nel caso de' tre fulcri posti in linea retta, e in alcune poche e speciali combinazioni di quattro. Non gli rincresca che su questi tentativi e queste speranze io gli proponga alcuni pochi miei dubbii.

E riguardo al primo caso ei confessa che l' Analisi, impiegando la dottrina delle potenze parallele ne lascia irreparabilmente indeterminata la soluzione. Ma di questa egli opina che tra le mani della Natura riesca determinata, perchè de' tre fulcri posti sotto il corpo, o uno solo, cioè quel di mezzo ne regge l' intero peso; il che accade quando a questo fulcro corrisponde il centro di gravità, o due soli, quelli vale a dire fra i quali cade detto centro: il terzo ne rimane sgravato. È questo un punto di Statica intorno a cui, malgrado la sua semplicità, è d' uopo dire che, per una cotal nebbia, che lo intorbida e appanna penino i Meccanici a riunirsi nello stesso parere. Arrestiamoci coll' Autore sull' ipotesi sopra ogni altra semplice di un Prisma regolarissimo ed omogeneo steso sopra tre fulcri immobili posti l' uno precisamente sotto il punto di mezzo, gli altri ai due estremi del Prisma. Ei sostiene che il fulcro di mezzo regge tutto il peso, gli altri due non se ne accorgono. A provarlo ci fa il seguente ragionamento, cui giova trascrivere colle sue stesse parole = Imperciocchè (Fig. 8) qualunque parte del peso tu vogli che si ca-

carichi sopra B sia essa Π'; è evidente che equilibrandosi intorno a B le porzioni $\frac{\Pi'}{2}$, $\frac{\Pi'}{2}$ del peso de' segmenti OA, OC, gli estremi A, C non tendono a scendere in virtù del peso Π'; e quindi per rispetto agli appoggi A, C è lo stesso, come se il peso Π' alla trave mancasse. Supponendo dunque l'appoggio B già caricato del peso Π' noi siamo precisamente nel caso, in cui sopra gli appoggi A, B, C fosse collocata la trave LC della specifica gravità $\frac{\Pi-\Pi'}{LC}$; laonde il sostegno B dovrà pur reggere una parte di questo peso $\Pi-\Pi'$. Sia questa Π''. Siccome pel peso Π'' non tendono a scendere i punti A, C, di nuovo sarem nel caso, in cui fosse sopra i tre appoggi collocata la trave della specifica gravità $\frac{\Pi-\Pi'-\Pi''}{LC}$. Si rinnovi fino all'infinito questo raziocinio, e si conchiuderà che tutto il peso Π si carica sopra B, e nulla sopra A, C ne viene distribuito. Ma alcuno potrebbe volgere questo argomento così. Se da principio si supporrà che i due appoggi A, C sostengano la porzione Π' del peso totale, rispetto a B sarà come se essa mancasse, e però come se sopra i tre appoggi fosse collocata la trave $\frac{\Pi-\Pi'}{LC}$; onde col raziocinio stesso poco sopra adoperato verrebbesi a conchiudere che anche sugli appoggi A, C si viene tutto il peso a caricare. Chi però così rivolgesse l'argomento non conchiuderebbe nulla. Sebbene si volesse supporre che gli appoggi A, C reggessero il peso Π, questo medesimo con tutta la sua efficacia agirebbe per fare scendere il punto B della trave, ossia il suo centro di gravità, e però quel peso s'avrebbe a caricare sopra B; laonde non si può supporre ch'esso sia retto dagli appoggi estremi A, C. =

Confesso che la risposta, con cui si cerca di eludere l'eccezione data dall'Autore stesso al suo ragionamento non mi sembra in tutto soddisfacente. Suppongasi (Fig. 8) che dai punti L, M della trave prismatica partano verso l'alto in direzione verticale due corde ravvolte attorno a due pulegge, e che ne' loro estremi sostengano due pesi eguali, che presi assieme adeguino per esempio un terzo del peso della trave, e conseguentemente non bastino a sostenerla, e ad impedire ch' essa non discenda tratta al basso dagli altri due terzi del proprio peso privo di sostegno. Ad impedir questa discesa pongasi sotto il punto medio un fulcro. Direm noi che questo sosterrà una pressione eguale al peso intero? Eh che niuno nol dirà mai. Tutti scorgono che il fulcro non ne sosterrà che i due terzi; altrimenti converrebbe supporre che l' altro terzo premesse il fulcro a un tempo, e a un tempo pur sostenesse i due pesi, co' quali si bilica, pendenti dalle corde. Sostituiscansi ne' punti A, C a due pesi due forze, che agiscano dall' ingiù all' insù eguali cadauna al peso corrispondente. Proseguirà il fulcro B a sostenere una pressione eguale ai due terzi del peso della trave. A queste due forze per ultimo sostituiscansi ne' punti A, C due fulcri immobili, cosicchè si possano levar le forze senza che il terzo del peso cessi d' essere sostenuto. Tutto visibilmente rimarrà come prima. Or chi mi vieta di concepire che i due pesi pendenti dalle corde raggirantisi attorno alle puleggie per successivi aumenti crescano a tale da sostener tutta la trave? il peso della quale per le accennate sostituzioni potrà dunque concepirsi che venga trasportato e rivolto a caricare i due fulcri estremi A, C; cosicchè ne rimanga sgravato il medio. Sembra dunque che il ragionamento dell' Autore possa ritorcersi, e che sussista l' eccezione da lui stesso proposta.

Sembra eziandio che la via per lui detta sintetica, ch' ei s' ingegna di battere, non possa guidar meglio allo scopo dell' analitica. Sarebbevi mai dubbio ch' ei desse al centro di gravità più realità di quella, che i Meccanici comunemente ravvisano in questo punto? Pare ch' ei creda raccolta in esso realmente la gravità tutta di un corpo, quando a rigore può dessa soltanto in più incontri concepirsi in esso raccolta. Fra le altre espressioni sue movono in me questo dubbio le seguenti = I pesi de' segmenti OA, OC si equilibrano intorno a B, e tutto il peso tende a scendere nella verticale che passa per B non altrimenti che se fosse un punto pesante nella stessa verticale collocata. Pertanto il solo appoggio B porta il peso della trave = Io mo confesso, e finchè non mi si mostri concludentemente l'opposto, riterrò fermamente che ogni punto de' segmenti OA, OC tenda a scendere per la verticale a cadaun d' essi corrispondente , e nella direzion di questa premer possa gli ostacoli , che sono in istato di vietarne la discesa . Certo che un fulcro immobile posto sotto il punto di mezzo di una trave prismatica può , quando è solo , sostenerla ottimamente; ma perch' esso può sostenerla, non ne segue già che in ogni incontro lo faccia, e renda inutili due altri fulcri immobili quanto esso, posti agli estremi della trave. Nè serve il dire che senz' altro questi due fulcri sono inutili , perchè le due metà del Prisma , che co' loro estremi gli toccano , gli toccano solo , ma non si appoggiano; sostenendosi esse scambievolmente . Sostengansi pur quanto possono , ma per ciò che risguarda la tendenza loro a discendere , e a premere conseguentemente gli ostacoli qualunque , che incontrano ; questa verrà distrutta dal fulcro medio , se questo , come fa quando è solo , sostenga di per se tutto il corpo . Ma ciò è appunto di che si disputa .

Concepiscasi il Prisma steso orizzontalmente sopra una superficie inflessibile , e non pesante . Questa sarà pure premuta dal Prisma ne' punti tutti del mutuo loro combaciamento. Si ponga sotto essa corrispondentemente al punto medio del Prisma un fulcro immobile . Cesserà essa per questo di essere come dianzi premuta ? E di questa pressione da essa estesamente sofferta e che tende a spingerla al basso perchè non potranno accorgersi due altri fulcri posti quinci e quindi agli estremi ?

Se può dubitarsi fondatamente della solidità del discorso dell' Autore nel caso del Prisma sostenuto in mezzo e agli estremi; diviene pur vacillante l' altro in cui trattasi di un Prisma steso sopra tre fulcri disposti in modo, che fra due de' medesimi cada il centro di gravità . Certo che questi bastano a sostener tutto il peso, e a sgravarne il terzo . Ma ne segue egli per questo, che ne lo sgraveranno ? La porzione della Trave, o del Marmo a cagion d' esempio prismatico , che si allunga oltre il fulcro di mezzo è pur grave ? tende pure a discendere ? Questa tendenza potrebbe anzi esser tale che a motivo della lunghezza della

Trave o del Marmo prismatico, se non gli si sottoponga un terzo fulcro, il Prisma si spezzasse. Direm noi che su questo terzo fulcro si appoggierà e adagierà il Prisma nell' accorgersi del pericolo di spezzarsi; fuori di questo pericolo si restringerà a toccare il fulcro senza premerlo?

Ma tornando anche per un momento alla trave prismatica sostenuta nel mezzo, e ai due estremi; e cercando di penetrare anche alquanto più addentro in questo affare, forse non m' inganno nel sospettare che l' equilibrio concepito dall' Autore tra le due metà del Prisma reale senza dubbio venga da lui impiegato con soverchia estensione. Questo equilibrio si oppone al movimento rotatorio del prisma, cui esso impedirebbe quand' anche il fulcro di mezzo per la sua cedenza non bastasse a sostenere il Prisma, che discenderebbe senza rotare. A questa discesa, su cui non ha influsso quell' equilibrio, come può opporsi un semplice fulcro posto nel mezzo, così ponno opporsi i tre fulcri, che potranno dunque concorrere a sostenere la trave, il cui peso si distribuirà fra essi con una certa proporzione dipendente dalla lor posizione. Intorno a che parmi assai probabile che nel caso attuale il fulcro di mezzo sostenga la metà di quel peso, rimanendo l' altra metà egualmente divisa fra gli altri due. Suppongasi che la Trave per una sezione verticale corrispondente appuntino al fulcro di mezzo sia segata e divisa in due eguali sostenute cadauna quinci dal fulcro di mezzo, e quindi l' una dal fulcro destro, l' altra dal sinistro. È manifesto che in siffatta ipotesi i fulcri saranno premuti nella proporzione accennata. Vengano ora ad incollarsi e riunirsi in una sola trave le due metà dianzi divise. Questo cambiamento affatto estraneo al modo, con cui agisce la gravità non potrà produr niuna differenza, nè niun cambiamento nella distribuzione delle pressioni; che però rimarranno eguali alla metà del peso nel fulcro di mezzo; all' altra metà negli altri due presi assieme. Mi si additi di grazia, dove in questo discorso si rappiatti il paralogismo.

Ho detto che il nostro dottissimo Collega non contento di esperimentar le forze della Sintesi nel caso de' tre punti posti in li-

linea retta, studiasi anche di giovarsene in alcune speciali combinazioni di più di tre punti. Si fissi l' occhio su la Fig. 9, che ci offre una di queste combinazioni. Si tratta in essa di determinar la pressione che giugne ai punti o fulcri A, B, C, D; su i quali sono stese le verghe AB, CD, a motivo di un peso posto nel punto O di una verga MN, o di un'altra *mn*. Diverse sono le pressioni, che reca a que' fulcri la verga MN da quelle, che giungono ad essi per la verga *mn*. Ei ne inferisce che il Problema è indeterminato tutte le volte, che la posizione degli strumenti, che servono al trasporto delle pressioni non è data. Quando questa è data si mostra disposto a credere il Problema determinatamente solubile. Giugne anzi ad affermare che se il grave posa sur un Piano retto da quattro fulcri, il Problema è determinato, poichè il Piano stesso fa le veci di quattro verghe, che dal luogo del peso vadano a caricare immediatamente i fulcri suddetti. Anche quì mi corrono all' animo alcuni dubbii. Confesso che dubito assai che basti all' uopo la notizia della posizione degli strumenti. È inoltre necessario a mio avviso che il Problema possa trasformarsi in altri compresi nel caso di un numero di punti minore di quattro. Nella combinazione rappresentata dalla Fig. 9, se sia data la posizione della verga MN, non si tratta più che di assegnar le pressioni sofferte da due punti; prima de' punti M, N; poi, scoperte queste, da quella di M ottener quelle di A e B; da quella di N quelle di C e D. Or non par questo il Problema, che i più de' Meccanici dichiarano indeterminato. Il confonder l' uno coll' altro sembra un equivoco conforme a quello a un dipresso che prenderebbe un Analista, il qual pretendesse le equazioni del quinto grado algebraicamente resolubili, perchè ponno alcune nella soluzione di qualche Problema incontrarsene divisibili in equazioni di grado inferiore. Esse in siffatto incontro non sono quelle, di cui parlano gli Analisti, e delle quali l' illustre Ruffini gli ha costretti a deporre omai ogni speranza di giugnere a scioglierle.

Confesso pure ch' io dividerei con lui la lusinga di vedere sciolto il Problema compiutamente nel caso di un grave posto sopra di un Piano retto da quattro fulcri, se avessi veduto, ch' ei si fosse provato, e fosse pure riuscito ad ottenere una soluzione determinata nel caso e nella combinazione rappresentata dalla Fig. 9 quando il grave posto nel punto O agisce congiuntamente su le due verghe MN, *mn*; cioè ad assegnar le pressioni, che giungono non ai quattro punti A, B, C, D; ma sibbene ai quattro punti M, *m*, N, *n*. Finchè non veggo questa soluzione lo prego a permettermi di dubitare ch' essa possa ottenersi determinata. Veggo abbastanza palesemente che in qualsiasi modo si spezzi il peso O fra le due verghe, di quella porzione dello stesso, che per la verga MN si distribuirà fra i punti M, N, non potrà non avverarsi che le pressioni da essi sofferte sieno in ragione inversa delle distanze MO, NO; che lo stesso si verificherà dell' altra porzione qualunque di peso che la verga *mn* recherà e distribuirà fra i punti *m*, *n*. Non veggo altro, nè scorgo i mezzi, onde scoprire come quel peso si spezzi, e qual porzione ne tocchi all' una, quale all' altra di dette verghe.

Di una riduzione conforme alla sopra mentovata parmi suscettibile un' altra combinazione presentataci dalla Fig. 10 in cui a quattro fulcri posti agli angoli del parallelogrammo ABCD giugne pressione per parte di un grave posto in O, e recata agli stessi dalle verghe PR, ES parallele l' una alle verghe AD, BC; l' altra alle verghe AB, CD stese su i fulcri. L' Autore trova e determina con assoluta esattezza quelle quattro pressioni. Ma quì pure un facile calcolo ci assicura che, se il peso posto in O agisce su que' quattro fulcri, rimossa la verga PR, col solo soccorso della verga ES; oppure, rimossa questa, col solo soccorso della PR, sorgerebbero ne'detti punti le stesse pressioni e identiche a quelle, ch' ei trova valendosi di entrambe le verghe congiuntamente. Vuol dire che il grado del Problema è di due soli punti; che non si tratta, impiegando a cagion d' esempio la verga PR, che di assegnar le pressioni fofferte dai punti P, R; poi scoperte queste di assegnar quelle quinci de' punti A, B; quindi de' punti C, D. Quì pure ha luogo il desiderio che il chiarissimo Collega tenti le forze della sintesi su questa combinazione soltanto un tal poco alterata; vale a dire col semplice trasporto de'fulcri dai punti A, B, C, D ai punti P, R, E, S. Forse quest' altra combinazione gli offrirà ostacoli gravi assai, e chi sa che non anche insormontabili.

Riflessioni generali e Conchiusione.

Non esito a dire che fin ora mi sta fitto nell' animo che il Problema tosto che il numero de' punti premuti dal Corpo sovrapposto al Piano; o ciò che è lo stesso il numero de' fulcri reggenti un Piano, a un punto del quale concepiscasi applicata una potenza, sorpassa il tre, che questo Problema dico, sia non già relativamente ai principii meccanici ed analitici fin ora impiegati, ma per propria indole ed essenzialmente indeterminato. Suppongasi che questo numero sia a cagion d' esempio di quattro. Per questo aumento di numero de' punti dai tre ai quattro non pare che a sciogliere il Problema possano impiegarsi salvo che que' mezzi, che bastano all' uopo nel caso de' tre punti, e che soltanto sia lecito di aggiugnere ad essi il nuovo dato offertoci appunto dalla soluzione ottenuta nel caso de' tre punti. Se ci prenderemo la sicurtà d' introdurre qualche altro principio, ci esporremo al risico di travisare il Problema, di alterarne l' essenza; perchè questo nuovo principio, se legittimo ne è l' uso, avrebbe potuto impiegarsi anche nel caso de' tre punti; nel quale o sarebbe desso compreso ne' noti comuni principii della Meccanica, o no: Nella prima ipotesi non si potrebbe trar da esso niun vero vantaggio, nell'altra, esso renderebbe il Problema nel caso di tre punti più che determinato, cioè tale che non sarebbe solubile fuori che in certe determinate posizioni de' tre punti; mentre tutt' all' opposto è desso solubile qualunque sia la lor posizione; pur che sia data. Saranno forse queste riflessioni mere sottigliezze; esse per altro mi sembran conformi a quelle, a cui in molti incontri Matematici di gran merito e credito non isdegnano di abbandonarsi.

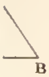
Se in questo discorso ha qualche ragionevolezza, sarà dunque

que lecito di sospettare che non sieno in tutto fondate le speranze, alle quali pare che non chiudano in tutto l' animo alcuni insigni uomini, come il Sig. d' Alembert, laddove dichiara il Problema, tosto che il numero de' fulcri sorpassa il tre, inaccesso ai principii della Meccanica conosciuta fin ora. Tenendo un linguaggio tale pare che non disperi in tutto che la Scienza possa a qualche tempo riuscire a domarlo. Io mo ritengo i miei dubbii; e tornando per un momento al caso di un Corpo posto su quattro soli punti di un Piano avverto di nuovo che in ogni caso speciale e reale con que' quattro punti combaciano quattro determinati del Corpo; che di questo può concepirsi che ruoti attorno al suo centro di gravità senza spostar questo centro, presentando combinazioni ognor nuove di quattro de' suoi punti ai punti del Piano, e recando a questi cariche ognor diverse a norma del suo vario volume, della configurazion sua, della omogeneità o eterogeneità delle sue parti, dati tutti, che rendono tra le mani della natura determinato il Problema; ma che non essendo, nè potendo esser compresi nella enunciazion sua lo lasciano fra quelle della Meccanica teorica invincibilmente indeterminato.

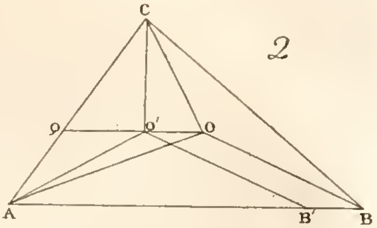
Torno pure per un momento al caso anche più semplice di un Corpo retto da tre punti posti nella stessa linea retta. Della indeterminazione propria anche di questo caso niuno a mio avviso dovrà prender meraviglia, nè credersi tenuto, come di un vero difetto, a liberar la Meccanica. Forse che questa non ce ne offre più esempii, senza che niuno abbia fin ora creduto di dover travagliarsi intorno ai mezzi di scancellarnela? Se sopra un dato punto agiscano due forze espresse nella quantità e direzion loro da due date linee, non si pena a rinvenirne l' equivalente nella diagonale del Parallelogrammo avente per lati le due date linee. Se contro a un dato punto agisca una forza espressa nella sua quantità e direzione da una data linea, e si cerchino due forze capaci di bilicarsi con essa, ove non si assegni la lor direzione il Problema sarà indeterminato; ove sia data e nota, determinato. Se suppongasi che sopra e attorno lo stesso punto con una data forza e similmente espressa debbano bilicarsi

si

Fig. 1

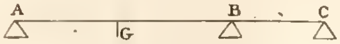


2

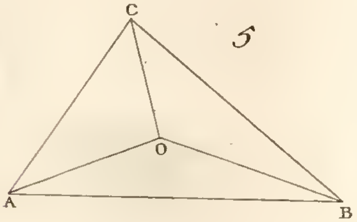


3

4

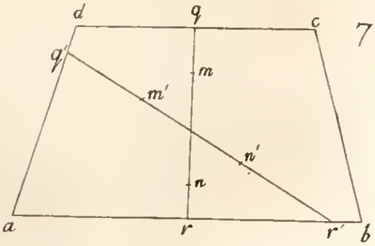


5



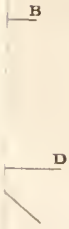
6

7

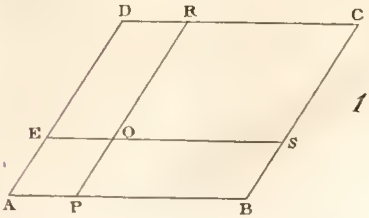

d
q
c
q′
m
m′
n′
n
a
r
r′
b

8

9



10



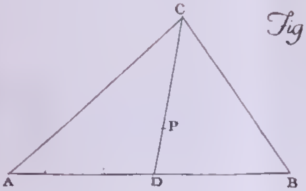
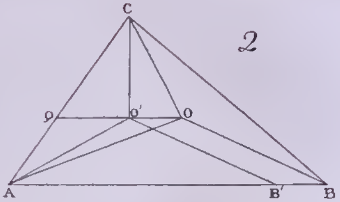
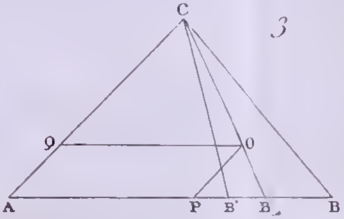
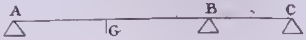
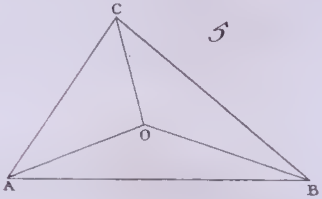


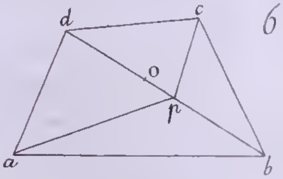
Fig. 1

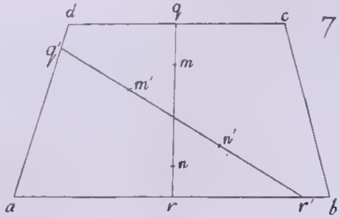

2

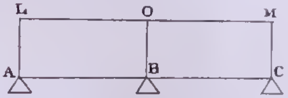

3

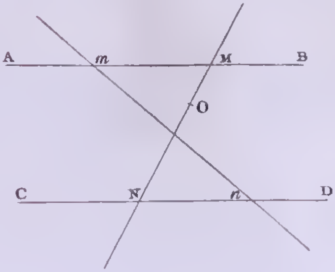

4

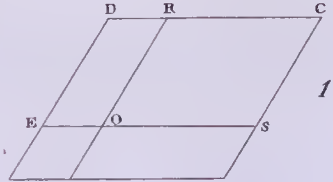

5


6


7
d
q
c
q'
m
m'
n'
n
a
r
r'
b


8


9


10

si tre forze delle quali sia pur nota la direzione, malgrado questa notizia, il Problema, in cui si cerchi il valore di dette forze, sarà indeterminato, se la direzione di tutte e tre cade nello stesso Piano; determinato all' opposto, se le direzioni non cadono tutte nel Piano stesso. Io ravviso una manifesta analogia tra quest' ultimo Problema, e quello, in cui cercasi qual pressione un dato peso eserciti sopra tre dati punti di un Piano. Come è determinato quest' ultimo, quando i tre punti non appartengono alla stessa linea retta; così resulta determinato l' altro, quando le date direzioni delle tre forze non cadono su lo stesso Piano; e per simil modo l' indeterminazione s' introduce nell' uno e nell' altro, quando i tre dati punti, e le tre date direzioni trovansi gli uni nella stessa retta, le altre nello stesso Piano.

SULL' OPINIONE
DELLE PIOGGIE DE' SASSI DAI VULCANI LUNARI

DISQUISIZIONE MATEMATICA

Del P. D. Pietro Cossali

Ricevuta il dì 6 *Maggio* 1806.

Che la luna nostro satellite, oltre a quegli influssi, che segretamente, a pretesa di alcuni, esercita sulle piante delle nostre campagne, su gli animali di nostro servigio, e su i corpi nostri medesimi, abbia eziandio la podestà di flagellarci con pioggie, o piuttosto grandini di sassi! Cosi è, così è si echeggia tra Alemagna, e Francia, ed anche in Italia. Ed il celebratissimo Fisico, e Chimico Vauquelin, tra gli altri, dopo avere esaminate le estrinseche qualità, e con diligente analisi ricercati i componenti dei sassi della sì decantata pioggia di sassi nei contorni dell' Aquila in Francia, pronuncia, che *l' opinione, che li fa venir dalla Luna, comunque strana ella sembri, è forse la meno irragionevole, e se non possono darsene prove dirette, nemmeno se le può opporre un ben fondato ragionamento*. Trascrivo le parole della versione italiana del Chiarissimo nostro Collega Sig. Ab. Amoretti nel Tomo XXII degli *Opuscoli scelti* stampati in Milano, non avendo il *Journal des Mines*, nel numero 76 del quale egli fa sapere essere inserita la Memoria del Sig. Vauquelin. Importa molto il veder con chiarezza, se l' ideare de' sassi da lunari vulcani lanciati in terra, cosa in realtà ella si sia, cui, giusta l' asserto dal Vauquelin, fondato ragionamento oppor non si possa. La disquisizione ha due parti: matematica l' una, fisica l' altra, ed è d' uopo, che dalla matematica incominci, dalla quale la fisica deve trarre appoggio, e lume. Mi accingo io quì pertanto alla parte matematica, e premetto i seguenti

Da-

Dati .

1.° Il raggio medio della terra, che chiamerò R è di tese 3269511 — La Lande Astr. § 1703 — . Dunque di Piedi Parigini 19617066 .

2.° Dalle esperienze istituite intorno alle vibrazioni del Pendolo all' Equatore risulta, che la discesa ivi di un grave in 1'' di tempo, è di Piedi 15,0515 .

3.° Il raggio medio della Luna, che segnerò con r è $\frac{3}{11}$ del raggio medio della Terra — La-Lande § 1398: cioè $r = \frac{3}{11}$ R.

4.° La massa della Luna è $\frac{1}{58,6}$ della massa della Terra - La-Place Méchanique Céleste 2ᵉ Partie . Liv. VI. Chap. X. §. 30. pag. 108 , tom. 2ᵈ .

5.° La distanza media tra i centri della Terra, e della Luna è $= 60$ R .

PROBLEMA I.

Determinare il rapporto della densità media della Luna alla densità media della Terra presa per unità .

Essendo le densità in ragione diretta delle masse, ed in ragione inversa dei volumi , sarà la densità media della Luna alla densità media della terra nella ragione diretta di $\frac{1}{58,6}$: 1 , e nella inversa di $\left(\frac{3}{11}\right)^3 . R^3 : R^3$ o sia di $\left(\frac{3}{11}\right)^3 : 1$: dunque nella composta di $\frac{1}{58,6} \times \left(\frac{11}{3}\right)^3 : 1$, che trovasi , in frazione decimale uguale a 0,8412337 : 1.

PROBLEMA II.

Ritrovare il valore della gravità assoluta media terrestre .

La caduta di un grave per piedi 15,0515 in 1'' di tempo all' Equatore non presenta l' intero valore della gravità in quel luogo, ma sì l'effetto solo dell' eccesso di esso valore sopra la forza centrifuga nascente dal rotamento della terra sul suo asse, e tanto ivi maggiore, che altrove, quanto il raggio del cerchio equatoriale è del raggio di ogni parallelo maggiore. E l' aggiugnere alla misura di Piedi 15,0515, che agli occhi manifestasi, quanto con contraria azione detrae colà la forza centrifuga, basta bensì a rilevare l' assoluto valore della gravità all' Equatore; ma non può tale assoluto valore aversi per comune a tutti i punti della terra, poichè essendo la figura della terra sferoidica, a diversi punti, diversamente dal terrestre centro distanti, diverso è il valore assoluto della gravità. Di tutte queste differenti gravità pertanto cercasi la media: quella cioè, che si avrebbe sopra la terra in ogni dove, conformandosi essa in una perfetta sfera omogenea, e lasciando di rotare sul suo asse.

Riducendo al caso la formola del La-Place, (*Méc. Cel. Part.* I.re *Liv.* III. *Chap.* III. § 24. *tom.* 2.de *pag.* 72), la cercata gravità assoluta media terrestre stà alla gravità apparente all' Equatore $: : 1 : 1 - \frac{13}{3.4.289,261} :$ rapporto, che si riduce a quello di 3471132:3458132. Ma per quello, che, ad onta della forza centrifuga all'equatore apparisce di gravità, la caduta ivi di un corpo in 1'' di tempo è di Piedi 15,0515, come si è detto; dunque $\frac{3471132}{3458132} \times 15,0515 = 15,108082$ sarebbero i piedi, per i quali il corpo in 1'' discenderebbe in virtù della gravità assoluta media. E perchè poi in fine di tale discesa avrebbe una velocità, per la quale equabilmente in 1'' percorrere potrebbe uno spazio doppio, cioè lo spazio di Piedi $(15,108082) \times 2$; quindi da tal velocità in 1'' di tempo generata estimando la terrestre gravità assoluta media, che chiameremo G, si avrà $G = (15,108082) \times 2$.

PRO-

PROBLEMA III.

Determinare la gravità assoluta media alla superficie media della Luna; ad una distanza dal suo centro uguale al raggio della terra; ed a qualunque altra distanza.

Avendo segnato per R il raggio medio della terra, per r il raggio medio della Luna, per G la gravità assoluta media terrestre, si denoti per g la gravità assoluta media alla superficie della Luna, e per $\frac{1}{m}$ il rapporto della massa lunare alla massa terrestre pigliata come unità: sarà per la legge composta dell' attrazione in diretta semplice ragione della massa, e duplicata inversa della distanza, $G : g : : \frac{1}{R^2} : \frac{1}{mr^2}$; onde $g = \frac{GR^2}{mr^2} = \frac{GR^2}{m\left(\frac{3}{11}\right)^2 R^2} = \frac{121G}{9 \times 58,6} = 0,229427G = 6,932384$ Piedi Parigini

A distanza $= R$ dal centro della Luna sarà evidentemente l' attrazione lunare $= \frac{G}{m}$

Ed a qualunque altra distanza yR sarà $= \frac{GR^2}{m(yR)^2} = \frac{G}{my^2}$

PROBLEMA IV.

Nella retta di distanza dei centri della Terra e della Luna trovare il punto, nel quale un corpo verrebbe ugualmente attratto dalla Terra e dalla Luna. Dicasi

kR la distanza dei due centri, terrestre, e lunare,

yR la distanza del punto delle uguali attrazioni dal centro della Luna

$(k-y)R$ la sua distanza dal centro della terra.

Sarà l'attrazione della Luna sul corpo in tal punto $= \frac{G}{m(y \cdot R)^2}$, e l' attrazione della terra $= \frac{G}{(k-y)^2 R^2}$: e dovrà essere $\frac{G}{my^2 R^2} = \frac{G}{(k-y)^2 R^2}$,

$\frac{G}{(k-y)^2R^2}$, donde ricavasi $y^2 + \frac{2ky}{m-1} - \frac{k^2}{m-1} = 0$, e quinci $y = k \times \frac{-1+\sqrt{m}}{m-1} = 60 \times \frac{-1+\sqrt{58,6}}{57,6}$, essendo per il Dato 4.° $m = 58,6$, e per il Dato 5.° $k = 60$, ed in ultimo computo $y = 6,932358$, e per conseguenza $k-y = 53,067642$. Per la qual cosa manifestasi; che il punto di equilibrio delle due opposte attrazioni della Luna, e della Terra sta a 6,932358 R dal centro della Luna, ed a 53,067642 R dal centro della terra. Sia in avvenire $6,932358 = h$; $53,067642 = H$.

PROBLEMA V.

Posto, che da un vulcano della Luna situato ad una data distanza dal suo centro sia scagliato nella direzione della linea, che da quel centro stesso viene al centro della terra, un sasso con la velocità u, determinare la espressione della velocità del sasso medesimo a qualunque punto del viaggio lungo la detta linea, considerando il continuo conflitto delle due opposte attrazioni, quinci della terra, di là della Luna, l'una continuamente crescente, l'altra continuamente decrescente in ragione duplicata inversa della distanza pel viaggio diminuita verso il centro della Terra, ed accresciuta dal centro della Luna.

Sia aR la distanza del vulcano, o del punto di scagliamento dal centro della Luna

xR il viaggio dal sasso già fatto

$(x+a)$ R per conseguenza la sua distanza nel dato istante dal centro della Luna:

Sarà l' attrazione della Luna sul sasso in tale istante $= \frac{GR^2}{m(a+x)^2R^2}$; e sarà l'attrazione della Terra nell' istante medesimo $= \frac{GR^2}{(k-a-x)^2R^2}$, onde sarà la forza sollecitante il sasso

$$= \frac{G}{(k-a-x)^2} - \frac{G}{m(a+x)^2}$$

Si dica V la velocità, che in tale istante, ed a tal punto di viaggio il sasso trovasi avere;
e si dica $d(x\mathrm{R})$ l' aumento elementare del viaggio

Per la formola Galileana sarà

$$\mathrm{V}d\mathrm{V} = \frac{\mathrm{GR}dx}{(k-a-x)^2} - \frac{\mathrm{GR}dx}{m(a+x)}$$

ed integrando, $\frac{1}{2}\mathrm{V}^2 = \frac{\mathrm{GR}}{k-a-x} + \frac{\mathrm{GR}}{m(a+x)} + \mathrm{Cost.}$

La costante deve determinarsi dalla condizione, che il sasso sia dal lunare vulcano scagliato con la velocità u, cioè nel principio del viaggio abbia la velocità u. Dunque fatto $x = 0$, deve porsi $\mathrm{V} = u$, con che si ha

$$\mathrm{Cost.} = \frac{1}{2}u^2 - \frac{\mathrm{GR}}{k-a} - \frac{\mathrm{GR}}{am}.$$

E quindi per generale completa formola della velocità del sasso a qualunque punto del suo viaggio nella linea dal centro della Luna al centro della Terra risulta

$$\mathrm{V} = \sqrt{\left(u^2 + \frac{2\mathrm{GR}}{k-a} \cdot \frac{x}{k-a-x} - \frac{2\mathrm{GR}}{am} \cdot \frac{x}{a+x}\right)}$$

PROBLEMA VI.

Determinare quanta esser debba la velocità u dal vulcano lunare al sasso impressa nello scagliamento, onde il sasso medesimo soggetto alle due contrarie attrazioni della Luna, e della Terra arrivar possa al punto del loro equilibrio.

Vi arrivi, e perduta tutta la velocità sia costretto ad ivi fermarsi, bilicato tra Luna e Terra. Sarà dunque $\mathrm{V} = 0$, fatto $a + x = h$, essendo h (vedi in fine del Prob. IV) il numero de' raggi terrestri tra il centro della Luna, ed il punto dell' uguaglianza delle opposte attrazioni della Luna, e della Terra. Per lo che si avrà

$$\sqrt{\left(u^2 + \frac{2\mathrm{GR}}{k-a} \cdot \frac{h-a}{\mathrm{H}} - \frac{2\mathrm{GR}}{am} \cdot \frac{h-a}{h}\right)} = 0, \text{ donde}$$

$$u = \sqrt{\left(-\frac{2\mathrm{GR}}{k-a} \cdot \frac{h-a}{\mathrm{H}} + \frac{2\mathrm{GR}}{am} \cdot \frac{h-a}{h}\right)}.$$

Ipotesi.

A determinare *u* bisogna assegnare un valore ad *a*, che nel Prob. V si è presa a dinotare la frazione di R, della quale il punto dello scagliamento del sasso dista dal centro della Luna. È quistione tra i Naturalisti intorno al sito dei focolari de' vulcani. Hamilton sostiene essersi a partito ingannati quelli, che pretesero generalmente stabilire, che ardano alla sommità, o pure al mezzo per lo meno delle montagne; e dalle sue osservazioni sul Vesuvio, su tutta la estensione dei campi Flegrei, su i tremuoti della Calabria, su l' Etna, sul vulcano di Stromboli, sul sorgimento delle isole Eoliche accumula prove per dimostrare, che i focolari vulcanici si trovano piuttosto profondi sotto terra, e persino sotto il fondo del mare. Prendendo un medio, non si potrebbe condannare il porre i focolari vulcanici terrestri alla superficie media della terra. E similmente si concederà il porre per un medio i focolari vulcanici lunari alla superficie media della Luna, e quindi alla distanza $\frac{3}{11}$R dal centro della Luna medesima, con fare $a = \frac{3}{11}$. Ed è ben vero osservarsi nel lunar globo delle altissime montagne, che giusta l' Evelio si elevano all' altezza di $\frac{1}{13}$, e giusta il Galileo sino di $\frac{1}{10}$ del lunare semidiametro. Ma chi asserirà, che quelle più alte lunari montagne sieno le sole vulcaniche, ed abbiano i focolari loro alla cima, alla metà dell' altezza, piuttosto, che alla radice, o sotto? E se pure li avessero alla metà dell' altezza loro, la frazione da aggiungere a $\frac{3}{11}$ sarebbe, dietro il computo del Galileo $= \frac{3}{11.20} = \frac{3}{220}$, e dietro il computo dell' Evelio $= \frac{3}{11.26} = \frac{3}{286}$, e nulla più. Tutto insieme pertanto considerato in argomento massimamente, che non esige minutezza, mi credo permesso il supporre $a = \frac{3}{11}$, lo che riesce assai comodo.

Ciò supposto, per effettuare la determinazione della velocità u incomincio dal cercare i logaritmi dei due fattori costanti $\frac{2GR}{k-a}$, $\frac{2GR}{am}$, il primo de' quali segno per ω, il secondo per ϕ, tornando bene averli a parte, occorrendone frequente uso ne' problemi seguenti.

Or essendo per il dato 1° R = 19617066; per il Prob. II G = 30,216164; per il Probl. III $m = 58,6$; per il Dato 5°, e per il Probl. IV $k = 60$; per l'ipotesi $a = \frac{3}{11}$, e perciò $k - a = 60 - \frac{3}{11} = 60, -0,272727 \ldots = 59,7272727 \ldots$ si trova

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
\text{Log. R} & = & 7,2926332 & \text{Log. 2GR} & = & 9,0739026 \\
\text{Log. G} & = & 1,4802394 & \text{Log. } a & = & \underline{9,4357286} \\
\text{Log. 2} & = & \underline{0,3010300} & & & 9,6381740 \\
\text{Log. 2GR} & = & 9,0739026 & \text{Log. } m & = & \underline{1,7678976} \\
\text{Log. } (k-a) & = & \underline{1,7761727} & \text{Log. } \phi & = & 7,8702764 \\
\text{Log. } \omega & = & 7,2977299 & & &
\end{array}$$

A proseguire per logaritmi il calcolo si richiami pure a memoria, che per il Probl. IV, H = 53,067642; $h = 6,932358$, e conseguentemente $h - a = 6,659631$. Dunque

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
\text{Log. } \omega & = & 7,2977299 & \text{Log. } \phi & = & 7,8702764 \\
\text{Log. } (h-a) & = & \underline{0,8234501} & \text{Log. } (h-a) & = & \underline{0,8234501} \\
 & & 8,1211800 & & & 8,6937265 \\
\text{Log. H} & = & \underline{1,7248298} & \text{Log. } h & = & \underline{0,8408809} \\
\text{Log. } \frac{\omega(h-a)}{H} & = & 6,3963502 & \text{Log. } \frac{\phi(h-a)}{h} & = & 7,8528456
\end{array}$$

Quindi risulta

$$\frac{\omega(h-a)}{H} = 2490864,5714285 \qquad \frac{\phi(h-a)}{h} = 71259967,213115.$$

Onde $u = \sqrt{(71259967,213115 - 2490864,5714285)}$
$= \sqrt{(68769102,6416843)} = 8292,7138$ Piedi di Parigi tale cioè esser dovrebbe la velocità al sasso impressa dal lunare vulcano, onde tra le avverse ma decrescenti attrazioni della Luna,

na, e le favorevoli, e continuamente crescenti della terra arrivar potesse al punto dell' equilibrio delle une, e delle altre, ed ivi bilicarsi, che atta per se fosse a fargli in 1″ di tempo percorrere Piedi Parigini 8292, 7138.

Corollario 1.° Si valuta, che una palla di libbre 24 esca dalla bocca di un Cannone carico con libbre 12 di polvere fornita della velocità di Piedi 1560 per 1″. Poichè dunque $\frac{8292}{1560} = 5\frac{41}{130}$, si appalesa, che il vulcano lunare aver dovrebbe la forza di scagliare i sassi con una velocità cinque volte, e quasi un terzo, maggiore di quella, con la quale un Cannone caricato al modo detto scaglia la sua palla.

Corollario 2.° Ma un sasso scagliato dal lunare vulcano con la precisa velocità necessaria a farlo arrivare al punto delle uguali attrazioni della Luna, e della Terra, ivi arrivato si bilicherebbe tra Luna, e Terra, nè potrebbe a noi cadere. Dunque la velocità dal vulcano lunare impressa al sasso, onde giunga a terra, esser deve di qualche cosa, sia quanto si voglia piccola, maggiore della velocità trovata. Si segni tale velocità di u maggiore per v, ed il suo eccesso sopra u sia c, sia cioè $v = u + c$: sarà $V = \sqrt{\left(v^2 + \frac{\omega x}{k-a-x} - \frac{\phi x}{a+x}\right)}$ la formola, della quale ci dovremo in progresso servire.

PROBLEMA VII.

Essendo dal vulcano lunare scagliato il sasso con una velocità $v = u + c$, della quantità c maggiore della velocità u, che gli sarebbe precisamente necessaria per arrivare, tra il conflitto delle opposte, ed oppostamente varianti attrazioni della Luna, e della Terra, al punto della ugualianza loro, determinare quale sarà la velocità, che il sasso ivi arrivato conserverà per passare di quà.

Sostituito nella formola or ora stabilita $u^2 + 2uc + c^2$ in luogo di v^2 si ha

$$V = \sqrt{\left(u^2 + 2uc + c^2 + \frac{\omega x}{k-a-x} - \frac{\phi x}{a+x}\right)}$$

Ma fatto $x = h - a$, cioè considerato il sasso giunto al punto della uguaglianza dell' attrazione lunare e della terrestre, i termini $\frac{\omega x}{k-a-x} - \frac{\phi x}{a+x}$ acquistano per il Prob. VI una differenza negativa, per la quale si distrugge u^2. Dunque la velocità, che ivi al sasso rimane, si è

$$V = \sqrt{(2uc + c^2)}$$

Corollario. Se dunque la velocità di Piedi 8292, 7138, che nel Prob. VI si è veduto dover essere al sasso impressa per poter esso arrivare al detto punto precisamente, si accresca sol di $\frac{162}{10000}$ di Piede, facendola di Piedi 8292, 73 il sasso al suo arrivo al punto delle uguali attrazioni conserverà la velocità

$$V = \sqrt{\left(8292{,}7138 \times \frac{324}{10000} + \left(\frac{162}{10000}\right)^2\right)} = 16{,}39$$ prossimamente. Arriverebbe cioè il sasso al punto delle uguali attrazioni della Luna, e della Terra con una velocità di Piedi Parigini 16,39 per 1'' di tempo mercè la quale lo oltrepasserebbe non soffrendo bilico.

La velocità pertanto di Piedi Parigini 8292, 73 per 1'' di tempo sarà quella che in seguito nell' applicazione dei Problemi generali io supporrò impressa al sasso nello scagliamento dal lunare vulcano.

PROBLEMA VIII.

Scagliato il sasso dal vulcano lunare con una velocità v tale, per cui oltrepassar egli possa con qualche residuo di essa il punto dell' equilibrio delle attrazioni, lunare e terrestre, determinare nella retta dal centro della Luna al centro della Terra, di qua da quel punto, il luogo, in cui avrà il sasso medesimo ricuperata l' intera primiera velocità v.

Dal-

Dalla generale formola $V = \sqrt{\left(v^2 + \frac{\omega x}{k-a-x} - \frac{\varphi x}{a+x}\right)}$ appalesasi in due casi aversi $V = v$, cioè non solo essendo $x = 0$, che è il punto dello scagliamento, ma di più qualora sia $\frac{\omega}{k-a-x} - \frac{\varphi}{a+x} = 0$, conseguentemente $x = \frac{(k-a)\varphi - a\omega}{\varphi+\omega}$. Or essendosi nel Probl. VI trovato Log. $\varphi = 7{,}8702764$; e Log. $\omega = 7{,}2977299$ ne proviene, ai numeri passando
$\varphi = 74178220{,}34$; $\omega = 19848598{,}17$; $\varphi + \omega = 94026818{,}5$, e quinci Log. $(\varphi+\omega) = 7{,}9732514$; laonde si ha il calcolo seguente

$$\begin{array}{lll@{\qquad}lll}
\text{Log.}\,(k-a) & = & 1{,}7761727 & \text{Log.}\,\omega & = & 7{,}2977299 \\
\text{Log.}\,\varphi & = & \underline{7{,}8702764} & \text{Log.}\,a & = & \underline{9{,}4357286} \\
 & & 9{,}6464491 & & & 6{,}7334585 \\
\text{Log}\,(\varphi+\omega) & = & \underline{7{,}9732514} & \text{Log.}\,(\varphi+\omega) & = & \underline{7{,}9732514} \\
\text{Log.}\,\frac{(k-a)\varphi}{\varphi+\omega} & = & 1{,}6731977 & \text{Log.}\,\frac{a\omega}{\varphi+\omega} & = & 8{,}7602071
\end{array}$$

Dunque

$\frac{(k-a)\varphi}{\varphi+\omega} = 47{,}119$; $\frac{a\omega}{\varphi+\omega} = 0{,}057571$; e perciò $x = 47{,}061429$.
Ricupererà cioè il sasso la primiera velocità, con la quale fu dal vulcano lunare scagliato dopo aver fatto (47,061429) R di viaggio. Per conseguenza

alla distanza $\left(47{,}061429 + \frac{3}{11}\right)$R $= (47{,}334156)$ R dal centro della Luna

alla distanza $(47{,}061429 - 6{,}932358)$ R $= (40{,}401798)$ R dal punto delle uguali attrazioni della Luna e della Terra, al di qua,

alla distanza $(53{,}067642 - 40{,}401798)$ R $= (12{,}665844)$ R dal centro della Terra

alla distanza (11,665844) R dalla terrestre superficie.

E tutto ciò qualunque sia la velocità v maggiore di u, con cui il vulcano lunare abbia scagliato il sasso.

PRO-

PROBLEMA IX.

Scagliato dal vulcano lunare il sasso lungo la linea dal centro della Luna a quello della Terra con la velocità $v=$Piedi 8292,73, determinare la velocità di esso sasso al giugnere alla superficie della Terra.

Bisogna nella formola generale al *Corol.* 2.° del Probl. VI stabilita, fatto $v=8292{,}73$, fare $x=59-a$, con che proviene

$$V=\sqrt{\left((8292{,}73)^2+\frac{\omega(59-a)}{1}-\frac{\varphi(59-a)}{59}\right)}$$

e calcolando per logaritmi

$$\begin{array}{llll}
\text{Log. }\omega & =7{,}2977299 & \text{Log. }\varphi & =7{,}8702764 \\
\text{Log. }\left(59-\frac{3}{11}\right) & =\underline{1{,}7688399} & \text{Log. }\left(59-\frac{3}{11}\right) & =\underline{1{,}7688398} \\
 & & & 9{,}6391162 \\
\text{Log. }\omega\left(59-\frac{3}{11}\right) & =9{,}0665698 & \text{Log. }59 & =\underline{1{,}7708520} \\
 & & \text{Log. }\dfrac{\varphi\left(59-\frac{3}{11}\right)}{59} & =7{,}8682642
\end{array}$$

Quindi $\omega\left(59-\frac{3}{11}\right)=1165654155{,}5$, $\dfrac{\varphi\left(59-\frac{3}{11}\right)}{59}=7383322$

$V=\sqrt{(68769370{,}8529+116565415 5{,}5-73835322)}=$
$\sqrt{(1160588104{,}3529)}=34067{,}4$.

Il sasso cioè dal vulcano lunare scagliato lungo la linea dal centro della Luna a quel della Terra con una velocità di Piedi Parigini 8292,73, diritto vegnente in Terra avrà al giugnere alla sua superficie la velocità di Piedi 34067,4.

Corollario 1° Si è veduto nel Prob. VIII, che sino ad $(11{,}665844)$R dalla superficie della Terra non fa il sasso, che ricuperare la velocità, con la quale fu scagliato, che nel nostro supposto fu di Piedi 8292,73; dunque il di più sino alla velocità di Piedi 34067,4, cioè la velocità di Piedi ben 25774,68, è da esso acquistata nel viaggio dei $(11{,}665844)$R verso Terra.

Corollario 2° Dividendo 34067 per 1560, che come nel *Corol.* 1° del Prob. VI si è detto, estimasi essere la velocità, con la quale una palla di lib. 24 è scagliata da un Cannone per la carica di lib. 12 di polvere, si ha per quoziente 21, 84 prossimamente. La velocità dunque, con la quale il detto sasso batterebbe in Terra, sarebbe poco meno, che 22 volte maggiore di quella, con cui è scagliata dal Cannone di 24 ben caricato la palla.

Scolio.

La formola generale di V, presentando in distinti termini la velocità impressa nello scagliamento, l' effetto della serie delle crescenti attrazioni della Terra, e l' effetto della serie delle decrescenti attrazioni della Luna presta luogo a varj riflessi, calcoli separati, e confronti.

1° Si scorge dalle quantità trovate nel Prob. VI, che il prodotto delle via via crescenti attrazioni della Terra dalla superficie della Luna, sino al punto di ugual attrazione per parte della Luna, e per parte della Terra, sarebbe $V = \sqrt{(2490864,57)}$ = Piedi 1578, 2. Togliendo dalla Luna il pensiero, e non ritenendo, che la distanza di $\left(60 - \frac{3}{11}\right)R$ dal centro della Terra, un corpo, che da tal distanza cominciasse il suo moto per attrazione della Terra, dopo $(6,659631)R$ di caduta avrebbe una velocità di Piedi 1578,2. Ed il prodotto della serie delle decrescenti attrazioni Lunari essendo $V = \sqrt{(71259967,21)} = 8441 \frac{1}{2}$ Piedi si comprende, che tanta sarebbe la velocità, che per la stessa serie a rovescio, cioè dalle minori alle maggiori attrazioni, si genererebbe in un corpo, che dalla distanza di $(6,932358)R$ dal centro della Luna cadesse da essa attratto alla sua superficie.

2° Dalle quantità trovate nel Prob. IX si rende manifesto, che il prodotto delle continuamente crescenti attrazioni della Terra dalla faccia della Luna sino a quella della Terra è $V = \sqrt{(1165654155,5)}$ = 34141, 67. Dunque il prodotto dal punto dell' equilibrio delle attrazioni lunare e terrestre sino alla superficie della Terra è $V = 34141,67 - 1578,2 = 32563,47$. E perchè il prodotto delle continuamente decrescenti attrazioni lunari nella stessa lunghezza za dalla lunare alla terrestre superficie, risulta $V=\sqrt{(73835322)}$ $=8592,7$, ne segue, che il prodotto loro dal punto delle uguali attrazioni sino alla superficie della Terra si è $V=8592,7-8441,5$ $=$ Piedi 151,2.

3° Essendosi nello scioglimento del Probl. IX trovato, che il sasso dal vulcano Lunare scagliato con la velocità di Piedi 8292,73, dopo avere passato con una velocità di Piedi 16, 39 il punto delle uguali attrazioni della Luna, e della Terra, proseguendo ad essere sollecitato da questa, e retrotratto da quella, arriverebbe a noi con una velocità di Piedi 34067,4: se si paragoni tal velocità con quella or or trovata del sasso, che dalla faccia della Luna, od in generale da una uguale distanza, alla faccia della Terra venisse, senza essere scagliato, dalla quiete movendosi, e non sentendo altre attrazioni, che quelle della Terra, si fa manifesto, che la velocità del sasso al giugnere in questo caso alla Terra, essendo di Piedi 34141, 67, supererebbe di Piedi 74, 27 la velocità del sasso nel caso primo trattato nel Prob. IX; che la Luna conseguentemente con il suo continuo retrotrarre il sasso, gli ruba qualche cosa di più di velocità, di quello siasi supposto avergliene il di lei vulcano impresso nello scagliamento.

La nostra formola inoltre facilmente si acconcia al Problema di determinare la velocità, che acquisterebbe la Luna, se privata della forza di projezione, ubbidiente alla sola attrazione della Terra cadesse retta linea alla terrestre superficie. Ommessi i termini v^2, $\frac{2GRx}{am(a+x)}$, non vi ha, che il termine $\frac{2GRx}{(k-a)(k-a-x)}$ da ritenersi, e questo con qualche cangiamento. Poichè non trattandosi più di un sasso, che parta dalla superficie della Luna, ma sì dello stesso centro di lei, che partasi dal suo punto, e prenda viaggio verso la Terra, in luogo per conseguenza di $k-a$ bisogna sostituire k, ed $a+x$ in luogo di x: fatti i quali cangiamenti, la velocità cercata a qualunque punto del viaggio $a+x$, che a maggior distinzione è bene segnare con nuova lettera, quale z, sarà $V=\sqrt{\left(\frac{2GR}{k}\cdot\frac{z}{k-z}\right)}$.

E perchè dal centro della Luna alla superficie della Terra vi sono $59R$, ma arrivando la superficie della Luna a battersi con la superficie della Terra, il centro della Luna non avrà percorso, che $\left(59 - \frac{3}{11}\right)R$, restando dalla faccia terrestre distante tanto, quanto è lungo il Lunar raggio $= \frac{3}{11}R$; perciò si avrà la velocità, con la quale la Luna colpirà la Terra, facendo $z = 59 - \frac{3}{11}$, ed il suo valore sarà

$$V = \sqrt{\left\{\frac{2GR}{k} \cdot \frac{59 - \frac{3}{11}}{1 + \frac{3}{11}}\right\}}$$

Ecco il calcolo per logaritmi

$$\begin{array}{llll}
\text{Log.}\ 2GR & = 9{,}0739026 & \text{Log.}\ 59 - \frac{3}{11} & = 1{,}7688398 \\
\text{Log.}\ k & = \underline{1{,}7781513} & \text{Log.}\ 1 + \frac{3}{11} & = \underline{0{,}1047352} \\
\text{Log.}\ \frac{2GR}{k} & = 7{,}2957513 & \text{Log.}\ \dfrac{59 - \frac{3}{11}}{1 + \frac{3}{11}} & = 1{,}6641046 \\
\text{Log.}\ \dfrac{59 - \frac{3}{11}}{1 + \frac{3}{11}} & = \underline{1{,}6641046} & & \\
\text{Log.}\ V^2 & = 8{,}9598559 & & \\
\text{Log.}\ V & = 4{,}4799279 & & \\
\end{array}$$

$$V = \text{Piedi}\ 3{,}0194{,}5$$

Se il centro della Luna arrivar potesse sino alla superficie della Terra, la sua velocità in arrivarvi sarebbe

$$V = \sqrt{\left(\frac{2GR}{k} \cdot 59\right)}.$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Log.}\ \frac{2GR}{k} & = 7{,}2957519 \\
\text{Log.}\ 59 & = \underline{1{,}7708520} \\
\text{Log.}\ V^2 & = 9{,}0666033 \\
\end{array}$$

Log. V - - $= 4{,}5333016$
conseguentemente $V =$ Piedi 34143

Per la qual cosa il centro della Luna nel viaggio di un tratto al suo raggio uguale, cioè nel viaggio di $\frac{3}{11}R$ presso Terra acquisterebbe una velocità $= 34143 - 30194{,}5 =$ Piedi 3948, 5: tanto è il prodotto delle attrazioni della Terra per il tratto di $\frac{3}{11}R$ presso la sua superficie, il qual tratto ritrovasi di miglia 937, tese 549, piedi 3, 27.

Per lo contrario, essendo la velocità, che il centro della Luna partendo dalla distanza di $59R$ per la serie delle attrazioni terrestri acquisterebbe in tutto il viaggio di essi $59R =$ Piedi 34143; ed essendo la velocità che partendo un sasso dalla faccia della Luna, od in genere dalla distanza di $\left(59-\frac{3}{11}\right)R$ in tutto il viaggio di $\left(59-\frac{3}{11}\right)R$ per le attrazioni terrestri acquisterebbe $= 34141{,}67$: deducesi, che il prodotto delle terrestri attrazioni per il tratto di $\frac{3}{11}R$, cominciando alla distanza di $59R$ dalla superficie della Terra, non è, che una velocità di Piedi $34143 - 34141{,}67 =$ Piede 1,33. Qual differenza dal prodotto per lo stesso tratto presso Terra, che si è veduto essere una velocità di Piedi ben 3948, 5!

Se il centro della Luna proseguir potesse il suo viaggio sino al centro della Terra, con la stessa legge di essere sempre attratta in ragione duplicata inversa della distanza dallo stesso terrestre centro, la sua velocità ivi arrivata sarebbe

$$V = \sqrt{\left(\frac{2GR}{k} \cdot \frac{60}{0}\right)}, \text{ cioè sarebbe infinita.}$$

È anche facile determinare il tempo T, che la Luna stessa impiegherebbe nella caduta. Preso per elemento il viaggio $d(zR)$, sarà per le leggi del moto variabile

$$dT = \frac{d(zR)}{V} = \frac{R\,dz}{V} = \frac{R\,dz}{\sqrt{\left(\frac{2GR}{k} \cdot \frac{z}{k-z}\right)}} = \frac{R}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}} \cdot \frac{dz\sqrt{(k-z)}}{\sqrt{z}} =$$

R

$$\frac{R}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}\cdot\frac{dz(k-z)}{\sqrt{(kz-z^2)}}=\frac{R}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}\left(\frac{dz\left(\frac{1}{2}k-z\right)}{\sqrt{(kz-z^2)}}+\frac{\frac{1}{2}kdz}{\sqrt{(kz-z^2)}}\right).$$ Onde

$$T=\frac{R}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}\left(\sqrt{(kz-z^2)}+\frac{1}{2}k\,\text{Arc.Cos.}\,\frac{\frac{1}{2}k-z}{\frac{1}{2}k}\right);$$ o meglio, $=$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}\left(R\sqrt{(kz-z^2)}+\frac{1}{2}kR.\text{Arc.Cos.}\,\frac{\left(\frac{1}{2}k-z\right)R}{\frac{1}{2}kR}\right).$$

Non fa bisogno di aggiugnere costante, poichè, fatto $z=0$, si ha a dirittura $\sqrt{(kz-z^2)}=0$, ed il coseno dell'arco, divenendo $\frac{\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k}=1$, dà parimente l'arco $=0$, e quinci risulta $T=0$, come debb' essere.

Poichè, posto $z=0$, risulta, come si vien di dire, l'arco $=0$; e posto poi $z=k$, risulta il coseno $=\frac{-\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k}=-1$, e conseguentemente l'arco $=$ al semi-cerchio: manifestasi doversi dal centro della Luna al centro della Terra concepire un semi-cerchio descritto col raggio $\frac{1}{2}kR$, e perciò avente il centro suo alla metà della retta dal centro della Luna al centro della Terra. Significa pertanto $\frac{1}{2}kR.\text{Arc. Cos.}\,\frac{\left(\frac{1}{2}k-z\right)R}{\frac{1}{2}kR}$ l'arco di questo semicerchio, che dal centro della Luna si estende sino a corrispondere al punto estremo di z. E perchè in un semicerchio del raggio $\frac{1}{2}kR$ un arco, il cui coseno sia $\left(\frac{1}{2}k-z\right)R$, ha il seno $=R\sqrt{(kz-z^2)}$; si deduce, che il tempo dalla Luna impiegato in qualunque tratto zR della caduta viene espresso per la frazione $\frac{1}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}$ moltitiplicata nell' aggregato del detto arco, e del suo seno .

Facciamo $z = 59 - \frac{3}{11}$, ed avremo il tempo dalla Luna impiegato per arrivare a battere con la sua faccia la faccia della Terra determinato per

$$T = \frac{1}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}\left(R\sqrt{\left(1+\frac{3}{11}\right)}\sqrt{\left(59-\frac{3}{11}\right)} + 30R.\text{Are.Cos.}\frac{-\left(29-\frac{3}{11}\right)R}{30R}\right)$$

Si trova $\text{Arc. Cos.}\frac{-\left(29-\frac{3}{11}\right)}{30} = 163°15'3'' = 587703''$. E presa per rapporto della semi-circonferenza al raggio la frazione $\frac{355}{113}$ si ha, co' logaritmi operando :

$$\begin{array}{llll}
\text{Log. R} & = 7,2926332 & \text{Log.}\frac{R}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}} & = 3,6447576 \\
\text{Log.}\sqrt{\frac{2GR}{k}} & = \underline{3,6478756} & \text{Log.}\frac{355}{113} & = 0,4971500 \\
\text{Log.}\frac{R}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}} & = 3,6447576 & \text{Log.}\frac{587703''}{648000''} & = 9,9575829 \\
\text{Log.}\sqrt{\left(1+\frac{3}{11}\right)} & = 0,0523681 & \text{Log. } 30 & = \underline{1,4771213} \\
\text{Log.}\sqrt{\left(59-\frac{3}{11}\right)} & = \underline{0,8844199} & & \ 5,5766118 \\
 & \ 4,5815456 & &
\end{array}$$

quinci

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}\cdot R\left(1+\frac{3}{11}\right)\sqrt{\left(59-\frac{3}{11}\right)} = 38154'',74$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}\cdot 30R.\text{Arc. Cos.}\frac{-\left(29-\frac{3}{11}\right)R}{30R} = 377234'',8$$

$T = 415389'' = 115^{\text{ore}}\ 23'\ 9''$.

Con simile calcolo, ponendo $z = 59$, si troverà, che, qualora il centro della Luna arrivar potesse alla superficie della Terra, il tempo speso in arrivarvi sarebbe $= 415556'',54 = 115^{ore} 25' 56'',54$.

Supponiamo, che il centro medesimo della Luna, accelerato sempre da una attrazione crescente in ragione duplicata inversa dal centro della Terra, giugner potesse sino al centro della Terra stessa. Abbiamo veduto, che in arrivarvi avrebbe una velocità infinita. E quale sarebbe il tempo impiegato? fatto $z = k$ si ha $\sqrt{(kz - z^2)} = 0$ . . . . . Arc. Cos. $- 1 = 180^\circ = 648000''$. Laonde speditissimo è il calcolo del tempo

$$\text{Log.} \frac{R}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}} = 3,6447576$$

$$\text{Log.} \frac{355}{113} = 0,4971500$$

$$\text{Log} \frac{648000''}{648000''} = 0,0000000$$

$$\text{Log.} 30 = 1,4771213$$

$$\text{Log. T} = 5,6190289$$

Dunque $T = 415938'' = 115^{ore} 31' 18''$

Tanto, e non più sarebbe il tempo, che il centro della Luna, cadendo per l'attrazione della Terra dalla sua orbita, impiegherebbe ad arrivare sino al centro della Terra medesima; ma la velocità acquistata nel viaggio sarebbe infinita.

Facili riusciti sono questi calcoli intorno alla supposta caduta della Luna per la sola attrazione terrestre. Non è del pari facile il calcolo della caduta del sasso supposto scagliato da un vulcano lunare, retro-tratto dalla Luna, e sollecitato dalla Terra, come si vedrà.

PROBLEMA X.

Scagliato da un vulcano lunare lungo la retta dal centro della Luna vegnente al centro della Terra un sasso con velocità tale, che tra le retro-attrazioni della Luna e le sollecitazioni della Terra oltrepassar possa il punto delle uguali attrazioni dell' una e dell' altra, determinare per qualunque punto di essa retta, al quale il sasso suppongasi arrivato, il tempo in arrivarvi speso.

Sia xR il viaggio dal sasso fatto

V la sua velocità al fine di esso viaggio

T il tempo speso

$d(x\mathrm{R}) = \mathrm{R}dx$ il proseguimento infinitamente piccolo del viaggio

dT l' incremento infinitamente piccolo del tempo

Per i principj di Meccanica si ha

$$d\mathrm{T} = \frac{\mathrm{R}dx}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{R}dx}{\sqrt{\left(v^2 + \frac{\omega x}{\mathrm{N}-x} - \frac{\varphi x}{a+x}\right)}},$$ fatto per brevità $k-a=\mathrm{N}$

e perciò

$$\mathrm{T} = \mathrm{R}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(v^2 + \frac{\omega x}{\mathrm{N}-x} - \frac{\varphi x}{a+x}\right)}}$$

Questa frazione irrazionale da integrarsi non ammette di essere trasformata in razionale; laonde fa di mestieri ricorrere alle serie, ed accontentarsi di avere il valore di T per approssimazione.

SERIE I.

A svolgere la esposta frazione in serie il metodo, che primo s' affaccia, e più comune, si è di ridurre i tre termini sotto il radicale alla medesima denominazione, con che vien cangiata nella seguente forma

$$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{N}a + (\mathrm{N}-a)x - x^2}{\mathrm{N}av^2 + (v^2(\mathrm{N}-a) - (\mathrm{N}\varphi - a\omega))x + (\omega + \varphi - v^2)x^2}\right)},$$ che io compendio in

$$\sqrt{\left(\frac{\alpha + \beta x - x^2}{\gamma + \delta x + \varepsilon x^2}\right)},$$ e pongo = alla serie infinita

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x^3 + \mathrm{E}x^4 + \mathrm{F}x^5 + \mathrm{G}x^6 + \mathrm{H}x^7 + \mathrm{I}x^8 + \mathrm{K}x^9 : \ldots\ldots$$

onde sarà

$$\mathrm{T} = \mathrm{R}\left(\mathrm{A}x + \tfrac{1}{2}\mathrm{B}x^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{C}x^3 + \tfrac{1}{4}\mathrm{D}x^4 + \tfrac{1}{5}\mathrm{E}x^5 + \tfrac{1}{6}\mathrm{F}x^6 \ldots\ldots\right)$$

Bisogna determinare i coefficienti A, B, C, D .... e vedere l'indole della serie. Al che fare devesi elevare al quadrato la frazione irrazionale, e la serie infinita, ed il quadrato di questa moltitiplicare per il denominatore $\gamma+\delta x+\varepsilon x^2$, per le quali operazioni si avrà

$$\alpha+\beta x-x^2=$$
$$A^2\gamma+2AB\gamma x+B^2\gamma x^2$$
$$+2AC\gamma x^2+2BC\gamma x^3+C^2\gamma x^4$$
$$+2AD\gamma x^3+2BD\gamma x^4+2CD\gamma x^5 \dots$$
$$+2AE\gamma x^4 \dots\dots$$
$$\dots\dots$$
$$+A^2\delta x+2AB\delta x^2+B^2\delta x^3$$
$$+2AC\delta x^3+2BC\delta x^4+C^2\delta x^5$$
$$+2AD\delta x^4+2BD\delta x^5 \dots\dots$$
$$\dots\dots$$
$$+A^2\varepsilon x^2+2AB\varepsilon x^3+B^2\varepsilon x^4$$
$$+2AC\varepsilon x^4 \dots\dots$$
$$\dots\dots$$

donde

$A^2\gamma=\alpha$, e quinci $A=\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}=\sqrt{\frac{aN}{aNv^2}}=\frac{1}{v}$

$2AB\gamma+A^2\delta=\beta$, e perciò $B=\frac{\beta}{2a\gamma}-\frac{A^2\delta}{2A\gamma}=\frac{N-a}{2aNv}-\frac{v^2(N-a)}{2aNv^3}-$

$\frac{N\varphi-a\omega}{2aNv^3}=\frac{N\varphi-a\omega}{2aNv^3}=\frac{\psi}{v^3}$, ponendo $\frac{N\varphi-a\omega}{2aN}=\psi$

$B^2\gamma+2AC\gamma+2AB\delta+A^2\varepsilon=-1$, e però

$C=\frac{-1}{2aNv}-\frac{\varepsilon}{2aNv^3}-\frac{B\delta}{aNv^2}-\frac{B^2v}{2}=-\frac{\varphi}{2a^2v^3}-\frac{\omega}{2N^2v^3}+$

$\frac{3(N\varphi-a\omega)^2}{8a^2N^2v^5}=-\frac{\varphi}{2a^2v^3}-\frac{\omega}{2N^2v^3}+\frac{3vB^2}{2}$

- - - - - - - - - - - - - -

Dunque $Ax:\frac{1}{2}Bx^2::\frac{1}{v}B:\frac{1}{2}Bx::1:\frac{1}{2}vBx::1:\frac{1}{2}\cdot\frac{\psi}{v^2}x$

$\frac{1}{2}Bx^2:\frac{1}{3}Cx^3::\frac{1}{2}B:\frac{1}{3}Cx::\frac{1}{2}B:\left(\frac{vB^2}{2}-\frac{\varphi}{2.3a^2v^3}-\frac{\omega}{2.3N^2v^3}\right)$

$\left(vB-\frac{\varphi}{3a^2v^3B}-\frac{\omega}{3N^2v^3B}\right)x::1:\left(\frac{\psi}{v^2}-\frac{\varphi}{3a^2\psi}-\frac{\omega}{3N^2\psi}\right)x$

Riduciamo a numeri questi rapporti richiamando alla mente, che si è preso $v = 8292,73$, e che v^2 è per conseguenza $= 68769370,853$

$$\begin{array}{llll}
\text{Log. } \varphi & = 7\ 8702764 & \text{Log. } \omega & = 7,2977299 \\
\text{Log. } a & = \underline{9.4357286} & \text{Log. N} & = \underline{1.7761727} \\
 & \ 8,4345478 & & \ 5,5215572 \\
\text{Log. } 2 & = \underline{0.3010300} & \text{Log. } 2 & = \underline{0,3010300} \\
\text{Log.} \frac{\varphi}{2a} & = 8,1335178 & \text{Log. } \frac{\omega}{2N} & = 5,2205272
\end{array}$$

quindi $\frac{\varphi}{2a} = 135993375$; $\frac{\omega}{2N} = 166160,26$; $\frac{\varphi}{2a} \quad \frac{\omega}{2N} = \frac{N\varphi - a\omega}{2aN}$ $= \psi = 135827215,74$; Log. $\psi = 8,1329868$

$$\begin{array}{llll}
\text{Log } \frac{\varphi}{a} & = 8,4345478 & \text{Log. } \frac{\omega}{N} & = 5,5215572 \\
\text{Log. } a & = \underline{9,4357286} & \text{Log. N} & = \underline{1,7761727} \\
 & \ 8,9988192 & & \ 3.7453845 \\
\text{Log. } 3 & = \underline{0,4771213} & \text{Log. } 3 & = \underline{0.4771213} \\
 & \ 8,5215079 & & \ 3.2682632 \\
\text{Log. } \psi & = \underline{8,1329868} & \text{Log. } \psi & = \underline{8,1329868} \\
\text{Log.} \frac{\varphi}{3a^2\psi} & = 0,3887111 & \text{Log. } \frac{\omega}{3N^2\psi} & = 5,1352764
\end{array}$$

Per conseguenza $\frac{\varphi}{3a^2\psi} = 447434$; $\frac{\omega}{3N^2\psi} = 0,000013654$

$- \frac{\varphi}{3a^2\psi} - \frac{\omega}{3N^2\psi} = - 2,447448$.

Dunque il 1° termine della serie sta al 2° come 1 a $\frac{135827215,74}{v^2} \cdot \frac{x}{2}$. Per la qual cosa a far sì, che il primo fosse del 2° maggiore per tutta la estensione di x, cioè posto eziandio $x = 59 - \frac{3}{11}$, converrebbe, che v^2 fosse maggiore di $135827215,74 \times \frac{59 - \frac{3}{11}}{2}$. Nel mio supposto di $v = 8292\ 73$ la ragione del 1° termine al 2° è quella di $1 : \frac{135827215,74}{68769370,853} \cdot \frac{x}{2}$, cioè, riducendo, di $1 : 1,975 \cdot \frac{x}{2}$, e di $1 : 0,9875\left(59 - \frac{3}{11}\right)$ fatto

$x =$

$x = 59 - \frac{3}{11}$. Dal che apparisce che il 2° termine non può essere minore del termine 1°, che dando ad x un valore minore di $\frac{2000}{1975}$; e che riesca grandemente di esso 1° maggiore posto $x = 59 - \frac{3}{11}$.

Il 2° termine poi della serie sta al 3° : : 1 : $(1,975 - 2,447)x$: : 1 : $(-0,472)x$; laonde rilevasi, considerando soltanto la quantità, che il termine 3° non può essere minore del 2°, che preso x minore di $\frac{1000}{472}$; e che risulta molto maggiore fatto $x = 59 - \frac{3}{11}$. È per tanto la serie dal 1° al 2°, dal 2° al 3° termine divergente; la divergenza cala, ma non si vede dove possa finire; e si presenta inoltre l' incomodo della mescolanza dei termini negativi ai positivi. Volgiamoci dunque a cercare altra serie, che sia dal suo principio convergente, e proceda pure se è possibile, costantemente con termini positivi.

SERIE II.

Ripresa l' espressione primigenia di T

$$T = R\int \frac{dx}{\sqrt{\left(v^2 + \frac{\omega r}{N-x} - \frac{\varphi x}{a+x}\right)}}$$

fo $v^2 = P$, $\frac{\omega x}{N-x} - \frac{\varphi x}{a+x} = Q$, e sarà $T = R\int (P+Q)^{-\frac{1}{2}} dx =$

$$R\int\left(P^{-\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} P^{-\frac{3}{2}} Q\, dx + \frac{3}{8} P^{-\frac{5}{2}} Q^2\, dx - \frac{5}{16} P^{-\frac{7}{2}} Q^3\, dx \;.\;.\;.\;.\;.\right)$$

Avanti di passare alle integrazioni risolvo Q in parte intera e coe costante, ed in parte fratta e variabile . Di fatti dividendo in ciascun dei due termini il numeratore per il denominatore , e congiungendo in una le due frazioni variabili rimanenti , si ha

$$Q = -\omega + \frac{N\omega}{N-x} - \varphi + \frac{a\varphi}{a+x} = -(\omega+\varphi) +$$

$\frac{Na(\omega+\varphi)+(N\omega-a\varphi)x}{(N-x)(a+x)} = -\beta + \frac{\gamma+\delta x}{(N-x)(a+x)}$ ponendo per comodo

$\omega+\varphi=\beta$, $Na(\omega+\varphi)=\gamma$, $N\omega-a\varphi=\delta$

Or integriamo .

$R\int P^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{R}{v}x$, e fatto $x=59-a$, $= \frac{R}{v}(59-a)$

$$\begin{array}{ll}
\text{Log. } R & = 7{,}2926332 \\
\text{Log } (59-a) & = \underline{1{,}7688398} \\
 & \ 9{,}0614730 \\
\text{Log. } v & = \underline{3{,}9186976} \\
\text{Log. } \frac{R}{v}(59-a) & = 5{,}1427754
\end{array}$$

Dunque $R\int P^{-\frac{1}{2}}dx = 138923'',38$

$$R\int -\frac{1}{2}P^{-\frac{3}{2}}Q\,dx = R\int\frac{-1}{2v^3}\left(-\beta+\frac{\gamma+\delta x}{(N-x)(a+x)}\right)dx =$$

$$\frac{R\beta x}{2v^3} - \frac{R}{2v^3}\int\frac{(\gamma+\delta x)dx}{(N-x)(a+x)}$$

$$\frac{R\beta x}{2v^3} = \frac{\beta}{2v^2}\cdot\frac{Rx}{v}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Log. } \beta & = 7{,}9732514 \\
\text{Log } 2 & = \underline{0{,}3010300} \\
 & \ 7{,}6722214 \\
\text{Log. } v^2 & = \underline{7{,}8373952} \\
\text{Log. } \frac{\beta}{2v^2} & = 9{,}8348262 \\
\text{Log. } \frac{R}{v}(59-a) & = \underline{5{,}1427754}
\end{array}$$

$\text{Log. } \frac{R\beta}{2v^3}(59-a) = 4{,}9776016$. Quinci $\frac{R\beta(59-a)}{2v^3} = 94973'',3$

$$\frac{(\gamma+\delta x)dx}{(N-x)(a+x)} = \frac{A dx}{N-x} + \frac{B dx}{a+x}$$

$A = \frac{\gamma+\delta x}{a+x}$, fatto $N-x=o$, donde $x=N$, e perciò $A = \frac{\gamma+\delta N}{k}$

$$= \frac{Na\omega+Na\varphi+N^2 a-Na\varphi}{k} = \frac{(N+a)N^{\omega}}{k} = N\omega$$

$B = \frac{\gamma+\delta x}{N-x}$ fatto $a+x=o$, donde $x=-a$, e perciò

$B = \frac{\gamma-a\delta}{k} = a\,\varphi$ · Segnando per l i logaritmi iperbolici

$\int\frac{A dx}{N-x} = -A\,l\,(N-x) + l.\,\mathrm{Cost.} = -Al(N-x) + A\,l.\,N$ (esser dovendo l' integrale $=o$, preso $x=o$) $= A\,l\,\frac{N}{N-x}$, ed $= A\,lN$ fatto $x=59-a$

$\int\frac{B dx}{a+x} = B\,l\,(a+x) + l.\mathrm{Cost.} = B\,l\,(a+x) - B\,l\,a = Bl\,\frac{a+x}{a}$ ed $=$ $Bl\,\frac{59}{a}$, fatto $x=59-a$.

Dunque

$$-\frac{R}{2v^3}\int\frac{\gamma+\delta x}{(N-x)(a+x)} = -\frac{R}{2v^3}\left(N\omega lN + a\varphi l\,\frac{59}{a}\right)$$

trovasi $lN = l\,59{,}727272727) = 4{,}0897608$

$l.\,\frac{59}{a} = l.\,\frac{59\,.\,11}{3} = 5{,}3768204$: e quinci il seguente calcolo

$$\begin{array}{lcr lcr}
\mathrm{Log.}\ R & = & 7{,}2926332 & \mathrm{Log.}\,\frac{R}{2v^3} & = & 5{,}2355104 \\
\mathrm{Log.}\ 2v^3 & = & \underline{12{,}0571228} & \mathrm{Log.}\ a\,\varphi & = & 7{,}3060050 \\
 & & 5{,}2355104 & & & \\
\mathrm{Log.}\ N\omega & = & 9{,}0739026 & \mathrm{Log.}\,l\,\frac{59}{a} & = & \underline{0{,}7305255} \\
\mathrm{Log.}\,l\ N & = & \underline{0{,}6116980} & & & \\
\mathrm{Log.}\,\frac{R}{2v^3}N\omega.l.N = & & 4{,}9211110 & \mathrm{Log.}\,\frac{R}{2v^3}\cdot a\varphi l.\frac{59}{a} = & & 3{,}1720409 \\
\text{Laonde}\ \frac{R}{2v^3}\cdot N\omega lN = 83389'',41 & & & \frac{R}{2v^3}\cdot a\,\varphi\,l.\,\frac{59}{a} & = & 1870'',85\,.
\end{array}$$

Dunque

$$R\int -\tfrac{1}{2}\,P^{-\frac{3}{2}}Q\,dx = 94973'',3 - 83389'',41 - 1870'',85 = 9713''$$

$$R\int \tfrac{3}{8}\,P^{-\frac{5}{2}}Q^2\,dx = \frac{3R}{8\,v^5}\int\left(-\beta+\frac{\gamma+\delta x}{(N-x)(a+x)}\right)^2 dx =$$

$$\frac{3R}{8v^5}\,\beta^2 x - \frac{3R}{8v^5}\int\frac{2\beta(\gamma+\delta x)dx}{(N-x)(a+x)} + \frac{3R}{8v^5}\int\frac{(\gamma+\delta x)^2}{(N-x)^2(a+x)^2}\,dx\,.$$

$$\frac{3R}{8v^5}\cdot\beta^2(59-a) = \frac{3\beta}{4v^2}\cdot\frac{R}{2v^3}(59-a)$$

Log. 3β = 8,4503727

Log $4v^2$ = 8.4394552

0,0109175

Log. $\frac{R\beta(59-a)}{2v^3}$ = 4,9776016

Log. $\frac{3\beta}{4v^2}\cdot\frac{R\beta(59-a)}{2v^3}$ = 4,9885191 . Dunque $\frac{3R}{8v^5}\beta^2(59-a) = 97391'',07$

$$\frac{3R}{8v^5}\int\frac{2\beta(\gamma+\delta x)dx}{(N-x)(a+x)} = \frac{3\beta}{2v^2}\cdot\frac{R}{2v^5}\int\frac{(\gamma+\delta x)dx}{(N-x)(a+x)} = \frac{3\beta}{2v^2}(85260'',26)$$

Log. 3β = 8,4503727

Log. $2v^2$ = 8,1384252

0,3119475

Log. 85260,26 = 4,9307466

Log. $\frac{3\beta}{2v^2}(85260,26)$ = 5,2426941 . Dunque $\frac{-3R}{8v^5}\int\frac{2\beta(\gamma+\delta x)dx}{(N-x)(a+x)} =$ $-174861'',44$

$$\frac{(\gamma+\delta x)^2 dx}{(N-x)^2(a+x)^2} = \frac{A\,dx}{(N-x)^2} + \frac{A'dx}{N-x} + \frac{B\,dx}{(a+x)^2} + \frac{B'dx}{a+x}$$

$A = \frac{(\gamma+\delta x)}{(a+x)^2}$ fatto $N-x=0$, donde $x=N$, $A = \frac{(\gamma+\delta N)^2}{k^2} = N^2\omega^2$

$A' = \frac{1}{-dx}\,d\,\frac{(\gamma+\delta x)^2}{(a+x)^2}$ (fatto dopo la differenziazione $x=N$) =

$$\frac{-1}{dx}\left(\frac{2\delta(\gamma+\delta x)dx}{(a+x)^2} - \frac{2(\gamma+\delta x)^2 dx}{(a+x)^3}\right) = -\frac{2\delta(\gamma+\delta N)}{k^2} + \frac{2(\gamma+\delta N)^2}{k^3} =$$

$$2\left(-\frac{N\omega\delta}{k} + \frac{N^2\omega^2}{k}\right) = -\frac{2N\omega\varphi z}{k}$$

$\mathrm{B} = \frac{(\gamma+\delta x)^2}{(\mathrm{N}-x)^2}$ fatto $x+a=0$, donde $x=-a$, $\mathrm{B}=\frac{(\gamma-\delta a)^2}{k^2}=a^2\varphi^2$

$\mathrm{B}' = \frac{1}{dx}\, d\, \frac{(\gamma+\delta x)^2}{(\mathrm{N}-x)^2}$ (fatto dopo la differenziazione $x=-a$) $=$

$$\frac{2\delta(\gamma+\delta x)}{(\mathrm{N}-x)^2}+\frac{2(\gamma+\delta x)^2}{(\mathrm{N}-x)^3}=\frac{2\delta(\gamma-\delta a)}{k^2}+\frac{2(\gamma-\delta a)^2}{k^3}=2\left(\frac{a\varphi\delta}{k}+\frac{a^2\varphi^2}{k}\right)=\frac{2\mathrm{N}\omega\varphi a}{k}$$

$$\int\frac{\mathrm{A}dx}{(\mathrm{N}-x)^2}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}-x}+\text{cost.}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}-x}-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}=\frac{\mathrm{N}^2\omega^2}{\mathrm{N}-x}-\frac{\mathrm{N}^2\omega^2}{\mathrm{N}},$$

e (posto $x=59-a$) $=\mathrm{N}^2\omega^2-\mathrm{N}\omega^2$

$$\int\frac{\mathrm{A}\cdot dx}{\mathrm{N}-x}=-\mathrm{A}'l(\mathrm{N}-x)+l.\text{cost.}=\mathrm{A}'l\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-x}=-\frac{2\mathrm{N}\omega\varphi a}{k}\,l\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-x},$$

ed $=-\frac{2\mathrm{N}\omega\varphi a}{k}\,l.\mathrm{N}$, fatto $x=59-a$

$$\int\frac{\mathrm{B}dx}{a+x}=-\frac{\mathrm{B}}{a+x}+\text{cost.}=-\frac{\mathrm{B}}{a+x}+\frac{\mathrm{B}}{a}=-\frac{a^2\varphi^2}{a+x}+a\varphi^2,$$

ed $=-\frac{a^2\varphi^2}{59}+a\varphi^2$, fatto $x=59-a$

$\int\frac{\mathrm{B}'dx}{a+x}=\mathrm{B}'l.(a+x)+l.\text{cost.}=\mathrm{B}'l\,\frac{a+x}{a}$; ed $=\mathrm{B}'\,l\,\frac{59}{a}=$

$\frac{2\mathrm{N}\omega\varphi a}{k}\,l.\,\frac{59}{a}$, pigliato $x=59-a$

Log. $3\mathrm{R}$	$=$	$7{,}7697545$
Log. $8v^5$	$=$	$20{,}4965780$
		$7{,}2731765$
Log $\mathrm{N}^2\omega^2$	$=$	$18{,}1478052$
Log. $\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\,.\,\mathrm{N}^2\omega^2$	$=$	$5{,}4209817$
Log. N	$=$	$1{,}7761727$
Log. $\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\,.\,\mathrm{N}\omega^2$	$=$	$3{,}6448090$

Log. $\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}$	$=$	$7{,}2731765$
Log. 2	$=$	$0{,}3010300$
Log. $\mathrm{N}\omega$	$=$	$9{,}0739026$
Log. φa	$=$	$7{,}3060050$
Log. $l\mathrm{N}$	$=$	0.6116980
		$4{,}5658121$
Log. k	$=$	$1{,}7781513$
Log. $\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\cdot\frac{2\mathrm{N}\omega\varphi a}{k}l\mathrm{N}$	$=$	$2{,}7876608$

Quinci

$\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\,.\,\mathrm{N}^2\omega^2 = 263622$

$-\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\cdot\frac{2\mathrm{N}\omega\varphi a}{k}\,l\mathrm{N}=-613{,}28$

$\frac{3}{8v^5}\,.\,\mathrm{N}\omega^2 = 4413{,}76$

$\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}(\mathrm{N}^2\omega^2-\mathrm{N}\omega^2) = 259208{,}24$

Log.

$$\mathrm{Log.}\ \frac{3\mathrm{R}}{8v^5} = 7{,}2731765$$

$$\mathrm{Log.}\ a = 9{,}4356286$$

$$\mathrm{Log.}\ \varphi^2 = 15{,}7405528$$

$$\mathrm{Log.}\ \frac{3\mathrm{R}}{8v^5}.a\varphi^2 = 2{,}4494579$$

$$\mathrm{Log.}\ a = 9{,}4357286$$

$$1{,}8851865$$

$$\mathrm{Log.}\ 59 = 1{,}7708520$$

$$\mathrm{Log.}\ \frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\cdot\frac{a^2\varphi^2}{59} = 0{,}1143345$$

$$\mathrm{Log.}\ \frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\cdot\frac{2\mathrm{N}\omega\varphi a}{k} = 2{,}1759628$$

$$\mathrm{Log.}\ l\,\frac{59}{a} = 0{,}7305255$$

$$\mathrm{Log.}\ \frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\cdot\frac{2\mathrm{N}\omega\rho a}{k}\cdot l\frac{59}{a} = 2{,}9064883$$

$$\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\cdot\frac{2\mathrm{N}\omega\rho a}{k}\,l\,\frac{59}{a} = 806'',28$$

Quindi

$$\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}.a\varphi^2 = 285'',48$$

$$-\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}.a^2\varphi^2 = -1'',30$$

$$\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\left(a\varphi^2 - \frac{a^2\varphi^2}{59}\right) = 280'',18$$

Dunque

$$\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\int\beta^2\,dx = 97391'',07$$

$$-\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\int\frac{2\beta(\gamma+\delta x)dx}{(\mathrm{N}-x)(a+x)} = -174861'',44$$

$$\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\int\frac{(\gamma+\delta x)dx}{(\mathrm{N}-x)^2(a+x)^2} = \frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\int\frac{\mathrm{A}dx}{(\mathrm{N}-x)} + \frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\int\frac{\mathrm{A}'dx}{\mathrm{N}-x} + \frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\int\frac{\mathrm{B}dx}{(a+x)^2} +$$

$$\frac{3\mathrm{R}}{8v^5}\int\frac{\mathrm{B}'dx}{a+x} = 259208'',24 - 613'',28 + 280'',18 + 806'',28 = 259681'',42$$

Laonde $\mathrm{R}\int\frac{3}{8}\mathrm{P}^{-\frac{5}{2}}\mathrm{Q}^2dx = 97391'',07 - 174861'',44 + 259681'',42 = 182211'',05$. Dando pertanto il 1° termine della serie 138923'', il 2° 9713'', il 3° 259681'', si fa chiaro che anche questa serie manca della desiderata costante convergenza, ed è irregolare, onde conviene abbandonarla. Tentiamone una terza

SERIE III.

A formare una terza serie pongo $\mathrm{P} = v^2 + \frac{\omega x}{\mathrm{N}-x}$, $\mathrm{Q} = \frac{\varphi x}{a+x}$, per lo che sarà $T = R\int(P - Q)^{\frac{-1}{2}}dx = R\int(P^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{2}P^{\frac{-3}{2}}Q + \frac{3}{8}P^{\frac{-5}{2}}Q^2 + \frac{5}{16}P^{\frac{-7}{2}}Q^3 \ldots)dx$: il calcolo di questa serie riuscirebbe faticosissimo, se non si potesse trattare i suoi termini in modi generali, e con opportuni teoremi risparmiare molte operazioni. Egli è per ciò, che a' calcoli dei termini in particolare premetto la teoria generale della serie.

Teoria generale della Serie.

Prob. 1° trovare il termine generale della serie.
Inteso per μ il coefficiente numerico, la forma generale dei termini si è

$$\mu P^{-\pi-\frac{1}{2}}Q^{\pi}\,dx$$

Il coefficiente μ è $= 1$ per il primo termine, cioè quando $\pi = 0$, ed è generalmente per gli altri termini $= \frac{1.3.5.7.9 \ldots 2\pi-1}{1.2.3.4.5 \ldots\ldots \pi.2^{\pi}}$.
Poichè il coefficiente si forma per il prodotto continuo dei termini della serie

$$1,\ \frac{-\frac{1}{2}}{1},\ \frac{-\frac{3}{2}}{2},\ \frac{-\frac{5}{2}}{3},\ \frac{-\frac{7}{2}}{4},\ \ldots\ \frac{-\frac{2\pi-1}{2}}{\pi}.$$

Risulta il coefficiente alternativamente positivo, e negativo; positivo per il 1° termine, negativo per il 2°, positivo per il 3°, negativo per il 4°, e così via via; ma siccome devesi moltiplicare nella podestà $(-Q)^{\pi}$, che nel 1° termine è $(-Q)^0 = 1$, nel 2° è $(-Q)^1 = -Q^2$, nel 3° è $(-Q)^2 = Q^2$, e così alternativamente positiva, e negativa nei termini, dov' è istessamente positivo, e negativo il coefficiente, perciò ogni termine della serie riesce positivo.

Teorema 1° La serie del termine generale $\mu P^{-\pi-\frac{1}{2}}Q^{\pi}$ è, nel valore di $x = 59 - a$, convergente

Essendo $\mu P^{-\pi-\frac{1}{2}}Q^{\pi}$ il termine π^{esimo}, sarà il suo susseguente $(\pi+1)^{esimo} = \frac{\mu(2(\pi+1)-1)}{(\pi+1)^2} P^{-\pi-\frac{1}{2}}Q^{\pi+1}$. Dunque in generale il π^{esimo} al $(\pi+1)^{esimo} : : 1 : \frac{2\pi+1}{2\pi+2}P^{-1}Q$. Si è posto $P = v^2 + \frac{\omega x}{N-x} = \frac{Nv^2-(v^2-\omega)x}{N-x}$, e perciò $P^{-1} = \frac{N-x}{Nv^2-(v^2-\omega)x}$; e si è posto $Q = \frac{\omega x}{a+x}$: Il coefficiente $\frac{2\pi+1}{2\pi+2}$ è evidentemente una frazione, e parimenti $\frac{x}{a+x}$; onde resta a vedere, che cosa divenga $\frac{(N-x)\phi}{Nv^2-(v-\omega)x}$ dato ad x il suo massimo valore $= 59 - a$. Ora, posto ciò, $N - x = k - a - (59 - a) = 1$, ed $Nv^2 - (v^2 - \omega)x = (60 - a)v^2 - (v^2 - \omega)(59 - a) = v^2 + \omega(59 - a)$: dunque $\frac{(N-x)\phi}{Nv^2-(v^2-\omega)x} = \frac{\phi}{v^2+\omega(59-a)}$. Ma nel Pròbl. VI il calcolo ci ha dato il logaritmo di $\phi = 7{,}8702764$; e nel Prob. IX si è trovato il logaritmo di $\omega(59-a) = 9{,}0665697$: dunque $\phi < \omega(59-a)$, ed a più forte ragione $< v^2 + \omega(59-a)$, e conseguentemente $\frac{\phi}{v^2+\omega(59-a)}$ vera frazione: per la qual cosa il prodotto $\frac{2\pi+1}{2\pi+2} \cdot \frac{(N-x)\phi}{Nv^2-(v^2-\omega)x} \cdot \frac{x}{a+x}$ nel caso di $x = 59 - a$ è un prodotto di tre frazioni, e quinci necessariamente una frazione di ciascuna delle tre minore. Dunque stando generalmente il termine π^{esimo} della serie al $(\pi+1)^{esimo}$ come 1 a tale prodotto, resta dimostrato, che quello è di questo in tutta la serie, nel caso di $x = 59 - a$, minore, e che la serie del termine generale $\mu P^{-\pi-\frac{1}{2}}Q^{\pi}$ riesce in tal caso convergente.

Prob. 2° Rendere razionale il termine generale $\mu P^{-\pi-\frac{1}{2}}Q^{\pi}dx$. Essendo per le posizioni $P = v^2 + \frac{\omega x}{N-x} = \frac{Nv^2-(v^2-\omega)x}{N-x}$, $Q = \frac{\omega x}{a+x}$; e dalla prima posizione venendone $P^{-1} = \frac{N-x}{v^2+\omega(59-a)}$, ristringo per comodità questo valore di P in $\frac{N-x}{e-f^2x}$ segnando Nv^2 per e e $v^2-\omega$ per f^2

fo poi $\frac{N-x}{e-f^2x}=z^2$, donde ne segue $x=\frac{N-ez^2}{1-f^2z^2}=\frac{N(1-v^2z^2)}{1-f^2z^2}$, ed indi $dx=\frac{-2zdz(e-f^2N)}{(1-f^2z^2)^2}=\frac{-2N\omega.zdz}{(1-f^2z^2)^2}$, per essere $e-f^2N=N\omega$.

$Q=\frac{\varphi N(1-v^2z^2)}{1-f^2z^4}\times\frac{1-f^2z^2}{N+a-(af^2+e)z^2}=\frac{\varphi N(1-v^2z^2)}{k-(kv^2-a\omega)z^2}=\frac{\varphi N(v^2z^2-1)}{Mz^2-k}$, facendo $kv^2-a\omega=M$. Ed insieme componendo queste espressioni di P, dx, Q si ha

$$\mu P^{-\pi-\frac{1}{2}}Q^{\pi}dx=\frac{-2\mu N^{\pi+1}\omega\varphi^{\pi}z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^{\pi}dz}{(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^{\pi}}.$$

Si scorge a primo colpo d' occhio, che il grado di z nel numeratore risulta $=4\pi+2$, laddove nel denominatore risulta $=2\pi+4$; onde in questo riesce lo stesso, che in quello nel caso di $\pi=1$, e minore in tutti gli altri di π maggiore di 1. Anche pertanto nel caso di $\pi=1$, e molto più nei casi di $\pi>1$ fa di mestieri dividere il numeratore per il denominatore sino ad abbassar quello ad un grado minore, che questo, spezzando così la frazione impura in due parti una intera, e l' altra fratta.

Prob. 3° Spezzando la frazione $\frac{z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)}{(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^{\pi}}$ in due parti, una intera, la quale si segni per 'Z, l' altra fratta, la quale si denoti per $\frac{Z}{(1-f^2z^2)(Mz^2-k)}$: determinare la forma della parte intera 'Z.

Svolgendo per la formola Newtoniana $(v^2z^2-1)^{\pi}$ si ha

$$v^2z^{2\pi}-\pi v^{2\pi-2}z^{2\pi-2}+\frac{\pi(\pi-1)}{1.2}v^{2\pi-4}z^{2\pi-4}-\frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)}{1.2.3}v^{2\pi-6}z^{2\pi-6}\dots$$

Ponendo per comodo $\frac{\pi(\pi-1)}{1.2}=\pi'$, $\frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)}{1.2.3}=\pi''$ . . . .

Si ha $z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^{\pi}=$

$$v^{2\pi}z^{4\pi+2}-\pi v^{2\pi-2}z^{4\pi}+\pi'v^{2\pi-4}z^{4\pi-2}-\pi''v^{2\pi-6}z^{4\pi-4}+\pi'''v^{2\pi-8}z^{4\pi-6}\dots$$

Similmente $(Mz^2-k)^{\pi}=$

$$M^{\pi}z^{2\pi}-\pi M^{\pi-1}z^{2\pi-2}k+\pi'M^{\pi-2}z^{2\pi-4}k^2-\pi''M^{\pi-3}z^{2\pi-6}k^3+\pi'''M^{\pi-4}z^{2\pi-8}$$

ed $(\mathrm{M}z^2-k)^\pi(1-f^2z^2)^2 = \mathrm{M}^\pi f^4 z^{2\pi+4}$

$$-\pi f^4\mathrm{M}^{\pi-1}kz^{2\pi+2}+\pi' f^4\mathrm{M}^{\pi-2}k^2z^{2\pi}-\pi'' f^4\mathrm{M}^{\pi-3}k^3z^{2\pi-2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-2f^2\mathrm{M}^\pi\, z^{2\pi+2}+2\pi f^2\mathrm{M}^{\pi-1}kz^{2\pi}-2\pi' f^2\mathrm{M}^{\pi-2}k^2z^{2\pi-2}\ldots \pm 2f^2k^\pi z^2$$
$$+\mathrm{M}^\pi\, z^{2\pi}\quad-\pi\mathrm{M}^{\pi-1}k\,z^{2\pi-2}\ldots\pm\pi\mathrm{M}k^{\pi-1}z^2\mp k^\pi$$

dai quali termini abbastanza manifestasi la legge per formare qualunque altro termine ulteriore .

Si denoti $\mathrm{M}^\pi f^4$ per (a), ed ordinatamente gli altri coefficienti per (b), (c), (d), (e) . . . (n) , (p).
Dividendo $(v^2z^2-1)^\pi z^{2\pi+2}$ per $(\mathrm{M}z^2-k)^\pi(1-f^2z^2)^2$, si troverà la cercata forma della intera parte 'Z essere

$$'\mathrm{Z}=\frac{v^{2\pi}}{(a)}z^{2\pi-2}+\frac{\Delta}{(a)}z^{2\pi-4}+\frac{\Delta'}{(a)}z^{2\pi-6}+\frac{\Delta''}{(a)}z^{2\pi-8}+\frac{\Delta'''}{(a)}z^{2\pi-10}\ldots\text{sino}$$

a z^0: e sarà $\Delta=\frac{(b)}{(a)}v^{2\pi}-\pi v^{2\pi-2}$

$$\Delta'=\frac{(b)}{(a)}\quad-\frac{(c)}{(a)}v^{2\pi}+\pi' v^{2\pi-4}$$
$$\Delta''=\frac{(b)}{(a)}\Delta'-\frac{(c)}{(a)}\Delta+\frac{(d)}{(a)}v^{2\pi}-\pi'' v^{2\pi-6}$$
$$\Delta'''=\frac{(b)}{(a)}\Delta''-\frac{(c)}{(a)}\Delta''+\frac{(d)}{(a)}\Delta'-\frac{(e)}{(a)}v^{2\pi}+\pi''' v^{2\pi-8}$$

. . . .

è già palese l'andamento .
Si ha poi

$$\frac{(b)}{(a)}=\frac{\pi k}{\mathrm{M}}+\frac{2}{f^2}$$
$$\frac{(c)}{(a)}=\frac{\pi' k^2}{\mathrm{M}^4}+\frac{2\pi k}{\mathrm{M}f^2}+\frac{1}{f^4}$$
$$\frac{(d)}{(a)}=\frac{\pi'' k^3}{\mathrm{M}^3}+\frac{2\pi' k^2}{\mathrm{M}^2f^2}+\frac{\pi k}{\mathrm{M}f^4}$$
$$\frac{(e)}{(a)}=\frac{\pi''' k^4}{\mathrm{M}^4}+\frac{2\pi'' k^3}{\mathrm{M}^3f^2}+\frac{\pi' k^2}{\mathrm{M}^2f^4}$$

. . . .

$$\frac{(n)}{(a)}=\frac{2k^\pi}{\mathrm{M}^\pi f^2}+\frac{\pi k^{\pi-1}}{\mathrm{M}^{\pi-1}f^4}$$
$$\frac{(p)}{(a)}=\frac{k^\pi}{\mathrm{M}^\pi f^4}$$

Li quozienti 3°, 4°, 5° dimostrano il progresso per gli altri sino ai due ultimi, dove dai tre termini si ritorna a due, e si finisce in un solo

Per mezzo di codesti quozienti si trova svolgendo

$$\Delta = \frac{\pi k v^{2\pi}}{M} + \frac{2v^{2\pi}}{f^2} - \pi v^{2\pi-2}$$

$$\Delta' = \frac{(\pi^2-\pi')k^2v^{2\pi}}{M^2} + \frac{2\pi k v^{2\pi}}{Mf^2} + \frac{3v^{2\pi}}{f^4} - \frac{\pi^2 k v^{2\pi-2}}{M} - \frac{2\pi v^{2\pi-2}}{f^2} + \pi' v^{2\pi-4}$$

$$\Delta'' = \frac{(\pi^3-2\pi\pi'+\pi'')k^3v^{2\pi}}{M^3} + \frac{2(\pi^2-\pi')k^2v^{2\pi}}{M^2f^2} + \frac{3\pi k v^{2\pi}}{Mf^4} + \frac{4v^{2\pi}}{f^6} - \frac{(\pi^3-\pi\pi'}{M^2}$$

$$- \frac{2\pi^2 k v^{2\pi-2}}{Mf^2} - \frac{3\pi v^{2\pi-2}}{f^4} + \frac{\pi\pi' k v^{2\pi-4}}{M} + \frac{2\pi' v^{2\pi-4}}{f^2} - \pi'' v^{2\pi-6}$$

. . . .

Queste espressioni ammettono delle riduzioni generali. Per esempio l' espressione di Δ si riduce generalmente a

$$\Delta = \frac{2v^{2\pi}}{f^2} + \frac{\pi a\omega v^{2\pi-2}}{M}; \text{ poichè } \frac{\pi k v^{2\pi}}{M} - \pi v^{2\pi-2} = \frac{\pi v^{2\pi-2}}{M}(kv^2-M) =$$

$$\frac{\pi v^{2\pi-2}}{M}(kv^2-kv^2+a\omega) = \frac{\pi a\omega v^{2\pi-2}}{M} \text{ (Probl. 2°).}$$

A molte più riduzioni si fa luogo in particolare secondo i varj valori di π. Ad esempio, nel caso di $\pi = 4$, si ha immediatamente

$$\Delta'' = \frac{20k^3v^8}{M^3} + \frac{20k^2v^8}{M^2f^2} + \frac{12kv^8}{Mf^4} + \frac{4v^8}{f^6} - \frac{40k^2v^6}{M^2} - \frac{32kv^6}{Mf^2} - \frac{12v^6}{f^4} +$$

$$\frac{24kv^4}{M} + \frac{12v^4}{f^2} - 4v^2; \text{ ma si ottiene riducendo}$$

$$\Delta'' = \frac{20k^2a\omega v^6}{M^3} + \frac{12k\omega v^6}{Mf^4} + \frac{20ka\omega^2v^4}{M^2f^2} + \frac{4kv^4}{M} + \frac{4\omega^3v^2}{f^6}; \text{ imperciocchè}$$

$$\frac{20k^3v^8}{M^3} - \frac{20k^2v^6}{M^2} = \frac{20k^2v^6}{M^3}(kv^2-M) = \frac{20k^2a\omega v^6}{M^3}$$

$$\frac{20k^2v^8}{M^2f^2} - \frac{20k^2v^6}{M^2} = \frac{20k^2v^6}{M^2f^2}(v^2-f^2) = \frac{20k^2v^6}{M^2f^2}\left(v^2-(v^2-\omega^2)\right) = \frac{20k^2\omega v^6}{M^2f^2}$$

$$\frac{12kv^8}{Mf^4} - \frac{12kv^6}{Mf^2} = \frac{12kv^6}{Mf^4}(v^2-f^2) = \frac{12k\omega v^6}{Mf^4}$$

$$-\frac{20kv^6}{Mf^2} + \frac{20kv^4}{M} = \frac{-20kv^4}{Mf^2}\left(v^2-f^2\right) = -\frac{20k\omega v^8}{Mf^2}$$

$$\frac{4v^8}{f^6} - \frac{12v^6}{f^4} + \frac{12v^4}{f^2} - 4v^2 = 4v^2\left(\frac{v^2}{f^2}-1\right)^3 = \frac{4v^2}{f^6}\left(v^2-f^2\right)^3 = \frac{4\omega^3v^2}{f^6}$$

e di nuovo $\frac{20k^2\omega v^6}{M^2f^2} - \frac{20k\omega v^4}{Mf^2} = \frac{20k\omega v^4}{M^2f^4}\left(kv^2 - M\right) = \frac{20k\omega^2v^4}{M^2f^2}$.

Si vedrà nell'applicazione la comodità prodotta da simili riduzioni . Ed è bene riserbarsi a farle tutte in particolare per non chiudersi con qualche generale il luogo a qualcheduna particolare più vantaggiosa, come sarebbe avvenuto, se riducendo generalmente la espressione immediata di Δ'' , si fosse nelle generali riduzioni compreso alcuno dei quattro termini, che in particolare, nel caso di $\pi = 4$, si sono ridotti nel solo termine $\frac{4\omega^3v^2}{f^6}$.

Prob. 4. Assegnare la forma del numeratore Z della parte fratta $\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^\pi}$.

La forma sarà in generale

$$\alpha z^{2\pi+2} - \beta z^{2\pi} + \gamma z^{2\pi-2} - \delta z^{2\pi-4} + \varepsilon z^{2\pi-6} \ldots \mp \xi$$

ed i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ . . . . . saranno formole composte di $\Delta, \Delta', \Delta''$ . . . . con inverso ordine moltiplicate per gli esposti quozienti $\frac{(b)}{(a)}$, $\frac{(c)}{(a)}$, $\frac{(d)}{(a)}$ . . . Nel caso ad esempio di $\pi = 4$ si avrà

$$\alpha = \frac{(b)}{(a)}\Delta'' - \frac{(c)}{(a)}\Delta' + \frac{(d)}{(a)}\Delta - \frac{(e)}{(a)}v^8 + 1$$

$$\beta = \frac{(c)}{(a)}\Delta'' - \frac{(d)}{(a)}\Delta' + \frac{(e)}{(a)}\Delta - \frac{(f)}{(a)}v^8$$

$$\gamma = \frac{(d)}{(a)}\Delta'' - \frac{(e)}{(a)}\Delta' + \frac{(n)}{(a)}\Delta - \frac{(p)}{(a)}v^8$$

$$\delta = \frac{(e)}{(a)}\Delta'' - \frac{(n)}{(a)}\Delta' + \frac{(p)}{(a)}\Delta$$

$$\varepsilon = \frac{(n)}{(a)}\Delta'' - \frac{(p)}{(a)}\Delta'$$

$$\xi = \frac{(p)}{(a)}\Delta'' .$$

Si comprende dover riuscire operoso il calcolo di questi coefficienti, e ciascuno dover essere una lunga fila di termini. Ma si vedrà fra poco come si possa schivare questo calcolo sì operoso, e gli altri più operosi ancora, che lo dovrebbero seguire .

Probl. 5° Spezzare la frazione $\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^\pi}$ nella serie delle frazioni

$$\frac{A}{(1+fz)^2}+\frac{A'}{1+fz}+\frac{B}{(1-fz)^2}+\frac{B'}{1-fz}+\frac{C}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^\pi}+\frac{C'}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{\pi-1}}\cdots-\frac{C'^{(\pi-1)}}{z\sqrt{M}+\sqrt{k}}$$

$$+\frac{D}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}+\frac{D'}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi-1}}\;\ldots\ldots+\frac{D'^{(\pi-1)}}{z\sqrt{M}-\sqrt{k}}$$

sarà

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{Z}{(1-fz)^2(Mz^2-k)^\pi}\\ A'&=\frac{1}{fdz}\,d\,\frac{Z}{(1-fz)^2(Mz^2-k)^\pi}\end{aligned}\right\}\text{fatto } 1+fz=0,\text{ donde } z=-\frac{1}{f}$$

$$\left.\begin{aligned}B&=\frac{Z}{(1+fz)^2(Mz^2-k)^\pi}\\ B'&=\frac{1}{-fdz}\,d\,\frac{Z}{(1+fz)^2(Mz^2-k)^\pi}\end{aligned}\right\}\text{fatto } 1-fz=0,\text{ donde } z=\frac{1}{f}$$

$$\left.\begin{aligned}C&=\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}\\ C'&=\frac{1}{M^{\frac{1}{2}}dz}\,d\,\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}\\ C''&=\frac{1}{2.Mdz}\,d^2\,\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}\\ C'''&=\frac{1}{2.3M^{\frac{3}{2}}dz}\,d^3\,\frac{Z}{(1-f^2z)^2({}^2z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C'^{(\pi-1)}&=\frac{1}{2.3..\pi M^{\frac{1}{2}\pi}dz^{\pi-1}}\,d^{\pi-1}\,\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}\end{aligned}\right\}\text{fatto } z\sqrt{M}+\sqrt{k}=0,\text{ donde } z=\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$$

$$\left.\begin{aligned}D&=\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^\pi}\\ D'&=\frac{1}{M^{\frac{1}{2}}dz}\,d\,\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^\pi}\\ D''&=\frac{1}{2Mdz^2}\,d^2\,\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^\pi}\\ D'''&=\frac{1}{2.3M^{\frac{3}{2}}dz^3}\,d^3\,\frac{Z}{(1-f^2z^2)^4(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^\pi}\end{aligned}\right\}\text{fatto } z\sqrt{M}-\sqrt{k}=0,\text{ donde } z=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$$

$D'^{(\pi-1)}$

. . . .

$$D'^{(\pi-1)} = \frac{1}{2.3\ldots\pi M^{\frac{1}{2}}\ \pi\, dz^{\pi-1}}\, d^{\pi-1} \frac{Z}{(1-fz^2f^2)^2(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^\pi}\Bigg\}\text{fatto } z\sqrt{M}-\sqrt{k}=0,\text{donde } z=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$$

Teorema 2° B = A generalmente

Non contenendo Z, che potenze di grado pari di z, non può nascervi differenza, vi si sostituisca per z il negativo valore $\frac{-1}{f}$, od il positivo $\frac{1}{f}$; e la contrarietà poi di questi due valori distrugge la contrarietà dei segni nelle due quantità $(1-fz)^2$, $(1+fz)^2$, fattori dei due denominatori; nè può per essi contrarj valori sorgere differenza nel comune fattore de' medesimi denominatori $(Mz^2-k)^\pi$ inchiudente il solo quadrato di z: dunque generalmente B = A.

Per lo che basterà determinar A, e sarà tutt' insieme determinato B.

Probl. 6° svolgere le quantità

$$\frac{1}{dz}\, d\frac{Z}{(1-fz)^2(Mz^2-k)^\pi} \qquad \frac{1}{dz}\, d\frac{Z}{(1+fz)^2(Mz^2-k)^\pi}$$

Ponendo $\frac{1}{dz}\, dZ = Z'$, si ha

$$\frac{1}{dz}\, d\frac{Z}{(1-fz)^2(Mz^2-k)^\pi} = \frac{Z'}{(1-fz)^2(Mz^2-k)^\pi} + \frac{2fZ}{(1-fz)^3(Mz^2-k)^\pi} - \frac{2\pi Mz.Z}{(1-fz)^2(Mz^2-k)^{\pi-1}}$$

$$\frac{1}{dz}\, d\frac{Z}{(1+fz)^2(Mz^2-k)^\pi} = \frac{Z}{(1+fz)^2(Mz^2-k)^\pi} - \frac{2f.Z}{(1+fz)^3(Mz^2-k)^\pi} - \frac{2\pi Mz.Z}{(1+fz)^2(Mz^2-k)^{\pi-1}}$$

Teorema 3° generalmente B' = A'

A' è uguale alla prima delle due espressioni ora trovate divise per f, e postovi $\frac{-1}{f}$ per z; e B' è uguale alla seconda divisa per $-f$, e postovi $\frac{-1}{f}$ per z. Li denominatori dei tre termini delle due espressioni diventano per le ragioni nel 2° *Teor.* addotte identici, sostituitivi i contrarj valori di z; i numeratori dei due secondi termini divengono identici divisi rispettivamente per f, e per $-f$; li numeratori dei due terzi termini, separato il comune fattore $2\pi MZ$, e rispettivamente per f, e per $-f$ divisi, presentano $\frac{-z}{f}$, $\frac{-z}{-f}$, e risultano identici, ed ambedue $=\frac{1}{f^2}$, posto in questo $z = \frac{1}{f}$, in quello $z = \frac{-1}{f}$; li numeratori finalmente dei due primi termini, divisi rispettivamente per f, e per $-f$, riescono $\frac{Z'}{f}$, $\frac{Z'}{-f}$, ma è da avvertire, che essendo Z una funzione di sole potenze pari di z, ne segue, che Z' sia una funzione di sole potenze di z impari, e senza termine costante, già svanito nel differenziare: laonde sostituito $\frac{-1}{f}$ in luogo di z in $\frac{Z'}{f}$, ed $\frac{1}{f}$ in luogo di z in $\frac{Z'}{-f}$, comprendesi, che risultar debbono identici $\frac{Z'}{f}$, $\frac{Z'}{-f}$. Tutti dunque e tre i termini di B' coincidono con i tre termini di A', ed è generalmente $B' = A'$.

Per conseguenza trovato A' si avrà in un con esso anche B'.

Teorema 4° $D = C$, sempre che sia π numero pari; e $D = -C$, qualora sia π numero dispari. A cagione del grado pari delle potenze di z nel comune numeratore Z, e nel commun divisore $(1-f^2z^2)^2$ non può in questi nascere differenza di contrarj valori di $z = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, $z = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$: tutto dunque l'esame si restringe ai due divisori $(z\sqrt{M} - \sqrt{k})^\pi$, $(z\sqrt{M} + \sqrt{k})^\pi$, che per la sostituzione, di $\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$ in quello, di $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$ in questo, in luogo di z, divengono $(-2\sqrt{k})^\pi$, $(+2\sqrt{k})^\pi$. Ma nel caso di π pari $(-2\sqrt{k})^\pi = (+2\sqrt{k})^\pi$, ed in caso di π dispari $(-2\sqrt{k})^\pi = -(+2\sqrt{k})^\pi$. Dunque $D = C$, se π pari, e $D = -C$, se π dispari.

Nell' uno, e nell' altro caso però trovato C sarà trovato D, a sola condizione di cangiare a C il segno nel caso di π impari.

Probl. 7° Trovare le successive espressioni sviluppate, ma insieme convenevolmente ridotte, delle quantità generalmente rappresentate in

$$\frac{1}{dz^n}\, d^n \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi} \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{dz^n}\, d^n \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^\pi}$$

S' intenda $Z' = \frac{1}{dz}\, dZ$, $Z'' = \frac{1}{dz}\, dZ'$, $Z''' = \frac{1}{dz}\, dZ''$ . . . . .
e si avrà

$\frac{1}{dz}$

$$\frac{1}{dz}d\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}=\frac{Z'}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}+\frac{4f.z.Z}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}$$
$$-\frac{\pi\sqrt{M}.Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi-1}}$$

Presi i differenziali di questi tre termini ne risultano nove, risultandone da ciascheduno tre, ma i nove si riducono ai sette seguenti

$$\frac{1}{dz^2}d^2\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}=\frac{Z''}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}+\frac{8f^2.z.Z'}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}$$
$$-\frac{2\pi\sqrt{M}.Z'}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}}$$
$$+\frac{4f^2Z}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}+\frac{24f^4z^2.Z}{(1-f^2z^2)^4(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}-\frac{8\pi f^2z\sqrt{M}.Z}{(1-f^2z^2z)^3(\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}}$$
$$+\frac{\pi(\pi+1)M.Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+2}}$$

Pigliando i differenziali di questi sette termini ne proverranno ventuno, i quali però a tredici ridotti esibiranno

$$\frac{1}{dz3}d^3\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}=$$
$$\frac{Z'''}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}+\frac{12f^2z.Z''}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}-\frac{3\pi\sqrt{M}.Z''}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}}$$
$$+\frac{12f^2.Z'}{(1-f^1z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}+\frac{72f^4z^2.Z'}{(1-f^2z^2)^4(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}-\frac{96f^2z\sqrt{M}.Z'}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}}$$
$$+\frac{3\pi(\pi+1)M.Z'}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+2}}$$
$$+\frac{72f^4z\,Z}{(1-f^2z^2)^4(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}+\frac{192f^6z3.Z}{(1-f^2z^2)^5(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}-\frac{12\pi f^2\sqrt{M}.Z}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}}$$
$$-\frac{288f^4z^2\sqrt{M}.Z}{(1-f^2z^2)^4(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}}+\frac{12\pi(\pi+1)f^2z^2.MZ}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+2}}-\frac{\pi(\pi+1)(\pi+2)M\sqrt{M}.Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+3}}$$

. . . .

Così proseguendo sino a $\frac{1}{dz^{\pi-1}}d^{\pi-1}\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}$ si anderà moltiplicando il numero de' termini, ma sempre, riducendo, ad un numero minore di quello, che a prima vista parrebbe dover provenire, e sarebbe 3^n, significando per n l'ordine del differenziale; e con distanza tanto più grande da 3^n, quanto più nella successione dei differenziali si avanzerà, come vedesi già accaduto ne' tre eseguiti, essendo il numero de' termini risultato per il 1° giustamente $= 3$, per il 2° $= 7 = 3^2 - 2$, per il 3° $= 13 = 3^3 - 14$.

Le espressioni delle quantità generalmente rappresentate per $\frac{1}{dz^n} d^n \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2 (z\sqrt{M}+\sqrt{k})^\pi}$ si ottengono col solo cangiare nelle trovate al denominatore in $+$ il segno $-$, che sta al radicale $\sqrt{k}$; poichè non cadendo $\sqrt{k}$, siccome quantità costante. sotto la differenziazione, non reca verun cangiamento ne' differenziali la contrarietà del suo segno.

Teorema 5° Le quantità successive

$$\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi},\ \frac{1}{dz} d \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi},\ \frac{1}{dz^2} d^2 \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}$$

$$\frac{1}{dz^3} d^3 \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi},\ \frac{1}{dz^4} d^4 \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi} \ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

postovi $z = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$

contengono alternamente e non contengono in tutti i termini loro il radicale $\sqrt{k}$, con questa differenza.

Che nel caso di π pari l'ordine alternativo comincia dal non contenerlo; cioè la prima delle esposte quantità nol contiene, la 2ª il contiene, la 3ª no, e così via via; nel caso di π dispari l' ordine alterno comincia inversamente dal contenerlo; ma in ambedue i casi si finirà in quantità, che lo conterrà.

È primieramente chiaro, che posto $z = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, nel divisore $1-f^2z^2$ elevato a qualsiasi podestà non vi entrerà, che k a potenza intera, onde questo divisore non può avere parte alcuna nella differenza dei casi, e dei risultati, che si contemplano, e che perciò la disquisizione ristrignesi ai numeratori, ed alle potenze dell' altro divisore $z\sqrt{M} - \sqrt{k}$. Quanto ai numeratori essendo Z una funzione di sole potenze pari di z, Z' di potenze soltanto dispari, Z'' di potenze pari, Z''' di potenze dispari; e così alternativamente, è evidente che, posta $z = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, Z non conterrà $\sqrt{k}$, Z' il conterrà, Z'' nol conterrà, e così via via alternativamente. E rispetto al divisore $z\sqrt{M}-\sqrt{k}$, che fatto $z = \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, si riduce a $-2\sqrt{k}$, è del pari manifesto, che non conterranno $\sqrt{k}$ le sue potenze pari, e lo conterranno le sue potenze dispari. Dunque $\frac{Z}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}$, fattovi $z = \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$ non conterrà $\sqrt{k}$, se π sia numero pari, e lo conterrà se π sia numero dispari, e così sarà della 1^a delle quantità nel teorema segnate, non portando differenza, come si è detto, il divisore $(1-f^2z^2)^2$.

Le frazioni $\frac{Z'}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}$, $\frac{z.Z}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}$, $\frac{Z}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}}$ fattovi $z = \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$ conterranno tutte e tre $\sqrt{k}$ nel caso di π pari, poichè le due prime lo avranno nei loro numeratori senza averlo al denominatore, e la terza inversamente al denominatore, senza al numeratore. E tutte e tre non lo conterranno nel caso di π dispari; imperciocchè le due prime avendolo insieme al numeratore, ed al denominatore, ne rimarranno prive per elisione, e la terza ne sarà da se priva, e nel numeratore, e nel denominatore. Dunque la 2^a delle segnate quantità conterrà $\sqrt{k}$ se π pari; nol conterrà se π dispari.

È patente il processo della dimostrazione.

Che poi l'ultima di esse segnate quantità sia per contenere in ogni caso; e di π pari e di π dispari, il radicale $\sqrt{k}$, si comprenderà riflettendo, che il numero delle quantità sarà sempre $= \pi$, e che nel caso di π dispari cominciando l'ordine alternativo dal contenere $\sqrt{k}$, deve pure terminare nel contenere; e che nel caso di π pari cominciando l'ordine alternativo dal non contenere $\sqrt{k}$, deve terminare nel contenere.

Teorema 6° Dei numeratori C, C', C'', C''' ... e dei D, D', D'', D''' ... delle frazioni del *Prob.* 5° quelli dei corrispondenti saranno identici, che non conterranno $\sqrt{k}$; e quelli avranno contrario segno, e valore, che il conterranno.

Nasce la serie dei numeratori C, C', C'', C''' ... dal farsi $z = \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$

La serie dei numeratori D, D', D'', D''' .... dal farsi $z = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$ dove sussiste $\sqrt{k}$, deve sussistere la contrarietà del segno, e produrdurre contrarietà di valore; e là donde $\sqrt{k}$ svanisce per elevazione a potenza pari, ivi deve succedere identicità.

Corollario 1° Dunque nel caso di π pari si avrà questa serie

$$D = C,\ D' = -C',\ D'' = C'',\ D''' = -C''' \ldots D'^{(\pi-1)} = -C'^{(\pi-1)}$$

e nel caso di π dispari quest' altra

$$D = -C,\ D' = C',\ D'' = -C'',\ D''' = C''' \ldots D'^{(\pi-1)} = -C'^{(\pi-1)}$$

Corollario 2° Li due qualunque di tali numeratori, che segnerò per $C'^{(2i)}$, $D'^{(2i)}$, appartenenti a ſrazioni, che abbiano a denominatori potenze pari di $z\sqrt{M}+\sqrt{k}$, $z\sqrt{M}-\sqrt{k}$, che indeterminatamente comprendo in $(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda}$, $(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda}$, saranno identici. Ed all'opposto saranno di contrario segno, e valore li due qualunque numeratori di due ſrazioni, i cui denominatori sieno le potenze dispari $(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-1}$, $(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda-1}$.

Probl. 8° Designati per Λ, Λ' i valori che prendono Z, Z' fatto $z = \frac{-1}{f}$, e per $\Pi, \Pi', \Pi'', \Pi''' \ldots$ i valori che prendano $Z, Z', Z'', Z''' \ldots$ fatto $z = \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$ dedurre dalle espressioni svolte nei *Prob.* 5° 6°, 7° le formole di A, A', e di C, C', C'', $C''' \ldots$.

Fatto $z = \frac{1}{f}$, il divisore $1 - fz$ si cangia in 2, ed il divisore $Mz^2 - k$ diventa $= \frac{M}{f^2} - k = \frac{M - f^2k}{f^2} = \frac{1}{f^2}\,(kv^2 - a\omega - kv^2 + k\omega)$ (*Prob.* 2°) $= \frac{(k-a)\omega}{f^2} = \frac{N\omega}{f^2}$ (*Prob.* X sul principio). Quindi

$$A = \frac{f^2\,\Lambda}{4N^\pi\,\omega^\pi}$$

$$A' = \frac{f^{2\pi-1}}{4N^\pi\,\omega^\pi}\,\Lambda' + \left(\frac{f^{2\pi}}{4N^\pi\omega^\pi} + \frac{\pi f^{2\pi}M}{2N^{\pi+1}\,\omega^{\pi+1}}\right)\cdot\Lambda$$

Posto $z = \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, il divisore $1 - f^2z^2$ si fa $= 1 - \frac{f^2k}{M} = \frac{1}{M}(M - f^2k) = \frac{N\omega}{M}$; ed il divisore $z\sqrt{M} - \sqrt{k} = -2\sqrt{k}$. Conseguentemente

$$C = \frac{1}{(-2)^\pi N^2\omega^2 k^{\frac{\pi}{2}}}\,.\,M^2\Pi$$

$$C' = \frac{1}{(-2)^\pi N^2\omega^2 k^{\frac{\pi}{2}}}\,\Pi'\,M\sqrt{M} - \left(\frac{4f^2\sqrt{k}}{(-2)^\pi N^3\omega^3 k^{\frac{\pi}{2}}} + \frac{\pi}{(-2)^{\pi+1}N^2\omega^2 k^{\frac{\pi+1}{2}}}\,\Pi M\right.$$

$$C''=\frac{1}{2(-2)^{\pi}N^{2}\omega^{2}k^{\frac{\pi}{2}}}\Pi''M-\left(\frac{4f^{2}\sqrt{k}}{(-2)^{\pi}N^{3}\omega^{3}k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{\pi}{(-2)^{\pi+1}N^{2}\omega^{2}k^{\frac{\pi+1}{2}}}\right)\Pi'M\sqrt{M}$$

$$+\left(\frac{4(\pi-1)f^{2}}{(-2)^{\pi+1}N^{3}\omega^{3}k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{12f^{4}k}{(-2)^{\pi}N^{4}\omega^{4}k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{\pi(\pi+1)}{2(-2)^{\pi+2}N^{2}\omega^{2}k^{\frac{\pi+2}{2}}}\right)\Pi M^{2}$$

$$C'''=\frac{1}{6(-2)^{\pi}N^{2}\omega^{2}k^{\frac{\pi}{2}}}\cdot\Pi'''\sqrt{M}-\left(\frac{2f^{2}\sqrt{k}}{(-2)^{\pi}N^{3}\omega^{3}k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{\pi}{2(-2)^{\pi+1}N^{2}\omega^{2}k^{\frac{\pi+1}{2}}}\right)\Pi''M$$

$$+\left(\frac{12f^{4}k}{(-2)^{\pi}N^{4}\omega^{4}k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{12f^{2}}{(-2)^{\pi+1}N^{3}\omega^{3}k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{\pi(\pi+1)}{2(-2)^{\pi+2}N^{2}\omega^{2}k^{\frac{\pi+2}{2}}}\right)\Pi'M\sqrt{M}$$

$$-\left(\frac{32f^{6}k\sqrt{k}}{(-2)^{\pi}N^{5}\omega^{5}k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{24f^{4}\sqrt{k}}{(-2)^{\pi+1}N^{4}\omega^{4}k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{2\pi(\pi+1)f^{2}}{(-2)^{\pi+2}N^{3}\omega^{3}k^{\frac{\pi+3}{2}}}+\frac{\pi(\pi+1)(\pi+2)}{6(-2)^{\pi}N^{2}\omega^{2}k^{\frac{\pi+3}{2}}}\right)\Pi M^{2}$$

. . . .

A compiere la determinazione di A, A', C, C', C'', C''' . . . ed insieme di B, B', D, D', D'', D''' . . . non rimane, che di trovare i valori di Λ, Λ', Π, Π', Π'', Π''' . . . :

Prob. 9° Ritrovare i valori di Λ, Λ', Π, Π', Π'', Π''' . . . .

Essendo Λ, Λ' ciò, che divengono Z, Z', fattovi $z=\frac{-1}{f}$, e Π, Π' Π'', Π''' . . . . ciò che diventano Z, Z', Z'', Z''' . . . fattovi $z=\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, il metodo, che primo, e naturalmente allo intelletto presentasi per determinarne i valori, quello si è di cominciar dal cercare le espressioni di Z, Z', Z'', Z''' . . . . E poichè (*Prob.* 4°) abbiamo detto, che la forma di Z è

$$Z=\alpha z^{2\pi+2}-\beta z^{2\pi}+\gamma z^{2\pi-2}-\delta z^{2\pi-4}+\epsilon z^{2\pi-6}\ \ldots\ \mp\xi$$

e quindi ne vengono

$$Z'=(2\pi+2)\alpha z^{2\pi+1}-2\pi.\beta z^{2\pi-1}+(2\pi-2)\gamma z^{2\pi-3}-(2\pi-4)\delta z^{2\pi-5}\ \ldots$$

$$Z''=(2\pi+2)(2\pi+1)\alpha z^{2\pi}-2\pi(2\pi-1)\beta z^{2\pi-2}+(2\pi-2)(2\pi-3)^{\pi}\gamma z^{2\pi-4}\ldots$$

$$Z'''=(2\pi+2)(2\pi-1)(2\pi)\alpha z^{2\pi-1}-2\pi(2\pi-1)(2\pi-2)\beta z^{2\pi-3}\ \ldots$$

. . . .

Il primo passo a farsi sarebbe il determinare per le formole nello stesso *Prob.* 4 accennate, i coefficienti α, β, γ, δ . . . ciascheduno de' quali emergerebbe composto di una fila di termini ancor più lunga, come dalle formole medesime apparisce, di quelle delle quantità Δ, Δ', Δ'', Δ''' . . . numeratori dei coefficienti della parte intera 'Z. Si dovrebbe di poi a trovare Λ, cangiata nella funzione Z la variabile z in $\frac{-1}{f}$, disporre ordinatamente, le une sotto le altre con corrispondenza dei termini simili le fila di $\alpha\left(\frac{-1}{f}\right)^{2\pi+2}$, $-\beta\left(\frac{-1}{f}\right)^{2\pi}$, $+\gamma\left(\frac{-1}{f}\right)^{2\pi-2}$, $-\delta\left(\frac{-1}{f}\right)^{2\pi-4}$ . . . e con le somme delle colonne trovarne il risultato. Lo stesso si avrebbe a fare per determinare Π con la sola differenza di moltiplicare i coefficienti α, β, γ, δ . . . per le potenze di $\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, come si moltiplicarono per quelle di $\frac{-1}{f}$. Similmente avrebbesi ad operare per determinare Λ', Π', Π'', Π''' . . . ., ma con calcoli tanto più via via fastidiosi, quanti più sono i numeri, co' quali gli stessi coefficienti α, β, γ, δ . . . . trovansi via via in Z', Z'' Z''' . . . moltiplicati. Qual fatica, qual pena di calcolo! Ma si può evitare tanta laboriosità mercè i seguenti teoremi.

Teorema 7.° Λ è ciò che diventa $z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi$ fatto $z=\frac{-1}{f}$

Per lo partimento nel *Prob.* 3° operato si ha

$$'Z+\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^\pi}=\frac{z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi}{(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^\pi}.$$ Quindi

$$'Z\,(1-f^2z^2)^2\,(Mz^2-k)^\pi+Z=(v^2z^2-1)^\pi\,z^{2\pi+2}$$

fatto $z=\frac{-1}{f}$, va a zero il primo termine del primo membro, e rimane

$$Z=\Lambda=z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi=\frac{1}{f^{2\pi+2}}\left(\frac{v^2}{f^2}-1\right)^\pi=\frac{e^\pi}{f^{4\pi+2}}$$

quale speditezza di determinazione, e semplicità di risultato!

Teorema 8.° $\Lambda=\frac{1}{dz}\,d\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right)$ fatto dopo la differenziazione $z=\frac{-1}{f}$.

Differenziando l' equazione $'Z(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^\pi+Z=z^{2\pi+2}$ $(v^2z^2$

$(v^2z^2-1)^\pi$, e dividendo per dz, in tutti e tre i termini risultanti dal differenziale del primo termine del primo membro vi sarà $1-f^2z^2$, onde posto $z=\frac{-1}{f}$, tutti e tre cadranno a zero, e rimarrà soltanto $\frac{1}{dz}dZ=Z'=\Lambda'=\frac{1}{dz}d\,(z^{2\pi+2})(v^2z^2-1)^\pi$ a condizione di far, dopo avuto il differenziale, $z=\frac{-1}{f}$

Ora $\frac{1}{dz}d(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi)=(2\pi+2)z^{2\pi+1}(v^2z^2-1)^\pi+2\pi v^2z^{2\pi+3}$ $(v^2z^2-1)^{\pi-1}$, che posto $z=\frac{-1}{df}$ diventa $=\frac{-(2\pi+2)}{f^{2\pi+1}}\left(\frac{v^2}{f^2}-1\right)^\pi-$ $\frac{2\pi v^2}{f^{2\pi+3}}\left(\frac{v^2}{f^2}-1\right)^{\pi-1}=\frac{-(2\pi+2)\omega^\pi-2\pi\omega^{\pi-1}v^2}{f^{4\pi+1}}$

Dunque $\Lambda'=\frac{-(2\pi+2)\omega^\pi-2\pi\omega^{\pi-1}v^2}{f^{4\pi+1}}$

Teorema 9°

$$\left.\begin{array}{l}
\Pi = z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi \\
\Pi' = \frac{1}{dz}\,d\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right) \\
\Pi'' = \frac{1}{dz^2}\,d^2\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right) \\
\Pi''' = \frac{1}{dz^3}\,d^3\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right) \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\Pi'^{(\pi-1)} = \frac{1}{dz^{\pi-1}}\,d^{\pi-1}\left(z^{2\pi-2}(v^2z^2-1)^\pi\right)
\end{array}\right\}$$

fatto per Π immediatamente e per Π', Π'', Π'''... dopo le differenziazioni $z=\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$

Nella equazione $'Z(1-f^2z^2)^2+Z=z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi$, posto $z=\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, si annulla il primo termine del primo membro, e resta $Z=\Pi=z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi$ intendendo, che quì si faccia $z=\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$. Differenziata, e divisa per dz l'equazione medesima, svaniranno, fatto $z=\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$ tutti i termini nati dal differenziale del primo termine del primo membro, perchè tutti contenenti Mz^2-k, per lo che non rimarrà se non $\frac{1}{dz}dZ=Z'=\Pi'=\frac{1}{dz}d\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right)$

La ragione si estende sino al differenzial $d^{\pi-1}$ dell' equazione; dunque è chiara la verità del proposto teorema.

Ora $\frac{1}{dz} d\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right)=(2\pi+2)z^{2\pi+1}(v^2z^2-1)^\pi+2\pi v^2z^{2\pi+3}(v^2z^2-1)^{\pi-1}$

$$\frac{1}{dz^2}d^2\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right)=(2\pi+2)(2\pi+1)z^{2\pi}(v^2z^2-1)^\pi+2\pi(4\pi+5)v^2z^{2\pi+2}\times$$
$$(v^2z^2-1)^{\pi-1}+4\pi(\pi-1)v^4z^{2\pi+4}(v^2z^2-1)^{\pi-2}$$

$$\frac{1}{dz^3}d^3\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right)=(2\pi+2)(2\pi+1)(2\pi)z^{2\pi-1}(v^2z^2-1)^\pi+24(\pi+1)\times$$
$$v^2(v^2z^2-1)^{\pi-1}+12\pi(\pi-1)(\pi+3)v^4z^{2\pi+3}(v^2z^2-1)^{\pi-2}+8\pi(\pi-1)(\pi-2)\times$$
$$v^6z^{2\pi+5}(v^2z^2-1)^{\pi-3}$$

. . . .

fatto $z=-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, ed attendendo che $\frac{v^2k}{M}-1=\frac{v^2k-M}{M}=\frac{v^2k-kv^2+a\omega}{M}=\frac{a\omega}{M}$ si troverà

$$\Pi=\frac{k^{\pi+1}a^\pi\omega^\pi}{M^{2\pi+1}}$$

$$\Pi'=\left(-(2\pi+2)a^\pi\omega^\pi-2\pi kv^2a^{\pi-1}\omega^{\pi-1}\right)\cdot\frac{k^{\pi+\frac{1}{2}}}{M^{2\pi+\frac{1}{2}}}$$

$$\Pi''=\left((2\pi+2)(2\pi+1)a^\pi\omega^\pi+2\pi(4\pi+5)kv^2a^{\pi-1}\omega^{\pi-1}+4\pi(\pi-1)k^2v^4a^{\pi-2}\omega^{\pi-2}\right)\cdot$$

$$\Pi'''=\left(-(2\pi+2)(2\pi+1)(2\pi)a^\pi\omega^\pi-24\pi(\pi+1)^2kv^2a^{\pi-1}\omega^{\pi-1}-12(2\pi+3)(\pi)(\pi-1)\right.$$
$$\left.k^2v^4a^{\pi-2}\omega^{\pi-2}-8\pi(\pi-1)(\pi-2)k^3v^6a^{\pi-3}\omega^{\pi-3}\right)\cdot\frac{k^{\pi-\frac{1}{2}}}{M^{2\pi-\frac{1}{2}}}$$

. . . .

Probl. 10.° Assegnare i completi generali valori de' numeratori A, A', C, C', C'', C''' . . . . ed insieme dei B, B', D, D', D'', D''' . . . . .

Non rimane, che d' inserire nelle formole loro stabilite nel *Probl.* 7° quelle delle quantità Λ, Λ', Π, Π', Π'', Π''' . . . . testè ritrovate, e fatte le convenienti riduzioni si troverà

$$A=\frac{1}{4f^{2\pi+2}N^\pi}$$

$$A'=\frac{\pi a}{2f^{2\pi}N^{\pi+1}\omega}-\frac{2\pi+1}{4f^{2\pi+2}N^\pi}$$

$$C=\frac{k^{\frac{\pi+2}{2}}a^\pi\omega^{\pi-2}}{(-2)^\pi N^2M^{2\pi-1}}$$

C' =

$$C' = \frac{(3\pi+4)k^{\frac{\pi+1}{2}}a^{\pi}\omega^{\pi-2}}{(-2)^{\pi+1}N^2M^{2\pi-1}} - \frac{2\pi k^{\frac{\pi+3}{2}}a^{\pi-1}\omega^{\pi-3}v^2}{(-2)^{\pi}N^2M^{2\pi-1}} - \frac{4k^{\frac{\pi+3}{2}}a^{\pi}\omega^{\pi-3}f^2}{(-2)^{\pi}N^3M^{2\pi-1}}$$

$$C'' = \frac{(9\pi^2+17\pi+8)k^{\frac{\pi}{2}}a^{\pi}\omega^{\pi-2}}{2(-2)^{\pi+2}N^2M^{2\pi-1}} - \frac{2\pi(3\pi+5)k^{\frac{\pi+2}{2}}a^{\pi-1}\omega^{\pi-3}v^2}{(-2)^{\pi+1}N^2M^{2\pi-1}} + \frac{2\pi(\pi-1)k^{\frac{\pi+4}{2}}a^{\pi-2}\omega^{\pi-4}v^4}{(-2)^{\pi}N^2M^{2\pi-1}}$$

$$- \frac{4(3\pi+5)k^{\frac{\pi+2}{2}}a^{\pi}\omega^{\pi-3}f^2}{(-2)^{\pi+1}N^3M^{2\pi-1}} + \frac{8\pi k^{\frac{\pi+4}{2}}a^{\pi-1}\omega^{\pi-4}f^2v^2}{(-2)^{\pi}N^3M^{2\pi-1}} + \frac{12k^{\frac{\pi+4}{2}}a^{\pi}\omega^{\pi-4}f^4}{(-2)^{\pi}N^4M^{2\pi-1}}$$

$$C''' = \frac{(9\pi^3+15\pi^2+6\pi)k^{\frac{\pi-1}{2}}a^{\pi}\omega^{\pi-2}}{2(-2)^{\pi+3}N^2M^{2\pi-1}} - \frac{(9\pi^3+23\pi^2+16\pi)k^{\frac{\pi+1}{2}}a^{\pi-1}\omega^{\pi-3}v^2}{(-2)^{\pi+2}N^2M^{2\pi-1}} +$$

$$\frac{(6\pi^3+6\pi^2-12\pi)k^{\frac{\pi+3}{2}}a^{\pi-2}\omega^{\pi-4}v^4}{(-2)^{\pi+1}N^2M^{2\pi-1}} - \frac{4\pi(\pi-1)(\pi-2)k^{\frac{\pi+5}{2}}a^{\pi-3}\omega^{\pi-5}v^6}{3(-2)^{\pi}N^2M^{2\pi-1}} -$$

$$\frac{(34\pi^2-2\pi-32)k^{\frac{\pi+1}{2}}a^{\pi}\omega^{\pi-3}f^2}{(-2)^{\pi+2}N^3M^{2\pi-1}} + \frac{(32\pi^2+16\pi)k^{\frac{\pi+3}{2}}a^{\pi-1}\omega^{\pi-4}f^2v^2}{(-2)^{\pi+1}N^3M^{2\pi-1}}$$

$$- \frac{8(\pi-1)k^{\frac{\pi+5}{2}}a^{\pi-2}\omega^{\pi-5}f^2v^4}{(-2)^{\pi}N^3M^{2\pi-1}} + \frac{(48\pi+24)k^{\frac{\pi+3}{2}}a^{\pi}\omega^{\pi-4}f^4}{(-2)^{\pi+1}N^4M^{2\pi+1}} - \frac{24\pi k^{\frac{\pi+5}{2}}a^{\pi-1}\omega^{\pi-5}f^4v^2}{(-2)^{\pi}N^4M^{2\pi-1}}$$

$$- \frac{32k^{\frac{\pi+5}{2}}a^{\pi}\omega^{\pi-5}f^6}{(-2)^{\pi}N^5M^{2\pi-1}}$$

. . . .

Essendosi nei *Teoremi* 2° e 3° dimostrato, che generalmente B = A, B' = A' non occorrono per B, B' nuove formole; e similmente non sono di mestieri per D, D', D'', D''' ... essendosi nel *Corollario* 2° *del Teorema* 6 dedotto essere identici con i corrispondenti C, C', C'', C''' ... quei tali, che hanno per denominatori potenze pari di $z\sqrt{M}+\sqrt{k}$, $z\sqrt{M}-\sqrt{k}$; ed essere di segno, e valore contrario quei tali, che hanno per denominatori potenze dispari delle quantità medesime $z\sqrt{M}+\sqrt{k}$, $z\sqrt{M}-\sqrt{k}$.

Integrazione

del termine generale $\mu\Gamma^{-\pi-\frac{1}{2}}Q^{\pi}dx$

Attesa la trasformazione operata nel *Probl.* 2.°, attesi gli spezzamenti fatti nei *Probl.* 3° e 5°, ed i teoremi relativamente dimostrati si ha

$$\int \mu P^{-\pi-\frac{1}{2}} Q^{\pi} dx =$$

$$-2\mu N^{\pi+1}\omega\varphi^{\pi}\int\left(\frac{v^{2\pi}}{(a)}z^{2\pi-2}dz+\frac{\Delta}{(a)}z^{2\pi-4}dz+\frac{\Delta'}{(a)}z^{2\pi-6}dz+\frac{\Delta''}{(a)}z^{2\pi-8}dz\ldots+\frac{\Delta'^{(\pi-1)}}{(a)}z^{0}dz\right)$$

$$-2\mu N^{\pi+1}\omega\varphi^{\pi}\left(A\int\left(\frac{dz}{(1+fz)^2}+\frac{dz}{(1-fz)^2}\right)+A'\int\left(\frac{dz}{1+fz}+\frac{dz}{1-fz}\right)+C\int\left(\frac{dz}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{\pi}}\pm\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{dz}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}\right)+C'\int\left(\frac{dz}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{\pi-1}}\mp\frac{dz}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi-1}}\right)\ldots+C'^{(\pi-1)}\int\left(\frac{dz}{z\sqrt{M}+\sqrt{k}}-\frac{dz}{z\sqrt{M}-\sqrt{k}}\right)\right)$$

Rappresenti $\Omega z^p dz$ un qualunque termine della parte intera, e sarà

$\int\Omega z^p dz=\frac{\Omega}{p}z^{p-1}+\text{Cost.}=\frac{\Omega}{p}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{p-1}{2}}+\text{Cost.}$ E dovendo essere l' integrale $=0$, fatto $x=0$, poichè allora $T=0$, sarà

$\text{Cost.}=\frac{\Omega}{p}\left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{p-1}{2}}$ cioè (*Probl.* 2°) $=-\frac{\Omega}{p}\cdot\frac{1}{v^{p-1}}$: onde

$$\int\Omega z^p dz=\frac{\Omega}{p}\left[\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{p-1}{2}}-\frac{1}{v^{p-1}}\right]$$

Passando alle frazioni sarà

$A\int\left(\frac{dz}{(1+fz)^2}+\frac{dz}{(1-fz)^2}\right)=\frac{A}{f}\left(\frac{-1}{1-fz}+\frac{1}{1-fz}\right)+\text{Cost.}=\frac{A}{f}\left(\frac{-1+fz+1+fz}{1-f^2z^2}\right)$ $+\text{Cost.}=\frac{2Az}{1-f^2z^2}+\text{Cost.}$ Ma $z=\frac{\sqrt{(N-x)}}{\sqrt{(e-f^2x)}}$, ed $1-f^2z^2=$ $\frac{e-f^2x-f^2(N-x)}{e-f^2z}=\frac{e-f^2N}{e-f^2x}=\frac{N\omega}{e-f^2x}$ (*Probl.* 2°) ; dunque $\frac{2Az}{1-f^2z}+\text{Cost.}$ $=2A.\frac{(N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}}{N\omega}+\text{Cost.}$ E per dover essere l' integrale $=0$, fatto $x=0$, $\text{Cost.}=-\frac{2AN^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}}{N\omega}=-\frac{2ANv}{N\omega}$ (per le posizioni del Probl. 2°). Dunque $A\int\left(\frac{dz}{(1+fz)^2}+\frac{dz}{(1-fz)^2}\right)=\frac{2A}{N\omega}\left[(N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}-Nv\right]$;

$A'\int\left(\frac{dz}{1+fz}+\frac{dz}{1-fz}\right)=\frac{A'}{f}\left(l(1+fz)-l(1-fz)\right)+l.\text{Cost.}$ (segnando per l i logaritmi iperbolici) $=\frac{A'}{f}\,l\left\{\frac{1+f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}+l.\text{Cost.}$ E dovenvendo essere l'integrale $= 0$, posto $x = 0$, Cost. $= -\frac{A'}{f}\, l \left\{ \frac{1 + f\left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - f\left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{1}{2}}} \right\}$

$$= -\frac{A'}{f}\, l \left\{ \frac{1 + \frac{f}{v}}{1 - \frac{f}{v}} \right\};\ \text{laonde}\ A' \int \left(\frac{dz}{1+fz} + \frac{dz}{1-fz} \right) = \frac{A'}{f}\, l \left\{ \frac{1 + f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1 - \frac{f}{v}}{1 + \frac{f}{v}} \right\}$$

Procedendo alle frazioni, che hanno per denominatori le potenze delle quantità $z\sqrt{M} + \sqrt{k}$, $z\sqrt{M} - \sqrt{k}$ basta trattare in generale i due casi distinti nel *Corollario* 2° *del Teor.* 6°. Incominciamo dal caso delle potenze di grado pari

$$C'^{(2\varepsilon)} \int \left(\frac{dz}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda}} + \frac{dz}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda}} \right) = -\frac{C'^{(2\varepsilon)}}{(2\lambda-1)\sqrt{M}} \left(\frac{1}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-1}} + \frac{1}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda-1}} \right) + \text{Cost.} = -\frac{C'^{(2\varepsilon)}}{(2\lambda-1)\sqrt{M}} \left(\frac{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda-1} + (z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-1}}{(Mz^2-k)^{2\lambda-1}} \right) + \text{Cost.}$$

È facile a comprendere, che effettuando le due potenze nel numeratore indicate, e sommando i termini simili, si elideranno per la contrarietà de' segni tutti i termini di luogo pari, e non rimarranno, che quelli di luogo impari da unirsi insieme: la qual unione equivalerà al doppio dei termini di sede dispari della sola potenza $(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-1}$: così che, se per Σ s' intenda l'aggregato de' termini soltanto tali di questa potenza, il numeratore tutto della frazione variabile si riduca a 2Σ. Per ciò, che spetta il denominatore, osservisi, che, sostituito il valore di z, si ha $Mz^2 - k = \frac{M(N-x)}{e-f^2x} - k = \frac{1}{e-f^2x}(MN - Mx - ke + f^2kx)$. Ma, per le posizioni del *Prob.* 2°, $MN - ke = -Na\omega$, e per ciò, che si è dimostrato nel *Prob.* 7°, $M - f^2k = N\omega$, conseguentemente $MN - ke - (M - f^2k)x = -N\omega\,(a+x)$: dunque $Mz^2 - k = -\frac{N\omega(a+x)}{e-f^2x}$, e quinci $\frac{1}{(Mz^2-k)^{2\lambda-1}} = \frac{(e-f^2x)^{2\lambda-1}}{(-N\omega(a+x))^{2\lambda-1}}$, e finalmente

$C'^{(2\varepsilon)}$

$$C'^{(2\iota}\int\left(\frac{dz}{z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda}}+\frac{dz}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda}}\right)=\frac{C'^{(2\iota)}}{(2\lambda-1)\sqrt{M}}\times\frac{\Sigma(e-f^2x)^{2\lambda-1}}{(M\omega(a+x))^{2\lambda-1}}.$$

Passiamo all' altro caso.

$$C'^{(2\iota-1)}\int\left(\frac{dz}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-1}}-\frac{dz}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda-1}}\right)=$$

$$\frac{C'^{(2\iota-1)}}{(2\lambda-2)\sqrt{M}}\left(\frac{-(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda-2}+(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-2}}{(Mz^2-k)^{2\lambda-2}}\right)+\text{Cost.}$$

in tal caso elisi i termini di luogo dispari delle potenze formanti il numeratore, non rimarranno da raccogliersi, che i termini di luogo pari della potenza $(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda-2}$ volti di negativi in positivi, e quelli istessamente di sede pari della potenza $(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-2}$ col positivo loro segno; così che se la somma di questi soli si ponga $=\Sigma'$, tutto il numeratore variabile si ridurrà ad essere $2\,\Sigma'$. Rispetto al denominatore si applichino le riduzioni di sopra. Sarà dunque

$$C'^{(2\iota-1)}\int\left(\frac{dz}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-1}}-\frac{dz}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda-1}}\right)=$$

$$\frac{C'^{(2\iota-1)}}{(2\lambda-2)\sqrt{M}}\times\frac{\Sigma'(e-f^2x)^{2\lambda-1}}{(N\omega(a+x))^{2\lambda-2}}+\text{Cost.}$$

Le costanti si determineranno per i valori risultanti da Σ, Σ', fatto $x=0$.

Resta la integrazione delle due frazioni aventi per denominatori i binomj $z\sqrt{M}+\sqrt{k}$, $z\sqrt{M}-\sqrt{k}$ al semplicissimo grado 1, ed i numeratori generalmente di contrario segno, e valore. Sarà pertanto il loro integrale

$$C'^{(\pi-1)}\int\left(\frac{dz}{z\sqrt{M}+\sqrt{k}}-\frac{dz}{z\sqrt{M}-\sqrt{k}}\right)=\frac{C'^{(\pi-1)}}{\sqrt{M}}\,l\left(\frac{z\sqrt{M}+\sqrt{k}}{z\sqrt{M}-\sqrt{k}}\right)+l.\text{Cost.}$$

$$=\frac{C'^{(\pi-1)}}{\sqrt{M}}\,l\left(\frac{\sqrt{M}\left(\frac{N-r}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{k}}{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{k}}\times\frac{\frac{\sqrt{M}}{v}-\sqrt{k}}{\frac{\sqrt{M}}{v}+\sqrt{k}}\right)$$

APPLICAZIONE.

A più comoda intelligenza dell' applicazione stimo bene raccogliere quì i significati delle lettere

R . . . raggio della Terra medio

$k = 60$, numero di raggi terrestri dal centro della Terra a quel della Luna

a frazione tale, che aR significhi la distanza del punto dello scagliamento del sasso dal centro lunare

$N = k - a$

$\frac{1}{m} = \frac{1}{53,6}$ espressione della massa della Luna rispetto a quella della Terra

G . . . . . Gravità assoluta media alla superficie della terra (*Probl.* II)

$\omega = \frac{2GR}{N}$

$\varphi = \frac{2GR}{am}$

v . . . velocità dal vulcano lunare al sasso impressa nello scagliamento

$e = Nv^2$

$f^2 = v^2 - \omega$

$M = kv^2 - a\omega$

x . . . numero indeterminato, intero o rotto, per cui xR significa il viaggio dal sasso fatto

$P = v^2 + \frac{\omega x}{N - x}$

$Q = \frac{\varphi x}{a + x}$

l . . . segno dei logaritmi iperbolici

Tenuti alla mente presenti questi significati, ecco l' applicazione con i fattori dalle diverse formole dipendenti gli uni dagli altri distinti a più facile riscontro, riserbando all' atto del calcolo numerico le convenienti riduzioni

I.° Termine, fatto $\pi=0$

$$R\int P^{-\frac{1}{2}}\,dx = -2RN\omega \times$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{N\omega}\left((N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}-Nv\right)$$

$$-\frac{1}{4f^2}\cdot\frac{1}{f}\,l\left(\frac{1+f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{1-\frac{f}{v}}{1+\frac{f}{v}}\right)$$

II.° Termine, fatto $\pi=1$

$$R\int\frac{1}{2}\,P^{-\frac{3}{2}}Q\,dx = -\frac{2}{2}RN^2\omega\varphi \times$$

$$\frac{v^2}{Mf^4}\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{v}\right)$$

$$+\frac{1}{4f^4N}\cdot\frac{2}{N\omega}\left((N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}-Nv\right)$$

$$+\left(\frac{a}{2f^2N^2\omega}-\frac{3}{4f^4N}\right)\cdot\frac{1}{f}\,l\left(\frac{1+f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{1-\frac{f}{v}}{1+\frac{f}{v}}\right)$$

$$-\frac{k^{\frac{3}{2}}\,a}{2N^2M\omega}\cdot\frac{1}{\sqrt{M}}\,l\left(\frac{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{k}}{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{k}}\times\frac{\frac{\sqrt{M}}{v}-\sqrt{k}}{\frac{\sqrt{M}}{v}+\sqrt{k}}\right)$$

III.° Termine, fatto $\pi=2$

$$R\int\frac{3}{8}\,P^{-\frac{5}{2}}Q^2\,dx = \frac{3\cdot 2}{8}RN^3\omega\varphi^2 \times$$

$$\frac{v^4}{M^2f^4}\cdot\frac{1}{3}\left[\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{v^3}\right]$$

+

$$+\left(\frac{2v^4}{f^6M^2}+\frac{2a\omega v^2}{f^4M^3}\right)\left[\left(\frac{N-r}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{v}\right]$$

$$+\frac{1}{4f^6N^2}\cdot\frac{2}{N\omega}\left((N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}-Nv\right)$$

$$+\left(\frac{a}{f^4N^3\omega}-\frac{5}{4f^6N^2}\right)\cdot\frac{1}{f}\,l\left[\frac{1+f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{1-\frac{f}{v}}{1+\frac{f}{v}}\right]$$

$$+\frac{k^2a^2}{4N^2M^3}\left(\frac{2(N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}}{N\omega(a+x)}-\frac{2v}{\omega a}\right)$$

$$+\frac{-5k^{\frac{3}{2}}a^2}{4N^2M^3}-\frac{k^{\frac{5}{2}}av^2}{N^2M^3\omega}-\frac{k^{\frac{5}{2}}a^2f^2}{N^3M^3\omega}\cdot\frac{1}{\sqrt{M}}\,l\left(\frac{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{k}}{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{k}}\times\frac{\frac{\sqrt{M}}{v}-\sqrt{k}}{\frac{\sqrt{M}}{v}+\sqrt{k}}\right)$$

IV.° Termine, fatto $n=3$

$$R\int\frac{5}{16}P^{-\frac{7}{2}}Q^3dx=\frac{5\,.\,2}{16}RN^4\omega\varphi^3\times$$

$$\frac{v^6}{M^3f^4}\cdot\frac{1}{5}\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{v^5}\right)$$

$$+\left(\frac{2v^6}{f^6M^3}+\frac{3a\omega v^4}{f^4M^4}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{v^3}\right)$$

$$+\left(\frac{3k^2v^6}{f^4M^5}+\frac{6k\omega v^4}{f^6M^4}+\frac{3ka\omega v^4}{M^4f^4}+\frac{3\omega^2v^2}{M^3f^8}\right)\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{v}\right)$$

$$+\frac{1}{4f^8N^3}\cdot\frac{2}{N\omega}\left((N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}-Nv\right)$$

$$+\left(\frac{3a}{2f^6N^4\omega}-\frac{7}{4f^8N^3}\right)\cdot\frac{1}{f}\,l\left(\frac{1+f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{1-\frac{f}{v}}{1+\frac{f}{v}}\right)$$

$$-\frac{k^{\frac{5}{2}}a^3\omega}{8N^2M^5}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{k}(N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{3}{2}}}{N^2\omega^2(a+x)^2}-\frac{4\sqrt{k}.v^3}{\omega^2a^2}\right)$$

+

$$+\left(\frac{13k^2a^3\omega}{16N^2M^5}+\frac{3k^3a^2v^2}{4N^2M^5}+\frac{k^3a^3f^2}{2N^3M^5}\right)\left(\frac{(2N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}}{N\omega(a+x)}-\frac{2v}{\omega a}\right)$$

$$+\left(-\frac{35k^{\frac{3}{2}}a^3\omega}{16N^2M^5}-\frac{21k^{\frac{5}{2}}a^2v^2}{N^2M^5}-\frac{3k^{\frac{7}{2}}av^4}{2N^2M^5\omega}-\frac{7k^{\frac{5}{2}}a^3f^2}{2N^3M^5}-\frac{3k^{\frac{7}{2}}a^2f^2v^2}{N^3M^5\omega}\right.$$

$$\left.-\frac{3k^7a^3f^4}{2N^4M^5\omega}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{M}}\,l\left(\frac{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{k}}{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{k}}\times\frac{\frac{\sqrt{M}}{v}-\sqrt{k}}{\frac{\sqrt{M}}{v}+\sqrt{k}}\right)$$

V.° Termine, fatto $\pi=4$

$$R\int\frac{35}{128}P^{-\frac{9}{2}}Q^4dx=-\frac{35\,.\,2}{128}RN^5\omega\varphi^4\times$$

$$\frac{v^8}{M^4f^4}\cdot\frac{1}{7}\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{v^7}\right)$$

$$+\left(\frac{2v^8}{f^6M^4}+\frac{4av^6}{f^4M^5}\right)\cdot\frac{1}{5}\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{v^5}\right)$$

$$+\left(\frac{3v^8}{f^8M^4}+\frac{10ka\omega v^6}{f^4M^6}+\frac{2a\omega v^6}{f^6M^5}+\frac{6a\omega^2v^4}{f^6M^5}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{v^5}\right)$$

$$+\left(\frac{20k^2a\omega v^6}{f^4M^7}+\frac{12k\omega v^6}{f^8M^5}+\frac{20ka\omega^2v^4}{f^6M^6}+\frac{4kv^4}{f^4M^5}+\frac{4\omega^3v^2}{f^{10}M^4}\right)\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{v}\right)$$

$$+\frac{1}{4f^{10}N^4}\cdot\frac{2}{N\omega}\left((N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}-Nv\right)$$

$$+\left(\frac{2a}{f^8N^5\omega}-\frac{9}{4f^{01}N^4}\right)\cdot\frac{1}{f}\,l\left(\frac{1+f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{1-\frac{f}{v}}{1+\frac{f}{v}}\right)$$

$$+\frac{k^3a^4\omega^2}{16N^2M^7}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2M(N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}}{N^3\omega^3(a+x)^3}-\frac{2Mv^3}{\omega^3a^3}+\frac{6k(N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{5}{2}}}{N^3\omega^3(a+x)^3}\right.$$

$$\left.-\frac{6kv^5}{\omega^3a^3}\right)$$

$$+\left(-\frac{k^{\frac{5}{2}}a^4\omega^2}{2N^2M^7}-\frac{k^{\frac{7}{2}}a^3\omega v^2}{2N^2M^7}-\frac{k^{\frac{7}{2}}a^4\omega f^2}{4N^3M^7}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{k}(N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{3}{2}}}{N^2\omega^2(a+x)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{4\sqrt{k}\,.\,v^3}{\omega^2a^2}\right)$$

$$+$$

$$+\left(\frac{55k^2a^4\omega^2}{32N^2M^7}+\frac{17k^3a^3\omega v^2}{4N^2M^7}+\frac{3k^4a^2v^4}{2N^2M^7}+\frac{7k^3a^4\omega f^2}{8N^3M^7}+\frac{2k^4a^3f^2v^2}{N^3M^7}\right.$$

$$\left.+\frac{3k^4a^4f^4}{4N^4M^7}\right)\left(\frac{2(N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}}{N\omega(a+x)}-\frac{2v}{\omega a}\right)$$

$$+\left(-\frac{105k^{\frac{3}{2}}a^4\omega^2}{32N^2M^7}-\frac{63k^{\frac{5}{2}}a^3\omega v^2}{4N^2M^7}-\frac{27k^{\frac{7}{2}}a^2v^4}{2N^2M^7}-\frac{2k^{\frac{9}{2}}av^6}{N^2M^7\omega}-\frac{63k^{\frac{5}{2}}a^4\omega f^2}{8N^3M^7}\right.$$

$$-\frac{18k^{\frac{5}{2}}a^3f^2v^2}{N^3M^7}-\frac{3k^{\frac{9}{2}}a^2f^2v^4}{2N^3M^7\omega}-\frac{27k^{\frac{7}{2}}a^4f^4}{4N^4M^7}-\frac{6k^{\frac{9}{2}}a^3f^4v^2}{N^4M^7\omega}$$

$$\left.-\frac{2k^{\frac{9}{2}}a^4f^6}{N^5M^7\omega}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{M}}\,l\left(\frac{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{k}}{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{k}}\times\frac{\frac{\sqrt{M}}{v}-\sqrt{k}}{\frac{\sqrt{M}}{v}+\sqrt{k}}\right)$$

ec. ec.

CALCOLO NUMERICO .

Volendo sapere il tempo T dal sasso speso in tutto il viaggio dal punto del suo scagliamento per la forza del vulcano lunare sino alla superficie della Terra , bisogna fare
$x=59-a$: il che facendo si ha
$N-x=k-a-(59-a)=60-a-59+a=1$
$e-f^2x=Nv^2-(v^2-\omega)(59-a)=(60-a)v^2-(v^2-\omega)(59-a)$
$=v^2+\omega(59-a)$

Io non darò tutto esteso il calcolo numerico , che occuperebbe un buon numero di pagine , e mi restrignerò a dare i logaritmi fondamentali , ed i risultati dei cinque termini della serie algebraicamente quì sopra svolti ne' loro membri de' quali , chi si sentisse lena , e pazienza , avrà per mezzo dei detti logaritmi il comodo di riscontrare il computo , ed aggiugnere quello di altri termini .

LOGARITMI FONDAMENTALI .

Unirò ai logaritmi fondamentali richiesti al calcolo dei cinque esposti termini , ed altri qualunque della serie , che si ha per le mani , del tempo , quegli altri pochi , che nei Problemi ci hanno no servito per il calcolo della velocità; onde tutti si abbiano in una tavola sott' occhio

$\text{Log. } R = \text{Log. } 19617066 = 7{,}2926332$

$\text{Log. } k = \text{Log. } 60 = 1{,}7781513 \ldots\ \text{Log. } \sqrt{k} = 0{,}8890756$

$\text{Log. } H = \text{Log. } 53{,}067642 = 1{,}7248298$

$\text{Log. } h = \text{Log. } 6{,}932358 = 0{,}8408809$

$\text{Log. } m = \text{Log. } 58{,}6 = 1{,}7678976$

$\text{Log. } G = \text{Log. } 2(15{,}108082) = 1{,}4802394$

$\text{Log. } a = \text{Log. } \frac{3}{11} = 9{,}4357286$

$\text{Log. } N = \text{Log. } (k - a) = \text{Log. } \left(60 - \frac{3}{11}\right) = 1{,}7761727$

$\text{Log. } (h - a) = \text{Log. } \left(6{,}932358 - \frac{3}{11}\right) = 0{,}8234501$

$\text{Log. } 59 = 1{,}7708520$

$\text{Log. } (59 - a) = 1{,}7688398$

$\text{Log. } \omega = \text{Log. } \frac{2GR}{N} = 7{,}2977299$

$\text{Log. } \varphi = \text{Log. } \frac{2GR}{am} = 7{,}8702764$

$\text{Log. } (\omega + \varphi) = 7{,}9732514$

$\text{Log. } v = \text{Log. } 8292{,}73 = 3{,}9186976$

$\text{Log. } f^2 = \text{Log. } (v^2 - \omega) = 7{,}6894934 \ldots\ \text{Log. } f = 3{,}8447467$

$\text{Log. } M = \text{Log. } (kv^2 - a\omega) = 9{,}6149762 \ldots\ \text{Log. } \sqrt{M} = 4{,}8074881$

$\text{Log. } (v^2 + \omega(59 - a)^{\frac{1}{2}} = 4{,}5457146$

$$l \left\{ \frac{1 + \frac{f}{\sqrt{(v^2 + \omega(59 - a))}}}{1 - \frac{f}{\sqrt{(v^2 + \omega(59 - a))}}} \times \frac{1 - \frac{f}{v}}{1 + \frac{f}{v}} \right\} = -\,2{,}0623314$$

$\text{Log. } 2{,}0623314 = 0{,}3143584$

$$l \left\{ \frac{\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{(v^2 + \omega(59 - a))}} + \sqrt{k}}{\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{(v^2 + \omega(59 - a))}} - \sqrt{k}} \times \frac{\frac{\sqrt{M}}{v} - \sqrt{k}}{\frac{\sqrt{M}}{v} + \sqrt{k}} \right\} = -\,7{,}5295688$$

$\text{Log. } 7{,}5295688 = 0{,}8767701$

Ri-

RISULTATI .

$$\mathrm{R}\int \mathrm{P}^{-\frac{1}{2}}\,dx = 31^{ore}.\,47'.\,18''$$

$$\mathrm{R}\int \tfrac{1}{2}\,\mathrm{P}^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{Q}\,dx = 12^{ore}.\,50'.\,55''$$

$$\mathrm{R}\int \tfrac{3}{8}\mathrm{P}^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{Q}^2\,dx = 8^{ore}.\,0'.\,50''$$

$$\mathrm{R}\int \tfrac{5}{16}\mathrm{P}^{-\frac{7}{2}}\,\mathrm{Q}^3\,dx = 5^{ore}.\,54'.\,1''$$

$$\mathrm{R}\int \tfrac{35}{128}\,\mathrm{P}^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{Q}^4\,dx = 4^{ore}.\,41'.\,22''$$

Importano adunque i soli cinque primi termini della serie $64^{ore}.\,14'.\,26''$:

cioè tanto , attesi i soli primi cinque termini della serie , risulta il tempo, che un sasso scagliato da un vulcano alla superficie media della Luna ardente, con una velocità di Piedi di Parigi 8292,73, lungo la retta dal centro della medesima Luna vegnente al centro della terra , impiegherebbe a cadere diritta - linea alla terrestre superficie; ed io stimo , che se ne abbia abbastanza per le deduzioni fisiche, come nella parte fisica appunto della disquizione farò vedere , senza spendere altra fatica , ed altro tempo in calcolare altri ulteriori termini della serie stessa .

Scolio .

Ho trattato il caso semplice, che il sasso venga dal lunare vulcano scagliato nella retta dal centro della Luna al centro della Terra concepita , ed al lungo di essa tenendo fedel viaggio a noi cada . Compostissimo diverrebbe il Problema , *supponendo , che il sasso scagliato fosse sotto qualunque angolo con la medesima retta , ed eziandio con il piano dell' orbita della Luna ; e proponendosi di cercare la velocità , con cui dovrebbe essere scagliato , onde l' orbita sua incontrasse l'atmosfera terrestre, per la cui resisten-*

stenza dovesse il sasso, dopo alcuni spirali giri, finalmente cadere in terra; e quinci determinare la velocità, con la quale caderebbe, ed il tempo, che dall' istante dello scagliamento allo istante della caduta speso avrebbe. Problema sarebbe egli questo più intricato, che quello dei moti della Luna, che tanto di travaglio recato hanno, e recano agli Astronomi. Poichè egli è ben vero, che un vantaggio avrebbesi nella tenuità della massa del sasso; ma non avrebbesi quello, che nella teoria Lunare si ha per l' eccesso della distanza del Sole dalla Luna, e della Terra sopra la distanza di questi due corpi fra loro; e poi l' elemento della resistenza dell'Atmosfera crescente via via negli strati più bassi, quale nuova difficoltà non aggiugnerebbe? Io non credo esservi il pregio dell' Opera nell' immergersi in tale complicato problema; tanto più, che la lunghezza del tempo richiesta per la caduta del sasso retti-linea somministra una base sufficiente per l' esame fisico dell' opinione.

OSSERVAZIONI

SULLE RESISTENZE DELL' ACQUA E DELL' ARIA

Del Sig. Paolo Delanges

Ricevute il dì 6 Giugno 1806.

§. I. Riflettendo e prendendo in esame da profondo Geometra il nostro Socio , Sig. Cavalier Vittorio Fossombroni i risultati delle tante e tante sperienze fin ora instituite intorno all' urto o alla resistenza, che incontrano i corpi in movimento nell' acqua o nell' aria, non che le ipotesi e le teorie immaginate per ispiegarne e fissarne le regole, conobbe ben a ragione essere necessario d' isolatamente sperimentare sull' influenza in tali resistenze , palesata dagli sperimenti, e sostenuta da' più sensati raziocinj ,, ,, della maggior' o minore facilità con cui il fluido resistente o ,, urtante passa dalla parte anteriore alla posteriore del solido. ,, Pervenne esso in fatti al sagace suo divisamento cogli sperimenti ch' espose nell' ubertosissima sua Memoria *Della resistenza e dell' urto ec.* inserita nel Tom. IX degli Atti nostri, e da' quali conchiuse, che la maggior' o minore facilità con cui le molecole ,, fluide (dipendentemente dalla pressione delle superincombenti ad esse) passano dall' anterior parte del solido alla poste- ,, riore, influisce significantemente nelle intensità delle resisten- ,, ze o degli urti dei fluidi ,, Proprietà idrostatica cui serve inoltre, come fa osservare il prelodato Autore, a dimostrare de' fenomeni singolari , ed a discutere delle importanti teorie idrauliche .

§ II. Le più recenti e grandiose sperienze intraprese per ordine del Governo in Francia sulla resistenza particolarmente dell' acqua, sono certamente quelle dirette dai tre illustri Geometri li Signori d' Alembert, il Marchese De Condorcet, e l' Abate Bossut (*nouv. Exp. sur la résist. des fluides ann.* 1777), e le altre pure dirette dal chiarissimo Signor Cav. Du Buat (*Princip. d'Hydraul. &c. ann.* 1786). All' accennata proprietà pertanto deggiono attribuirsi le varietà de' risultati in dette sperienze fatte, per conoscere le leggi seguite dalla suddetta resistenza, sì riguardo alla velocità del corpo in moto, che alla grandezza della superficie urtante o urtata, siccome pure che il valore assoluto di essa dipender debba non solo dalla faccia anteriore del corpo, ma eziandio dalla posteriore e dalle laterali, e in una parola dall' intiera sua figura, e dall' essere più o meno immerso: nullameno il Signor Cav. Du Buat opina che fino ad un dato limite sieno incomputabili le variazioni de' risultati provenienti dalle diverse indicate circostanze di figura e d' immersione, sì che non esita a conchiudere che le resistenze egualmente ,,*pour les petites vitésses dans les corps flottans, & pour les vitésses jusqu' à 3 pieds dans les corps plongés . . . sont très sensiblément proportionnelles aux quarrés des vitésses* ,, (*Op. cit. Tom. II. pag.* 225).

§. III. Ma volendo non trascurare la scoperta idrostatica proprietà (§. I.), è manifesto che se per determinare la legge delle velocità, basta fare, per esempio, correre uniformemente nell'acqua con differenti gradi di velocità uno stesso solido parallelepipedo ad una costante immersione; per conoscere quella della grandezza delle superficie urtanti, converrebbe sottoporre all' esperienza parecchj solidi simili, come de' cubi, delle sfere ec., i di cui lati e diametri procedessero in data ragione, e che similmente immersi venissero mossi nell' acqua colla stessa uniforme velocità, onde cognita per esperienza la resistenza assoluta d' un corpo, poter dedurre quella d' un corpo simile di qualsivoglia grandezza e mosso con qualsivoglia altro grado di velocità. Potrebbe anche accadere, che l' effetto della minor facilità sull' intensità della resistenza dell' acqua, ne' corpi simili, derivante dalla maggior lunghezza e larghezza differisse di quantità trascurabile da quello prodotto dalla maggior facilità per la maggior' immersione del solido; e che perciò i canoni singolarmente conchiusi dalle celebri sperienze fatte a Parigi del 1777 fossero sufficiencienti a somministrare risultati prossimi a' veri nell'applicazione di essi alle pratiche. Su detti canoni pertanto siami lecito di fare le seguenti osservazioni.

§. IV. E primieramente osservo che non si è con certezza fissato l' istante, ovvero il punto in cui nella linea del suo movimento il corpo galleggiante entrava in moto uniforme, su di che sta affidata singolarmente la sicurezza de' risultati in tali sperimenti e le conseguenze da dedurne. E vaglia il vero, supposto, che mezzi minuti secondi 17,08 sia il tempo in cui il galleggiante tirato dal peso di 12 marchi percorre piedi 20 con moto equabile nell' acqua, e che in vece del tempo 12″,45 (come si vede nella Tav. I. Cap. II. pag. 138. op. cit.) fosse soltanto 12″,00 quello in cui lo stesso galleggiante percorresse li suddetti 20 piedi tirato dal peso di 24 marchi, si ricaverebbe che l' esperienza conferma la legge della resistenza proporzionale al quadrato della velocità dall'antica teoria voluta, mentre il quarto proporzionale a $\overline{1200}^2$, $\overline{1708}^2$, ed a 12 marchi, si è marchi 24,31, che differisce di quantità trascurabile dal peso di 24 marchi adoperato nell' esperienza, in paragone del peso di marchi 22,58 che risulta nella supposizione del tempo 12″,45, come s' è di sopra accennato. Se così fosse avvenuto, il che diventa sempre più calcolabile riguardo a' maggiori pesi motori posti in cimento (Tav. sopraind.), non sarebbe d' ammettersi il canone *qu'à la rigueur la résistance augmente en plus grand rapport que le quarré de la vitêsse* (Reflex. §. 9. pag. 147), e tanto più che non si sono eseguiti sperimenti con velocità significanti.

§. V. Ma supposto che non avesse luogo l' esposta correzione ne' pesi motori, io reputo però che convenisse depurarli dalle resistenze dell' attrito, dell'aria, e da quella che incontrava il corpo galleggiante dall' affollamento dell' acqua, chiamato da' Francesi *remou*, che costantemente nel suo movimento si conservava alla sua faccia anteriore, prima di passare a conchiudere dalle relazioni loro le leggi ricercate. Le due prime resistenze non sono state ommesse in alcuni casi; della terza poi non se n' è fatto conto veruno, quantunque riconosciuta a segno di riferire appunto a questa il già menzionato canone nell' antecedente paragrafo: Per computare pertanto tali depurazioni si ponga, com'era di fatto, che 31 : 2 sia la ragione del raggio delle girelle impiegate nel meccanismo delle sperienze, aumentato di quello della cordicella che le attorniava, al raggio del loro perno, e 5 ad 1 la ragione della pressione alla resistenza dell' attrito che soffrivano le girelle intorno a' loro perni. Chiamata x la resistenza che incontra il corpo galleggiante nel moversi equabilmente per l' acqua con qualsivoglia grado di velocità, si conoscerà per le leggi delle resistenze degli attriti de' solidi da me investigate nella *Meccanica pratica* pubblicata in Verona l' anno 1783, nella *Nuova discussione* ec. esposta nel tom. VI della Biblioteca fisica in Pavia l' anno 1783, e nella Memoria sul *Moto concreto* ec. nel Tom. III. degli Atti nostri, che il peso motore nel disparto usato è generalmente espresso dalla seguente formola (A)

$$x + \frac{2}{31} \cdot \frac{1}{5} \left(2x + \frac{2}{31} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2x\sqrt{2} \right) \ldots \text{(A)}$$

oppure dalla (B) riducendo la (A) a minimi termini

$$\frac{123281}{120125} \cdot x \ldots \text{(B)}$$

Paragonando quindi la formola (B) al peso motore d' un dato sperimento si svilupperà il valore d' x, cioè la resistenza che in esso incontrava il corpo galleggiante depurata da quella degli attriti. La resistenza poscia che oppone al galleggiante il corpo d' acqua che se l' innalza alla prora, io la determino sul principio fondamentale dell' Idrostatica, avvegnacchè entrato che sia il galleggiante in movimento equabile, mantiensi l'innalzamento d' acqua alla di lui prora costantemente lo stesso, e ciò mediante l' ammirabile sostituzione a quella quantità d' acqua innalzata che lungo le laterali sponde ricorre dietro esso, della nuova acqua che dinanzi alla stessa prora ne ripara con precisione la perdita. Perciò dicendo a l' altezza media dell' innalzamento d' acqua alla prora del galleggiante ed l la lunghezza di essa, ed essendo inoltre libbre 70 il peso d' un piede cubo d' acqua oppure 140 marchi, cioè il peso d' un' oncia cuba d' acqua $\frac{140}{1728}$ ovvero $\frac{35}{432}$ marchi; si otterrà nella formola (C) il valore della pressione, oppure la resistenza che soffre il galleggiante in virtù dell' innalzamento d' acqua alla di lui prora

$$\text{marchi } \frac{35}{864} \cdot a^2 l \ldots \text{(C)}$$

§. VI. Non tenendo conto ora della resistenza dell' aria, essendo essa picciolissima rispetto a quella dell' acqua ne' gradi di velocità con cui si movevano i galleggianti, come fanno considerare gli Autori medesimi (§. 31. pag. 170. 171. op. cit.), ed applicando le formole (B) (C) ad un esempio, scelgo le due sperienze VIII. e XVI. eseguite col secondo battello. Così calcolando, si scopre, che nella prima sperienza il peso motore di 16 marchi depurato dagli attriti, e dalla pressione dell' innalzamento d' acqua alla prora, si riduce a marchi 13,64, e quello di marchi 48 della seconda a marchi 35,97. Ma il tempo per iscorrere gli ultimi 20 piedi impiegato dal galleggiante nella sperienza VIII. è 21",11; ed il tempo pegli ultimi 20 piedi nella sperienza XVI è 12",59: sarà dunque la ragione delle resistenze opposte dall' acqua al battello rappresentata dal numero 2,63, e quella de' quadrati delle velocità dal numero 2,81: numeri che differiscono della quantità $\frac{18}{100}$, e che diminuirebbesi non trascurando anche la resistenza dell' aria, che non può indurre a non istabilire che le resistenze seguano la ragione de' quadrati delle velocità senza l' accennata modificazione (§. IV.).

§. VII. Depurati i pesi motori nell' indicata guisa, possono concludersi almeno prossimamente per le pratiche i seguenti canoni, come conclusero pure gli Autori delle note sperienze (*conclusion générale &c. pag.* 174.), non computando più, forse come di effetto non computabile, la modificazione alla legge delle velocità da loro riconosciuta (§. IV.), intorno all' urto ed alla resistenza perpendicolare e diretta, cioè; 1° che proceda essa in un fluido indeterminato e per ogni senso libero in ragione della piana superficie urtata; 2° che segua la ragione del quadrato della velocità non variando di grandezza la superficie; e 3° che la sua in-

intensità equivalga al peso d'una colonna dello stesso mezzo, che abbia per base la superficie piana esposta all' urto, e per altezza quella che compete alla velocità con cui si fa l' urto medesimo. Ma se le due prime leggi non vengono con la desiderabile approssimazione confermate come dalle moderne così dalle antiche sperienze, come specialmente sono le reputate del Signor Cavalier De Borda (*Mem. de l'Acad. ann.* 1763. 1767.), molto più sono discordi le sentenze teoriche ed i risultati sperimentali riguardo alla terza, mentre chi conchiuse, che l' altezza della colonna fluida equivalente all' intensità della resistenza sia la semplice dovuta alla velocità, chi la doppia, e chi, che tale altezza sia maggiore della prima e minore della seconda. Similmente avvenne dell' urto o della resistenza obbliqua, avendo già riconosciuto i tre Geometri Francesi, come riconobbe il precitato Signor Cav. De Borda, che non segue essa nemmeno prossimamente la legge del quadrato del seno dell' angolo d' incidenza, come sostiensi dall' ordinaria teoria. Li Signori Marchese De Condorcet ed Abate Bossut anzi dalle nuove sperienze che fecero su questo particolare (*Mem. del' Acad. des Scien. ann.* 1778) dedussero che le resistenze obblique procedono bensì nella ragione del quadrato del seno dell' angolo d' incidenza, ma aumentato della potenza $3\frac{1}{4}$ del coseno dell' angolo medesimo. Quivi però cade in acconcio di trovare, depurando i risultati sperimentali come ho indicato (§.V.), la relazione tra la resistenza che soffre la superficie d' un cilindro e la sua sezione per l'asse, movendosi parallelamente ad esso ed interamente immerso nell' acqua, onde conoscere come feci degli altri canoni, anche di questo della resistenza obbliqua il grado della sua convenienza colla comune teoria. Le due sperienze, che fanno all' intento, sono le XXVI. e CLXXXIX; come che in esse possono considerarsi dotati i pesi motori o sieno i galleggianti della stessa velocità. Quindi riducendosi il peso motore della prima sperienza da 22 a mar. 19,39; e quello della seconda da 12, a 10,85; sarà la resistenza della semisuperficie cilindrica a quella del piano che passa per l' asse del cilindro in ragione de' numeri 1085, 1939, che danno la ricercata relazione nel numero 1, 79 prossimamente eguale al numero 1,82 che risulta dalla ragione 11 a 20 determinata per lo stesso solido dalle già ricordate sperienze del Cav. De Borda.

§. VIII. Per risolvere ora teoricamente il problema nella comunemente abbracciata ipotesi, che le antecedenti molecole fluide immediatamente dopo l'urto, o contro una superficie immobile, o dalla stessa in movimento urtate passino dall'anteriore alla posterior parte senza impedire nè modificare l'urto delle successive; rappresenti il cerchio ABCD la sezione perpendicolare all'asse del dato cilindro, cui nel suo movimento incontra il fluido nella direzione DF perpendicolare al verticale diametro AC, e sia l'ordinata fd infinitamente vicina alla FD, e si unisca il raggio ED. Si dica poscia AF $= x$, AC$=2r$; sicchè F$f = dx$, FC $= 2r - x$, ed FD $=\surd(2rx-x^2)$. E poichè l'elemento superficiale del piano che passa per l'asse all'elemento corrispondente della superficie cilindrica, avendo amendue la stessa lunghezza del cilindro, stanno in ragione di Ff a Dd, ed incontrerebbero o sarebbero amendue urtati, supposti separatamente in moto, dallo stesso numero di filamenti fluidi, l'urto dunque contro essi elementi, secondo il principio dinamico universalmente noto, seguirà la ragione del seno dell'angolo secondo cui è percosso; e perciò esprimendo dx l'impulsione perpendicolare che soffre l'elemento Ff del piano che passa per l'asse, il quarto proporzionale ad r, $\surd(2rx-x^2)$, e dx, cioè $\frac{1}{r}\, dx\surd(2rx-x^2)$ sarà l'impulsione obbliqua sofferta dall'elemento Dd della cilindrica superficie; e siccome l'impulsione del fluido contro ciascun elemento Dd esercitasi in direzione ad esso perpendicolare, supponendosi, com'è di comune consenso, sferiche le molecole componenti ogni suo filamento; così indicata da DG presa nel raggio DE la detta impulsione e compiuto il rettangolo Hh, verrà essa divisa nelle due DH, Dh, per la teoria delle forze composte, ed ogni elemento Dd ha il suo elemento corrispondente distante tanto dall'estremità A del diametro AC, quant'è desso dall'altra C:

quindi è evidente che ogni impulsione Dh ne ha una eguale e contraria, e che non agiscono contro la superficie cilindrica ADC che le sole impulsioni DH. Essendosi trovata pertanto l'impulsione DG $= \frac{1}{r} dx\sqrt{(2rx-x^2)}$, si avrà nel quarto proporzionale ad r, $\sqrt{(2rx-x^2)}$, e ad $\frac{1}{r} dx\sqrt{(2rx-x^2)}$, oppure al quadrato del seno tutto r^2, al quadrato del seno dell'angolo d'incidenza $2rx-x^2$, ed a dx rappresentante la resistenza diretta contro l'elemento Ff, si avrà dico in $\frac{2rxdx-x^2dx}{r^2}$, cioè nell'integrale $\frac{x^2}{r} - \frac{x^3}{3r^2}$ l'impulsione contro la porzione di superficie cilindrica AD, e posto $2r$ in vece d'x, si scoprirà che l'impulsione contro la semisuperficie cilindrica esposta all'urto a quella che incontra il piano che passa per l'asse ha la ragione di 2 a 3, e perciò dal numero 1,50 viene definita la relazione tra le dette due impulsioni o resistenze. Differisce troppo tale relazione teorica dalla sperimentale, onde ammettere che l'una e l'altra vicendevolmente si confermino: nullameno piuttosto che considerare incerti in questo caso i risultati sperimentali, attribuirei io il difetto alla teoria, come appoggiata all'ipotesi conveniente unicamente all'urto de' solidi, su cui vuolsi egualmente fondare quella dell'urto de' fluidi.

§. IX. I primi Geometri che si occuparono dell'argomento di cui trattasi, e ch'è tra più difficili ed importanti della Fisico-Matematica, rivolsero le prime loro meditazioni ed esperienze sulla resistenza dell'aria, scegliendo il corpo di figura sferica a preferenza d'ogni altro. Newton giudicò potersi stabilire che la resistenza dell'aria contro un corpo sferico, com'è la palla del Cannone o del Mortajo, è uguale al peso d'una colonna cilindrica d'aria, di cui la base sia il cerchio massimo della palla, e l'altezza la metà di quella da cui un corpo dovrebbe cadere nel vuoto, per acquistare la velocità che ha in un punto dato della linea che descrive; di maniera che la resistenza incontrata dalla semisuperficie sferica sia la metà di quella che incontrerebbe il cerchio massimo della stessa sfera. Robins ha instituite appunto delle sperienze singolarmente collo scopo di conoscere le leggi della resistenza de' projetti, e non parlando delle utili osservazioni che fece riguardo all' artiglieria, mi fermerò soltanto ad esaminare se l' esperienza da lui fatta, e da cui risultò che una palla di ferro di 12 libbre di peso, mossa colla velocità di 25 piedi per secondo, incontrava una resistenza equivalente al peso di mezz' oncia, corrisponda alla Newtoniana sentenza. E poichè in misure Parigine il diametro della palla di ferro di 12 libbre di peso è poll. 4,17, lo spazio percorso dalla gravità terrestre in un minuto secondo, piedi 15, 10, e lo spazio percorso dalla palla nell'esperienza piedi 23, 50, cioè li suddetti 25 di Londra; il quarto proporzionale ai quadrati 30,20 ; 23,50, ed a 15,10, cioè piedi 9.14 è l'altezza da cui la palla dee cadere per acquistare la velocità di piedi 23 , 50 per secondo. Essendo poi il cerchio massimo di essa once quadrate 13, 64, e la metà della detta altezza once 54,84 : dunque secondo Newton 13, 64 . 54, 84, vale a dire il peso d' once cube 748 d'aria dee equivalere alla resistenza che essa oppone alla palla ; ma il peso d' un piede cubico d'aria ossia di once cube 1728 è once 1, 32 : dunque il peso della colonna d'aria equivalente alla resistenza della palla è once 0,57, cioè prossimamente la mezz' oncia trovata nell' accennata sperienza del Robins. Per accertarsi però di tale approssimazione farebbe d' uopo depurare il risultato sperimentale dalle straniere influenze che concorrevano ad alterare il valore isolato della sola resistenza dell' aria, dipendenti dalla compostissima macchina con cui venne l' esperienza eseguita. Tale dubbietà tanto più dee valutarsi, sapendosi che le sperienze pure sulla resistenza dell' aria del Cav. De Borda lo condussero a determinare non già la ragione di 2 a 4 tra la resistenza della semisuperficie sferica ed il suo cerchio massimo, ma quella di 2 a 5 sensibilmente minore.

§. X. Egli è vero che 2 a 4 è pure la ragione che dà la solita teoria, come ritrovò con tutta la sagacità e dottrina il P. Gregorio Fontana (*Disquisitiones Physico - Mathematicae &c. pag.* 323.) paragonando la resistenza diretta contro la zona elementare che nasce dall'elemento Ff alla resistenza obbliqua che soffre l' elemento sferoidale, che nasce dall' elemento Dd nella rivoluzione del semicerchio BCL che genera la sfera, girandosi intorno all'asse BL. Nulla meno io non sono di parere, che la stessa ragione possa valere egualmente per la resistenza della sfera, sì in movimento nell'acqua, che nell'aria. La diversa sostanza, tessitura, e figura degli elementi ne' detti fluidi, che fanno, che, fisicamente parlando, incompressibile sia il primo, e compressibile ed elastico il secondo, deggiono altresì influire non solo nell' intensità, come vorrebbe Newton, ma eziandio nell'esercitare il loro urto o resistenza contro un solido in essi in movimento. Quindi può essere egualmente vero che nell'acqua, poste sempre pari le restanti circostanze, 1°: segua la resistenza la ragione delle superficie, e che s'aumenti in maggior ragione della loro estensione nell' aria, come sperimentò il Cav. De Borda, e recentemente il Signor Riccardo Lowell Edgwoorth (Trans. filosof. della Soc. R. di Londra Vol. 73); 2°: che sotto gradi di velocità significanti proceda la resistenza in maggior ragione del quadrato della velocità nell' acqua, e che segua quella del quadrato nell' aria, come sperimentò lo stesso Cav. De Borda, o che s'alteri pure nello stesso fluido coll' aumentarsi della velocità, ma sotto gradi diversi, e con differenti proporzioni come sperimentò il Robins; 3°: e che per ultimo la resistenza obbliqua si allontani più nell' acqua che nell'aria dalla ragione del quadrato del seno dell'angolo d' incidenza: così la teoria pel cilindro dà la ragione di 2 a 3 (§ VIII), e le sperienze Parigine sull'acqua danno la ragion minore di 1085 a 1939 (§. VII.); mentre la ragione ricavata dalla teoria, come s' è superiormente accennato, riguardo alla sfera, alle sperienze di Newton e di Robins fatte sull' aria con fisica approssimazione corrisponde (§. IX.). Dalle sperienze però sulla resistenza dell' aria del Cav. De Borda, risulta che quella del cilindro è di 11 a 20, e quella della sfera di 2 a 5, amendue minori delle suddette ragioni teoriche. Ma ormai sonosi moltiplicate a grado le sperienze su questo soggetto, e sono così discordi i risultati e le dedotte conseguenze che diviene asserto assai malagevole l'affacciarsi ad esso . Non può però non convenirsi che non si abbiano acquistati de' lumi , e de' limiti sufficienti utili in alcune pratiche , e sopra tutto , il che deesi molto valutare, che gli studj fatti abbiano fatto conoscere, che la resistenza o l' urto che soffrono i solidi ne' fluidi dipende non solo dalla loro faccia anteriore, come singolarmente voleva Newton , ma dalla complessiva loro figura e grandezza, e dall' essere in essi più o meno immersi , alle quali circostanze appunto io giudico doversi riferire le contraddizioni, che riscontransi ne' risultati sperimentali , oltre al non essersi forse questi depurati dalle alterazioni dipendenti dagli usati meccanismi , e dal supporre que' che si ottennero dalle sperienze in un fluido indistintamente all'altro applicabili.

ESPERIENZE

SUL DISPENDIO D'ACQUA DE' TUBI E DE' CANALI RETTILINEI E TORTUOSI

Del Sig. Paolo Delanges

Ricevute il dì 6 Giugno 1806.

Nel tomo XVII parte II dell' opera intitolata *Biblioteca Fisica dell' Europa*, che si compilava in Pavia, in una mia lettera diretta al Chiarissimo nostro Socio il Signor Brugnatelli, avvisai aver io intrapresi parecchi sperimenti idraulici l' anno 1790 in Padova, riservandomene la pubblicazione a tempo opportuno. L' anno 1791 pubblicai nel tomo XV degli *Opuscoli scelti* in Milano quelle sperienze, ch' io feci per conoscere la legge della pressione dell' acqua in movimento, in una mia Memoria che denominai *Sperienze Idraulico-Statiche*, dalle quali dedussi singolarmente i seguenti canoni, cioè I°: che la pressione idrostatica sulle pareti de' tubi rettilinei e d' uniforme sezione, a' quali somministrata venga l' acqua da inalterabile Conserva, si diminuisce, sieno orizzontali o inclinati, quanto più libero è lo scarico all' estrema bocca loro, fenomeno che comincia a comparire soltanto dall' essere il foro la quinta parte dell' area della stessa bocca, dimostrando che se non è sostenibile a tutto rigore la teoria Bernoulliana sul soggetto, gli sperimenti però fatti dal Bernoulli e dal Signor Abbate Bossut su soli tubi orizzontali, eccettuando quelli ne' quali per la picciolezza de' diametri de' fori rispettivamente a quelli de' tubi, avea influenza il fenomeno pneumatico de' tubi capillari, portano alla stessa conclusione. II°: che ne' canali rettilinei artefatti alimentati da costante Conserva, come s' è detto de' tubi, non s' altera la pressione idrostatica se sono orizzontali, e sia parallela al fondo la superficie dell' acqua, che per essi trascorre con qualsivoglia grado di velocicità, e se sono inclinati, si diminuisce, quanto più è libera, mercè l'inclinazione del loro fondo, la naturale sua gravità. III°: e che per ultimo la pressione idrostatica contro le parti d'un vase, mantenuta l'acqua in esso a costante altezza, principia a diminuirsi, avendo l'area dell' orifizio fatto in centro del fondo allo stesso fondo la ragione di 1 a 14, e sulle particelle che si presentano al foro avendo esso al fondo la ragione di 1 a 72. La seconda e la terza massima da' miei sperimenti raccolte, concorrono a confermare la teoria può dirsi immaginata dal Signor Bernard (*Nouveaux principes d'Hyd.&c.pag.* 62), che il valore cioè della pressione idrostatica esercitata però, a differenza de' solidi, per ogni senso dall' acqua in movimento, nell' enunciate circostanze dipender debba dallo stato più o meno impedito della sua gravità. Imprendo ora pertanto l' esposizione di quelle sperienze, che hanno bensì relazione alle suddette, ma che ho eseguite col fine di scoprire la maggior' o minore facilità che incontra l' acqua nello scaricarsi per tubi e canali rettilinei, in paragone de' tortuosi e curvilinei, alimentati sì gli uni che gli altri da costante Conserva; nè mi rimarrà in adempimento del dovere impostomi fino dall'anno 1790, che di estendere quelle, dalle quali possono determinarsi de' canoni e delle massime utili nelle pratiche per correggere il viziato e disordinato sistema d'un fiume.

SPERIENZE

Sul dispendio d' acqua per tubi rettilinei e tortuosi.

La Conserva sodamente sostenuta a convenevole altezza dal piano soggetto era un cilindro di stagno alto poll. 14., e del diametro di pollici 8. In centro del suo fondo, e lateralmente ad esso erano saldate due piastrette di rame perforate a chiocciola; onde poter innestare ad esse de' tubi di latta se diritti, e di stagno se tortuosi, forniti all' estremità con cui si congiungevano ne' detti fori alla Conserva, di pezzi cilindrici pure di rame, col corrispondente verme che sorgeva intorno alla loro superficie esterna, in guisa, che dalla superficie interna della Conserva effluiva l'acqua per detti tubi uniformemente per la luce circolare di linee 4 di diametro, ch' era pure il diametro loro. Mantenuta l' acqua nella Conserva all' altezza di poll. 11. equivalenti prossimamente a poll. 12, o all' antico piede di Parigi, dal centro dell' orifizio nel fondo, al qual fine non solo cadeva l' acqua superflua per aperture fatte sulla sua sponda al detto livello, ma poteva aumentarsi o diminuirsi il getto che placidamente ve la versava, ho raccolte le quantità d' acqua sgorgate nel tempo costante di 72" dai quì descritti tubi annestati al detto orifizio in direzione verticale.

1.° Da un tubo rettilineo lungo poll. 24 sgorgarono poll. cub. d' acqua . . . . ,, 790

2.° Da un tubo rettilineo lungo poll. 5 . . . . ,, 756

3.° Da un tubo tortuoso, che essendo rettilineo per due pollici alle due estremità, comprendeva quattro svolte curvilinee e dolci, sicchè lunghesse riuscì lungo poll. 32 nella lunghezza per linea retta di poll. 24 . . . . ,, 720

4.° Da un tubo rettilineo alle estremità come sopra, ma composto di cinque tronchi rettilinei, e perpendicolari l'uno all' altro, lungo, seguendo i tronchi medesimi, poll. 30 ½ e per linea retta poll. 24 . . . . ,, 504

Chiusa la luce del fondo ho eseguiti i successivi sperimenti colla laterale, mantenendo sempre sopra il suo centro l' acqua alta poll. 11, e non cambiando il tempo di 72", e collocando i tubi o rettilinei o tortuosi in un piano inclinato ½ poll. nella lunghezza di poll. 24

5.° Tubo retto lungo poll. 24 . . . . ,, 468

6.° Tubo retto lungo poll. 5 . . . . ,, 576

7.° Tubo retto lungo poll. 1 . . . . ,, 720

8.° Tubo tortuoso n.° 3 . . . . ,, 360

9.° Tubo tortuoso n.° 4 . . . . ,, 252

Ripetendo le seconde sperienze coll' inserire le estremità de' tubi in una vaschetta circolare di piedi 2 ½ di diametro, onde lo scarico non fosse così libero come prima, sonosi nullameno no raccolte le stesse quantità d' acqua. La vasca avea tre aperture a livello delle bocche de' tubi per iscaricare l' acqua sopravveniente.

Considerazioni.

Avendo nell'usata Conserva l'area dell'orifizio a quella del fondo la ragione di 1 a 576 di gran lunga minore di 1 a 72, la pressione idrostatica esercitavasi non solo sulle sponde e sul fondo, ma eziandio sulla stessa colonna fluida soprastante il foro, come se l' acqua in essa fosse rattenuta in quiete. Il Signor Abate Bossut determinò sulla base di replicati sperimenti, che in un vase, mantenuto costantemente pieno, ed in cui l' orifizio sia piccolissimo relativamente all' area del fondo, il dispendio per un tubo addizionale, ed il dispendio per l' orifizio scolpito in sottilissima lamina sono tra se presso a poco come i numeri 13, 10. Benchè questo pratico canone, dopo gli esposti sperimenti non possa riguardarsi generale, dipendendo la quantità dell' efflusso in un tubo addizionale dalla sua lunghezza e dalla sua posizione, con tutto ciò prendendo per modulo la quantità d' acqua sgorgata dal massimo sperimentato tra i tubi addizionali verticali (Sp. 1), ne verrebbe che le quantità d' acqua ne' due anzidetti casi somministrate dalla stessa Conserva, sarebbero 790, e 603 nel tempo costante di 72". L' illustre March. Poleni fu il primo ad osservare che l' efflusso de' vasi cambia di sistema dall' essere al non esser armati i lumi di tubi cilindrici o conici (*Tract. de Castellis*). In seguito Mariotte confermò lo stesso, accuratamente sperimentando, e trovò che i tubi addizionali al fondo de' vasi aumentano lo scolo dell' acqua, ed il Sig. Ab. Bossut sperimentò pure, colla nota sua sagacità, che il tubo addizionale conico dà più acqua del cilindrico. Ma rivolgendo ora l' attenzione sopra i risultati de' quattro primi sperimenti, che mirano appunto a conoscere l' effetto de' tubi addizionali all' orifizio nel fondo d' una Conserva, si deduce I°: dall' essere 603 la quantità dello scolo dell' orifizio in lamina, come s' è poco fa calcolato, to, 756 quella del tubo addizionale cilindrico lungo poll. 5, e 790 quella del tubo lungo poll. 24, che crescendo in lunghezza il tubo cilindrico addizionale, cresce eziandio il dispendio della Conserva; II°: e che essendo le quantità 720, 504 sgorgate da' tubi tortuosi, quantunque di maggior lunghezza del tubo cilindrico di poll. 24, minori della quantità 790 dallo stesso scaricata; risulta che i tubi addizionali tortuosi ritardano lo scolo della Conserva, e molto più lo ritardano, quanto più le tortuosità sono acute, giacchè ne' tubi posti al cimento non poteva altra condizione influire, essendo presso a poco di lunghezza eguale. Quanto poi a' tubi addizionali alla luce laterale della Conserva, si osserva; I°: che ne'tubi rettilinei cilindrici si diminuisce il dispendio crescendo in lunghezza, come dimostrano gli sperimenti 5.° 6.° 7.°, all' opposto di ciò che accade quando sono congiunti al fondo della Conserva; II°: e che ne' tortuosi si diminuisce bensì rispetto a' tubi rettilinei, ma scaricano assai minor quantità d'acqua, che nel caso predetto, come si conosce confrontando gli sperimenti 8.° 9.° con i 4.° e 5 °. Io convengo col Signor Bernard che ne' fenomeni de' tubi addizionali debba influire l'aderenza dell' acqua lungo le superficie liscie che le si presentano alla sua uscita da' fori della Conserva, mercè cui dee diminuirsi il ritardo causato dalla cognita restrizione della vena, ma non mi sembra generalmente sostenibile che debbano i tubi essere sempre corti per dare un maggior dispendio, per la ragione, che come egli dice ,, sans cette attention le frottement de l'eau ,, contre les parois diminueroit sa vitesse et par conséquent la ,, dépense du réservoir . . . . . ,, (*Op. cit. pag.* 24). Se le riferite esperienze comprovano tale asserzione per i tubi addizionali alla luce laterale della Conserva, non la confermano per gli addizionali a quella del suo fondo; risultando da esse che minor quantità d' acqua somministrano i più corti tubi in direzione verticale, e quantità maggiore nell' orizzontale, come dedusse pure il Signor Ab. Bossut da' suoi sperimenti sul soggetto, onde definire le massime intorno alla pratica de' tubi di condotta, argomento su cui già erano state fatte primieramente delle sperienze in grande dal Signor Couplet (*Mem. de l' Acad. des Scien. ann.* 1732).

SPERIENZE

Sul dispendio d' acqua per canali rettilinei e tortuosi.

Mantenendo l' acqua alta nella Conserva alla solita altezza di poll. 11. sopra il centro della luce laterale e ad essa annestando come nelle antecedenti sperienze i seguenti canali costruiti di latta i rettilinei, e di stagno i tortuosi, e de' quali il fondo era inclinato ½ poll. in 24 di lunghezza, ho misurate le quantità d' acqua da essi sgorgate nel tempo di 72″, ed ho osservati i quì sotto descritti fenomeni.

10.° Canaletto lungo poll. 24, largo lin. 3, diritto e con sponde perpendicolari al fondo alte linee 8
Poll. cub. d' acqua . . . . „ 648

L' altezza dell' acqua in esso corrente si compose alta lin. 5 alla distanza d' un poll. circa dall' orifizio, e verso lo sbocco lin. 9 nel mezzo, restando ivi appena racchiusa lungo le sponde.

11.° Lo stesso canale, riducendo nella Conserva alta l' acqua poll. 3, e col lasciar scolare l' acqua superflua per un' apertura laterale a detta altezza . . . . „ 360

Crebbe d' altezza l' acqua corrente in esso, e verso lo sbocco si espandeva dalle sponde.

12.° Canale largo ed alto come l' antecedente, e lungo la terza parte di esso cioè poll. 8; rimettendo l' acqua all' altezza prima nella Conserva . . . . „ 648

Si mantenne l' acqua più depressa, che nell' esperimento 10.° rialzandosi però procedendo verso lo sbocco.

13.° Canale lungo la sesta parte, cioè poll. 4 . . . „ 648

L' acqua si è elevata meno che nell' antecedente, ma si rialzò nullaostante gradatamente fino allo sbocco.

14.° Canale rettilineo lungo poll. 24 con sponde alte linee 8 perpendicolari al fondo, e largo lin. 6 vicino all' orifizio, e lin. 10 all' altra sua estremità . . . . ,, 648

Correva l'acqua per esso più bassa che nell' esperimento 10.° e senza rigonfiarsi nemmeno verso lo sbocco.

15.° Canale lungo e con sponde alte come sopra, ma largo uniformemente poll. 2 $\frac{1}{2}$ / . . . . ,, 756

Dall' entrata in esso del getto vicina alla superficie esterna della Conserva fino alla metà circa della lunghezza del Canale, l' acqua vi correva sempre, bensì in grado minore, con movimento tumultuoso, ed in seguito regolarmente, componendosi, per quanto apparve al senso, colla superficie parallela al fondo, all' altezza di lin. 2 $\frac{1}{2}$.

16.° Canale tortuoso e lungo come il descritto (sp.° 3.°), largo nel fondo lin. 3 e con sponde ad esso perpendicolari alte poll. 2. $\frac{1}{2}$ . . . . ,, 720

Correva l' acqua in esso con la superficie divergente ed a vicenda convergente al fondo da un vertice all' altro delle due svolte vicine all' uscita del getto, e ciò più sensibilmente nella prima che nella seconda, ed in seguito si compose convergente al fondo all' altezza di poll. uno allo sbocco; riuscendo però convergente al fondo anche la totale pendenza superficiale.

17.° Eseguito lo stesso sperimento tenendo l' acqua alta nella Conserva poll. 3 . . . . ,, 414

Nacquero fenomeni consimili.

18.° Canale a tronchi rettilinei perpendicolari l' uno all' altro come l' accennato (sp.° 4.°).

Quantunque avesse le sponde alte come l' antecedente, e si mantenesse nella Conserva alta l' acqua poll. 3, la espandeva per ogni dove pel forte rigurgito a cui soggiaceva nel passare da un tronco all' altro, in paragone di quello che sofferiva nel canale tortuoso a svolte o flessioni curvilinee.

Considerazioni.

Variando soltanto l' altezza dell' acqua nella Conserva, li due sperimenti 10.° ed 11.° conducono a conchiudere, che nello stesso Canale s' aumenti la resistenza che incontra l'acqua lunghesso entrandovi con minore velocità, non potendo contenere il getto spinto dall' altezza di poll. 3; mentre conteneva quello spinto dall' altezza di poll. 11. Le quantità però d' acqua scaricate nello stesso tempo dallo stesso Canale sono prossimamente proporzionali alle radici delle sue altezze nella Conserva, come lo sono pure riguardo a' canali tortuosi (sp. 16.° e 17.°). Li tre sperimenti 10.° 11.° e 13.° ne' quali non varia che la lunghezza de' canali congiunti alla luce laterale della Conserva, dimostrano che viene compensata la resistenza che incontra in essi l'acqua corrente col gradatamente inalzarsi e comporre la sua superficie divergente dal fondo, nè si diminuisce in tal guisa di quantità l' efflusso loro, mentre aumentasi in pari circostanze ne' tubi addizionali più corti (sp. 5.° 6.° 7.°). A confermare ciò che s' è detto, concorre l' esperimento 14.° in cui per la maggior larghezza del canale scomparve il rigonfiamento verso lo sbocco, osservato specialmente nell' esperimento 10°, sgorgando nullameno la stessa quantità d'acqua. L' esperimento poi 15.°, in cui il canale era lungo come ne' 14.° e 10.°, ma molto più largo, dimostra che per la maggior larghezza si diminuisce la resistenza, che incontra l'acqua in essi, sì per comporre la sua superficie presso che parallela al fondo, che per aver somministrata maggior quantità d' acqua nello stesso tempo. Può ancora dallo stesso sperimento conghietturarsi, che in tali canali consista la resistenza che incontra l' acqua corrente per essi, nell' aderenza de' filamenti acquei contigui alle sponde, cui col crescere di larghezza il canale, diventa meno comunicabile a' filamenti intermedj. In fine dall' esperimento 16.° si raccoglie che il canale tortuoso annesso alla luce laterale della Conserva in rispetto del canale diritto della stessa lunghezza rettilinea usato nell' esperimento 10°, è vantaggioso piuttosto che nocivo all' efflusso; all' opposto di ciò che accade annestando alla detta luce de' tubi tortuosi e diritti (sp. 5.° e 8.°): fenomeno sorprendente, ma che a mio parere può chiaramente spiegarsi. Correndo l' acqua ne' canali non rinchiusa da ogni lato, come ne' tubi, le resistenze che incontra ne' primi vengono appunto compensate e vinte, per così dire, dallo stesso effetto di esse, ch' è quello di costrignerla a rigonfiarsi ed acquistare colla maggiore altezza la velocità che necessariamente dee perdere ne' secondi, cioè ne' tubi, ne' quali portandosi il rigurgito causato dalle resistenze fino alla superficie dell' acqua nella Conserva, viene da essa perciò espanto il di più che non può per essi effluire. Essendo poi maggiori le resistenze che soffre l' acqua nel Canale tortuoso, di quelle che soffre nel rettilineo, ed in conseguenza maggiore il rigonfiamento di essa nel primo, a segno tale che le stesse svolte la costringono a comporsi colla superficie convergente al fondo e non divergente come nel secondo, ne avviene che maggior sia il dispendio del canale tortuoso, di quello del canale rettilineo, e che inversamente accada riguardo a' tubi. Dalle fatte considerazioni, senza badare alle altre che potrebbero farsi sulle riferite sperienze, risulta pertanto, ch' è, come dissi da principio lo scopo principale di questa mia Memoria, essere ben differente il sistema dello scolo de' tubi addizionali da quello de' canali, pure adattati alla stessa luce laterale d' una Conserva, e che s' incorrerebbe in gravissimi errori, confondendosi o volendosi applicare i canoni, o le teorie che convenissero all' efflusso de' primi, a quello de' secondi egualmente. Mi lusingo inoltre che i fenomeni presentati dalle stesse sperienze sull' efflusso de' canali debbano eccitare, chi fosse provveduto de' mezzi, ad eseguirne in maggior numero e con maggiori dimensioni, coll'importante vista di confermare le leggi del sistema dell' acqua corrente ne' canali d' erogazione, somministrata ad essi da' recipienti, come da perenne Conserva, e pervenire anzi coll' introdurre, mediante conveniente apparecchio in canali rettilinei e tortuosi, una costante quantità d' acqua, ad iscoprire e decidere i fondamentali principj dell' Idraulica, da' quali dipende l'utile regolamento de' canali e fiumi naturali, sostenuti da Galileo nella celebre sua lettera sul fiume Bisenzio.

CONSIDERAZIONI

SU

DI UN PROBLEMA MECCANICO

Del Sig. Gioachino Pessuti

Ricevute il dì 9 Giugno 1806.

L'amicizia che sin dai più teneri anni, per analogia di studj, avea contratta col fu celebre Professor di Pavia e nostro Socio *P. D. Gregorio Fontana* delle Scuole Pie, di cui sarà sempre per me luttuosa la perdita, seguendo il lodevole stile de' sommi Geometri della passata età, era tra noi in distanza principalmente alimentata con frequenti problemi, che a vicenda ci proponevamo. Per pagare un tributo alla memoria di quell' impareggiabile Amico, voglio ora tra i molti scegliere, e riprodurre un antico *problema meccanico*, che egli mi propose, e che non mi sembra indegno dell' attenzione della Società nostra, tanto per se medesimo, quanto per l' estensione, che mi riuscì di dargli, e per i riflessi analitici, pe' quali mi porse occasione. Il Problema del P. *Fontana* fu questo:

In un Circolo, (Fig.^{a} 1^a) *il di cui piano sia normale all' orizzonte, avendo condotto il Diametro verticale* AD, *determinare partendo dal punto infimo* A, *l' arco* AEF, *la di cui corda* FA *potrebbe esser percorsa da un Grave, che per essa scendesse nello stesso tempo, che le due corde eguali* FE, EA *sottendenti le due metà dell' arco*.

Eccone la soluzione, che subito ne trovai, ed immediatamente comunicai al Proponente. Condotte le orizzontali EB, FC, e la verticale EG, e prolungate le CF, AE sinchè s' incontrino in H, facciasi il raggio del circolo $= 1$, ed AB seno verso di

AE chiamisi x. Sarà $\mathrm{OB} = \cos.\mathrm{AE} = 1 - x$, $\mathrm{BE} = \mathrm{sen}.\,\mathrm{AE} = \sqrt{2x - x^2}$; e quindi $\mathrm{OC} = \cos.2\mathrm{AE} = \cos.\overline{\mathrm{AE}}^2 - \mathrm{sen}.\,\overline{\mathrm{AE}}^2 = 1 - 4x + 2x^2$; $\mathrm{AC} = 4x - 2x^2$, e $\mathrm{BC} = \mathrm{EG} = 3x - 2x^2$. Si avrà inoltre $\mathrm{AE} = \mathrm{EF} = \sqrt{2x}$, ed . . . $\mathrm{AF} = \sqrt{8x - 4x^2}$:

Ora essendo il tempo della discesa di un Grave per un piano inclinato al tempo della caduta verticale per la sua altezza, come la lunghezza all'altezza del piano; se si esprimerà, siccome è permesso, il tempo della caduta verticale da una qualunque altezza colla radice quadrata di quest' altezza, il tempo della discesa per un qualunque piano inclinato sarà espresso dalla lunghezza del piano divisa per la radice quadrata dell' altezza di esso.

Indicando adunque per brevità colla lettera t il tempo della caduta di un Grave per una qualunque linea verticale, o inclinata, si avrà

$$\text{I.}^{\circ} \quad \ldots\; t.\mathrm{FE} = \frac{\mathrm{FE}}{\sqrt{\mathrm{EG}}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x - 2x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3 - 2x}}$$

Ed allo stesso modo sarà $t.\mathrm{EA} = \frac{\mathrm{EA}}{\sqrt{\mathrm{AB}}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}$

Ora dalle leggi Galileane si ha

$\sqrt{\mathrm{EA}} : \sqrt{\mathrm{HA}} = \sqrt{\mathrm{AB}} : \sqrt{\mathrm{AC}} = \sqrt{x} : \sqrt{4x - 2x^2} = 1 : \sqrt{4 - 2x} = t.\mathrm{EA} : t.\mathrm{HA} = \sqrt{2} : t$

$\sqrt{\mathrm{EA}} : \sqrt{\mathrm{HE}} = \sqrt{\mathrm{AB}} : \sqrt{\mathrm{BC}} = \sqrt{x} : \sqrt{3x - 2x^2} = 1 : \sqrt{3 - 2x} = t.\mathrm{EA} : t.\mathrm{HE} = \sqrt{2} : t$

Sarà dunque $t.\mathrm{HA} = \sqrt{8 - 4x}$, e $t.\mathrm{HE} = \sqrt{6 - 4x}$. Ora la differenza di $t.\mathrm{HA}$, e $t.\mathrm{HE}$ esprime appunto il tempo, che impiegherebbe un Grave a percorrere il piano EA, incominciando a discendervi dal punto E colla velocità acquistata per HE, ossia, il che è lo stesso, per FE. Indicando adunque questo secondo tempo sottoposto a questa condizione colla lettera t', avremo

$$\text{II.}^{\circ} \quad t'.\mathrm{EA} = t.\mathrm{HA} - t.\mathrm{HE} = \sqrt{8 - 4x} - \sqrt{6 - 4x}.$$

Finalmente si avrà allo stesso modo

$$\text{III.}^{\circ} \quad t.\mathrm{FA} = \frac{\mathrm{FA}}{\sqrt{\mathrm{AC}}} = \frac{\sqrt{8x - 4x^2}}{\sqrt{4x - 2x^2}} = \sqrt{2}.$$

Ma per condizione del Problema dev' essere

$$t.\mathrm{FA} = t.\mathrm{FE} + t'.\mathrm{EA}$$

Si avrà dunque l' equazione

$\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x}} + \sqrt{8-4x} - \sqrt{6-4x}$$

ovvero

$$\sqrt{3-2x} = \sqrt{12-14x+4x^2} - 2 + 2x$$

ovvero innalzando al quadrato, e riducendo

$$20x - 8x^2 - 13 = (4x - 4) \cdot \sqrt{12 - 14x + 4x^2}$$

d' onde innalzando di nuovo al quadrato, e fatte le debite riduzioni, se ne otterrà l' equazione cubica.

$$32x^3 - 96x^2 + 88x - 23 = 0$$

la quale dividendo per 4, e fatta $2x = z$, si convertirà nell' altra

$$z^3 - 6z^2 + 11z - \frac{23}{4} = 0$$

e tolto il secondo termine col fare $z = u + 2$, in quest' altra

$$u^3 - u + 0,25 = 0$$

Le radici di quest' equazione sono tutte tre reali, due positive, ed una negativa, le quali con una prima sufficiente approssimazione si trovano essere 0,8374, 0,2698, — 1,1072. Quindi $x = \frac{u+2}{2} = AB$, cioè il seno verso della metà dell' arco cercato AEF avrà anche tre valori, i quali prossimamente saranno 1,4187, 1,1349, 0,5536, ai quali prossimamente corrispondono gli archi di 114° 45', 97° 45', 56° 23'. Saranno dunque gli archi cercati AEF (*Fig.* 2.ª 3.ª 4.ª) di 229° 30', 195'' 30', 112° 46', cioè un Grave, nella posizione verticale del circolo, e del suo diametro AD, potrà percorrere le loro corde FA nel medesimo tempo, che la somma delle corde delle loro metà FE, EA. Siccome però le corde FE della prima metà s' inclinano dalla parte opposta delle seconde EA, perchè il Problema potesse avere il suo effetto, bisognerebbe supporre un tubo aperto da ambe le parti nella situazione FE, lungo il quale scorresse il Grave per quindi sboccare nel piano inclinato ΞA.

Soddisfeci così al Problema del P. *Fontana*, non soddisfeci però ancora a me stesso. E primieramente vidi, che il Problema doveva, e poteva esser generalizzato, portandolo a cercare quell arco, la di cui corda AF nella posizione verticale del Circolo, e del diametro AD potesse esser percorsa da un Grave nello stesso tempo, che la somma delle corde sottendenti le parti n^{sime} dell' arco stesso. Trovai diffatti, che il mio metodo era facilmente suscettibile di questa generalizzazione, che comunicai tosto al P. *Fontana*, il quale ne rimase altamente maravigliato, non credendola quasi possibile, forse perchè il metodo, che Egli avea seguito, non così agevolmente vi si potea adattare. Per vedere la possibilità di questa generalizzazione, seguendo il mio metodo, basterà risolvere col medesimo il caso dell' arco diviso in tre parti eguali, che si presenta dopo quello proposto dal P. *Fontana*, poichè da questo si renderà sempre più manifesto il modo di passare alla risoluzione di tutti gli altri casi. Sia dunque il problema:

Nella solita posizione verticale del circolo, e del suo diametro AD (Fig.ª 5.ª) *determinare quell' arco* AEFG, *la di cui corda* IA *potrebbe esser percorsa da un Grave discendente per essa nel medesimo tempo, che la somma delle tre corde* IF, FE, EA, *sottendenti ciascuna la terza parte del detto arco.*

Supposta la costruzione, che la figura bastantemente manifesta, facciasi come prima il raggio del circolo $=1$, AB seno verso di $AE=x$; si avrà come nell' antecedente problema $OB=\cos.AE$ $=1-x$, $BE=\text{sen}.AE\ldots=\sqrt{2x-x^2}$; $AC=4x-2x^2$, $BC=EG=3x-2x^2$, ed $AE=EF=FI=\sqrt{2x}$. Quindi $OC=\cos.2AE$ $=1-4x+2x^2$, $CF=\text{sen}.2AE=2\text{sen}.AE.\cos.AE\ldots\ldots\ldots$ $=(2-2x).\sqrt{2x-x^2}$, $OK=\cos.3AE=\cos.2AE.\cos AE-\text{sen}.2AE\times$ $\text{sen}.AE\ldots=1-9x+12x^2-4x^3$; d'onde AK sen. verso $3AE$ $=9x-12x^2+4x^3$, $BK\ldots=EL=AK-AB=8x-12x^2+4x^3$, e $CK=FM=AK-AC=\ldots5x-10x^2+4x^3$. Seguiteremo poi ad indicare colla lettera t il tempo impiegato da un Grave per discendere per un qualunque piano, o da una qualunque altezza partendo dalla quiete; colla lettera t' il tempo impiegato nella discesa per FE, per cui il Grave abbia incominciato a muoversi colla velocità acquistata per IF, ovvero per NF, ed adopereremo inoltre la lettera t'' per contrassegnare il tempo impiegato nella discesa per il piano EA incominciando a descrivere questo piano il Grave colla velocità acquistata nella discesa per HE, ovvero per NE, ovvero per IFE . Ciò presupposto avremo

$$\text{I.}^\circ\ t.\text{IF} = \frac{\text{IF}}{\sqrt{\text{FM}}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{5x-10x^2+4x^3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-10x+4x^2}}\ .$$

Ed allo stesso modo sarà $t.\text{FE} = \frac{\text{FE}}{\sqrt{\text{EG}}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x-2x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x}}$.

Ma deve stare

$$\sqrt{\text{FE}}:\sqrt{\text{NE}}=\sqrt{\text{BC}}:\sqrt{\text{BK}}=\sqrt{3x-2x^2}:\sqrt{8x-12x^2+4x^3}=\sqrt{3-2x}$$
$$:\sqrt{8-12x+4x^2}=t.\text{FE}:t.\text{NE}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x}}:t.\text{NE}\ ;$$ e similmente
$$\sqrt{\text{FE}}:\sqrt{\text{NF}}=\sqrt{\text{BC}}:\sqrt{\text{CK}}=\sqrt{3x-2x^2}:\sqrt{5x-10x^2+4x^3}=\sqrt{3-2x}$$
$$:\sqrt{5-10x+4x^2}=t.\text{FE}:t.\text{NF}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x}}\ :t.\text{NF}$$

Dunque

$$t.\text{NE}=\frac{\sqrt{16-24x+8x^2}}{3-2x}\ ;\ t.\text{NF}=\frac{\sqrt{10-20x+8x^2}}{3-2x}$$

epperò $t.\text{NE}-t.\text{NF}$, cioè

$$\text{II.}^\circ\ t'.\text{FE}=\frac{\sqrt{16-24x+8x^2}-\sqrt{10-20x+8x^2}}{3-2x}$$

All' istesso modo sarà $t.\text{EA}=\frac{\text{AE}}{\sqrt{\text{AB}}}=\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}$; e dovrà poi stare

$$\sqrt{\text{EA}}:\sqrt{\text{HA}}=\sqrt{\text{AB}}:\sqrt{\text{AK}}=\sqrt{x}:\sqrt{9x-12x^2+4x^3}=1:\sqrt{9-12x+4x^2}$$
$$=t.\text{EA}:t.\text{HA}=\sqrt{2}:t.\text{HA}\ ;$$

e similmente

$$\sqrt{\text{EA}}:\sqrt{\text{HE}}=\sqrt{\text{AB}}:\sqrt{\text{BK}}=\sqrt{x}:\sqrt{8x-12x^2+4x^3}=1:\sqrt{8-12x+4x^2}$$
$$=t.\text{EA}:t.\text{HE}=\sqrt{2}\ :\ t.\text{HE}$$

Dunque $t.\text{HA}=\sqrt{18-24x+8x^2}$; $t.\text{HE}=\sqrt{16-24x+8x^2}$; epperò $t.\text{HA}-t.\text{HE}$; cioè

$$\text{III.}^\circ\ t''.\text{EA}=\sqrt{18-24x+8x^2}-\sqrt{16-24x+8x^2}$$

Finalmente si avrà allo stesso modo

IV.° $t.\mathrm{IA} = \frac{\mathrm{IA}}{\sqrt{\mathrm{AK}}} = \frac{\sqrt{2.\mathrm{AK}.}}{\sqrt{\mathrm{AK}}} = \sqrt{2}.$

Ma dev' essere per condizione del problema

$$t.\mathrm{IA} = t.\mathrm{IF} + t'.\mathrm{FE} + t''.\mathrm{EA}$$

Si avrà dunque l' equazione

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-10x+4x^2}} + \frac{\sqrt{16-24x+8x^2}-\sqrt{10-20x+8x^2}}{3-2x} + \sqrt{18-24x+8x^2}$$
$$-\sqrt{10-24x+8x^2}$$

ovvero dividendo per $\sqrt{2}$, e togliendo le frazioni, e riducendo $(3-2x).\sqrt{5-10x+4x^2} = -2+8x-4x^2+(3-2x).\sqrt{5-10x+4x^2}.\times$ $\sqrt{9-12x+4x^2} - (2-2x).\sqrt{8-12x+4x^2}.\sqrt{5-10x+4x^2}.$ cioè mettendo $3-2x$ in luogo di $\sqrt{9-12x+4x^2}$, e di nuovo riducendo, $2-8x+4x^2 = (6-10x+4x^2).\sqrt{5-10x+4x^2} -$ $(2-2x).\sqrt{16x^4-88x^3+172x^2-140x+40}.$

Da quest' equazione liberata dai radicali se ne otterrà una razionale del decimo grado, le di cui radici, perchè soddisfacciano al problema, dovranno essere, com' è evidente, reali, positive, e minori di 2, cioè del diametro AD. Il 2 è diffatti una di queste radici, ed era facile di antivedere, che questo numero, cioè il diametro AD soddisfaceva in qualche modo al problema; dappoichè figurandosi l' arco AFDQAID composto dei tre semicircoli AID, DQA, AID, il tempo della discesa per la corda del secondo Arco AQD, ch' è veramente una salita, dovrà considerarsi come un tempo negativo, onde avrassi in realtà $t.\mathrm{AD} - t.\mathrm{AD} + t.\mathrm{AD} = t.\mathrm{AD}$, cioè il tempo della discesa per le corde de' tre archi eguali consecutivi DIA, AQD, DIA eguale al tempo della discesa per la corda AD della loro somma DIAQDIA.

Ma oltre di quest' inutile, od illusoria soluzione, considerando l' ultima equazione come l' abbiam riferita, e senza aver l' incomodo di liberarla dall' irrazionalità, con un metodo semplicissimo (*) abbiam trovato, che ad essa prossimamente soddisfa $x = \mathrm{AB}$ =

(*) Intendiam parlare di un metodo dato senza dimostrazione da *Simpson*, e che Noi ci proponghiamo di brevemente dimostrare, e dilucidare nella *Memoria*, che siegue.

$t.A=0,1947$, d'onde deducesi $OB=\cos.AE=0,8053$, $AE=36^\circ\,22'$, e l' arco cercato $AEFI = 109^\circ\,6'$ (Fig.^{a} 6.^{a}) .

Dalla soluzione de' due precedenti problemi risulta intanto evidentemente, che il nostro metodo non si limita solamente al caso proposto dal P. *Fontana*, ma che può generalmente, e facilmente estendersi alla ricerca di un arco, la di cui corda debba percorrersi nello stesso tempo, che la somma delle corde di tutte le parti eguali di qualunque denominazione, in cui si può intender diviso quest' arco. Tolta però questa prima limitazione al problema del P. *Fontana*, un' altra ne rimaneva a togliere, molto più radicale, ed importante. Si assumeva in quel problema, che un Grave nel passare da un piano ad un altro diversamente inclinato, tutta conservasse la velocità acquistata nella discesa pel primo, ciò che credette *Galileo*, ma che dimostrò poi facilmente esser falso il *Varignon*, facendo vedere, che in quel passaggio la velocità acquistata si scema in ragione del raggio al coseno dell' angolo, che fa un piano coll' altro. Ora egli è evidente, che attendendosi questa reale diminuzione di velocità nel passaggio dall' uno all' altro piano, la soluzione de' precedenti problemi sarà molto diversa da quella, che abbiam ritrovata. Intrapresi pertanto di togliere anche questa seconda limitazione, e basterà di esemplificare il metodo, che mi ci condusse nel caso stesso più semplice proposto dal P. *Fontana*, cioè della ricerca dell' arco, la di cui corda si percorre nello stesso tempo, che la somma delle corde delle due sue metà: sia dunque il terzo problema.

Supponendo la solita posizione verticale tanto del Circolo, che del suo diametro AD, (Fig.^{a} 7.^{a}) *determinare quell' arco* AEF, *la di cui corda* FA *sarebbe percorsa da un Grave nello stesso tempo, che la somma delle corde delle due sue metà* FE, EA, *avendo riguardo a quella perdita della velocità, che deve fare il Grave nel passare dalla prima di queste corde* FE *nella seconda* EA .

Fatto, come prima, il raggio del Circolo $= 1$, ed AB seno verso di $AE=x$, sarà pur come prima OB coseno di $AE=1-x$, $BC=3x-2x^2$, ed $AE=EF=\sqrt{2x}$. Sopra di AE prolungata si conduca ora la normale FG, e da G sopra di EF la normale GH, e per il punto H si faccia passare l' orizzontale IHL, sarà $EG = EF.\cos.FEG = EF.\cos.AE = (1-x).\sqrt{2x}$, ed $EH = EG\cos.HEG = EG.\cos.AE = (1-x)^2.\sqrt{2x}$; e siccome

$$EF:EH = BC:BI\text{, cioè}$$

$$\sqrt{2x}:(1-x)^2.\sqrt{2x} = 3x-2x^2:BI$$

sarà perciò $BI = (1-x)^2.(3x-2x^2)$.

Ora per il Teorema di *Varignon* la velocità, che acquista il Grave scendendo per la prima corda FE, allorchè passa nella seconda corda EA, si scema in ragione di EF:EG, ossia in ragione di $\sqrt{EF}:\sqrt{EH}$, cioè in ragione della velocità, che si potrebbe acquistare scendendo per FE a quella, che si acquisterebbe scendendo per HE. Quindi la velocità diminuita, colla quale il Grave dopo di aver percorsa la prima corda FE, incomincia a descriver la seconda EA, è quella, che esso acquisterebbe scendendo per HE, ossia, il ch' è lo stesso, per LE, cioè il Grave descrive la seconda corda EA come se vi giugnesse partendo da L per il piano LEA. Per trovar dunque il tempo, che v' impiega, che seguiteremo a contrassegnare colla lettera t', bisognerà, come prima, determinare la differenza de' tempi impiegati da un Grave nel percorrere i piani LA, ed LE.

Ora $t.EA$ sarà, come ne' due precedenti problemi, $= \sqrt{2}$, e si avrà poi

$$\sqrt{EA}:\sqrt{LA} = \sqrt{AB}:\sqrt{AB+BI} = \sqrt{x}:\sqrt{x+(1-x)^2.(3x-2x^2)} = t.EA:t.LE = \sqrt{2}:t.LE$$

$$\sqrt{EA}:\sqrt{LE} = \sqrt{AB}:\sqrt{BI} = \sqrt{x}:\sqrt{(1-x)^2.(3x-2x^2)} = t.EA:t.LE = \sqrt{2}:t.LE$$

epperò $t.LA = \sqrt{2+(1-x)^2.(6-4x)}$; $t.LE = \sqrt{(1-x)^2.(6-4x)}$.

Quindi $t.LA - t.LE$, cioè

$$t'.EA = \sqrt{2+(1-x)^2.(6-4x)} - \sqrt{(1-x)^2.(6-4x)}.$$

Essendo pertanto, come nel problema primo $t.FE = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x}}$, e $t.FA = \sqrt{2}$, e dovendo essere $t.FA = t.FE + t'.EA$, si avrà perciò l' equazione

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x}} + \sqrt{2+(1-x)^2.(6-4x)} - \sqrt{(1-x)^2.(6-4x)}.$$

Dividendola per $\sqrt{2}$, liberandola dalle frazioni, e fatte le debite riduzioni, se ne otterrà

$$\sqrt{3-2x}=\sqrt{3-2x+(1-x)^4\cdot(3-2x)^2}-2+5x-2x^2$$

donde innalzando al quadrato, e riducendo, si avrà

$$13-50x+70x^2-40x^3+8x^4= \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots (4-10x+4x^2)\cdot\sqrt{12-32x+37x^2-20x^3+4x^4},$$

ed innalzando di nuovo al quadrato ne risulterà finalmente l'equazione del quinto grado

$$32x^5-192x^4+424x^3-416x^2+172x-23=0$$

ovvero fatta $2x=z$

$$z^5-12z^4+53z^3-104z^2+86z-23=0$$

Nè potranno soddisfare al problema di cui si tratta se non che i valori reali di x, che saranno positivi, e minori di 2, ovvero quei di z minori di 4. Tentando pertanto per z i numeri 1,2,3 4, si troveranno agevolmente per esso i limiti 0, ed 1, che con egual facilità si ristringeranno a 0,5, e 0,6; d'onde poi col metodo, che ho accennato nell'antecedente problema ne ricavo molto prossimamente $z=0{,}50583$, e quindi $x=\frac{z}{2}=0{,}25292$.

L'unico arco pertanto AEF, che soddisfa all'attual problema è quello, la di cui metà AE ha per seno verso $AB=x=0{,}25292$, ossia per coseno $OB=1-x=0{,}74708$. Sarà dunque prossimamente $AE=41°40'$, ed $AEF=83°20'$; ed è da notarsi, che nell'ipotesi dell'attual problema, ch'è la vera, e quella della natura, le due corde AE, EF risultano inclinate dalla medesima parte, epperò meglio soddisfanno alla letterale enunciazione del problema, di quel che accadesse nella falsa ipotesi de' due problemi precedenti.

Mi si permetta ancora un'ultima considerazione su di questo problema, già forse divenuto soverchiamente lungo per la sua poca, o niuna reale importanza. Più sarà grande il numero delle parti, in cui dovrà dividersi l'arco cercato, più la somma delle corde di queste parti sembra, che dovrà accostarsi ad eguagliare la lunghezza dell'arco medesimo, cioè sembra, che quest' arco dovrà sempre più accostarsi a quell' arco, che sarebbe percorso nel medesimo tempo, che la sua corda, e che sarà in certo modo il *limite* degli archi corrispondenti alle successive divisioni in un numero di parti sempre più, e più grande. Parrebbe adunque a primo aspetto, che dovesse esservi un arco, che potrebbe esser percorso da un Grave nel medesimo tempo, che la sua corda. Diciamo *parrebbe a primo aspetto*, perchè il discorso potrebbe esser fallace, attesa l' indole *rivolutiva* del circolo, la quale permette di concepire un arco quanto si sia grande compreso tra due estremi, e diviso in un qualunque grandissimo numero di parti di grandezza finita, e la somma delle di cui corde in conseguenza è ben lontana dall' eguagliare la lunghezza dell' arco.

Diffatti, siccome si dimostrò per il caso della divisione dell' arco in tre parti, così potrà generalmente dimostrarsi per la divisione in un qualunque, e quanto si voglia grande numero impari $2n+1$ di parti, che al problema dovrà soddisfare l' aggregato di $2n+1$ semicircoli essendo ciascuno di essi una delle parti, in cui tutto l' arco rimane diviso, dappoichè, come per il caso di tre parti, si avrà anche per $2n+1$ parti $t.AD - t.AD + t.AD - t.AD + \text{ec.} \ldots . + t.AD = t.AD$. E siccome anche le altre soluzioni del problema, egualmente che questa, potranno pur dare archi finiti per i valori delle parti dell' arco cercato, non si potrà però assumere, che la somma delle corde di queste parti sempre più si accosti ad eguagliar l' arco cercato; onde vacilla la dimostrazione su di quest' ipotesi fondata dell' esistenza di un arco circolare, che potrà da un Grave percorrersi nello stesso tempo, che la sua corda. E quando anche la dimostrazione reggesse, come si potrebbe poi determinare quest' arco?

Per compire adunque questa dimostrazione, e giugnere alla risoluzione dell' ennunciato problema, fa duopo ricordarsi, ch' essendo x il seno verso AB di un arco AE, 1 il raggio, π la mezza circonferenza, e denotando, come prima, il tempo della caduta verticale da un' altezza qualunque per la radice quadrata di quest' altezza, il tempo della discesa per il detto arco AE viene espresso da questa formola

$$t.\mathrm{AE} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{x^2}{2^2} + \frac{1.3^2.5^2}{1^2.4^2.6^2} \cdot \frac{x^3}{2^3} + \text{ec.}\right)$$

Ora questa formola ci manifesta. 1° Che il tempo della discesa per un qualunque arco circolare è tanto maggiore, quanto è più grande il suo seno verso x, ossia l' arco stesso. 2°. Ch' essendo il tempo della discesa per il diametro verticale, e per qualunque corda $= \sqrt{2}$, sarà il tempo della discesa per un qualunque arco a quello della discesa per la sua corda come

$1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{x^2}{2^2} + \frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{x^3}{2^3} + \text{ec.}$ a $\frac{4}{\pi}$, cioè prossimamente ad 1,2732. 3°. Ch' essendo 0, e 2 i limiti di x corrispondenti all' arco evanescente, e all' arco semicircolare, il tempo della discesa per il primo a quello della discesa per la sua corda, o per il diametro, sarà prossimamente come 1 : 1,2732, cioè il tempo della discesa per un piccolissimo arco sarà minore di quello per la sua corda prossimamente nell' anzidetta ragione; mentre il tempo della discesa per un arco, cioè per un tubo semicircolare starà a quello della discesa per il diametro come

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1.3^2}{2^2.4^2} + \frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \text{ec.}$ ad 1,2732, cioè valutando in decimali i soli termini, che abbiamo scritto, prossimamente come 1,4882 ad 1,2732, vale a dire il tempo della discesa per l' arco semicircolare maggiore di quello per la sua corda.

Essendo pertanto il tempo per l' arco evanescente minore di quello per il diametro, e quello per l' arco, o tubo semicircolare maggiore, e dovendo questo tempo nel passaggio dall' uno all' altro arco divenir sempre più, e più grande, si potrà ora con sicurezza conchiudere, che tra i due uno ve ne dovrà essere, in cui il tempo della discesa di un Grave sarebbe eguale a quello della discesa per il diametro, ossia per la corda di quell' arco. Per determinare quest' arco bisognerà eguagliare tra loro l' espressioni de' due tempi, ossia risolvere l' equazione

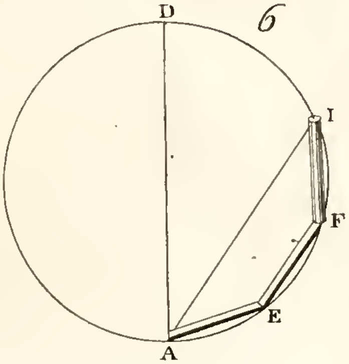
$$1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{x^2}{2^2} + \frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{x^3}{2^3} + \text{ec.} = \frac{4}{\pi} = 1{,}2732 \text{ ec.}$$

Siccome i coefficienti de' termini del primo membro divengono sempre più, e più piccoli, e che x dev' esser necessariamente compreso tra i limiti 0 e 2, potrem contentarci per una prima approssimazione, la quale se piace, si potrà portare quanto si vuole più oltre, di considerare i soli termini, che abbiamo scritti; e valutando in decimali i suddetti coefficienti, si avrà l' equazione cubica

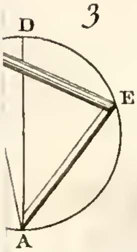
$$0{,}0122x^3 + 0{,}0351x^2 + 0{,}125x - 0{,}2732 = 0$$

Sostituendo 1 e 2 in luogo di x si trovano due risultati di segno contrario, onde il valore di x dovrà esser compreso tra quei due limiti; e difatti usando il metodo di sopra indicato trovo prossimamente $x = 1{,}4352$. Il seno verso adunque dell' arco cercato AEF, il quale si percorrerebbe da un Grave nello stesso tempo, che la sua corda FA, sarà prossimamente $= 1{,}4352$, a cui corrisponde AEF prossimamente $= 115° \, 48'$. (Fig.ª 8.ª) *emoria I.*

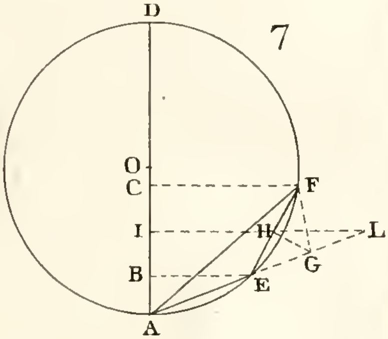
6



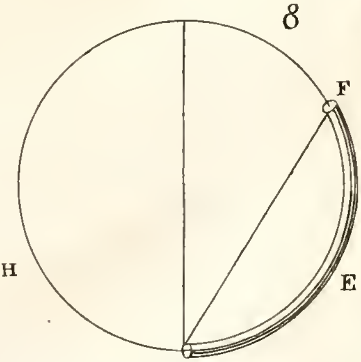
3

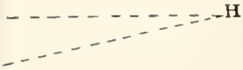


7


D
O
C
F
I
H
L
G
B
E
A

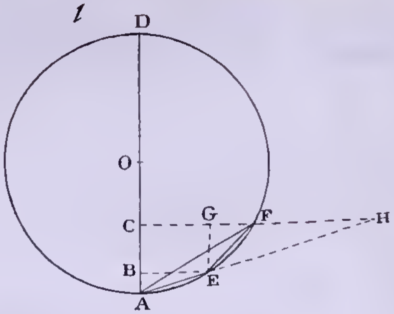
8



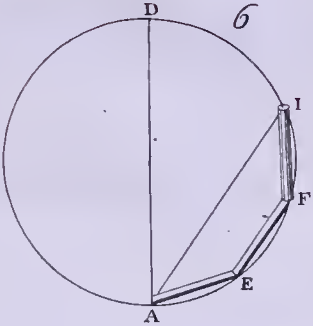


Memoria I.

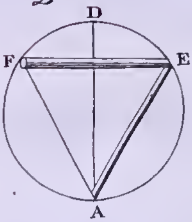
1



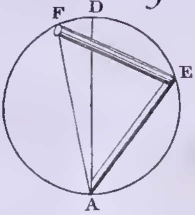
6



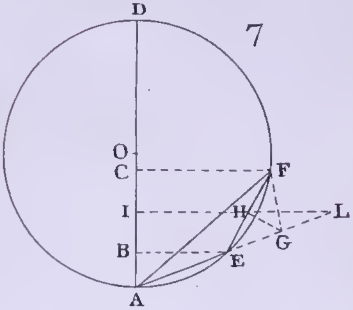
2



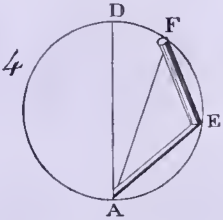
3



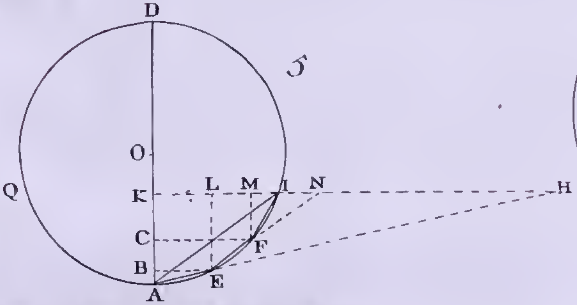
7


D
O
C
F
I
H
L
B
G
E
A

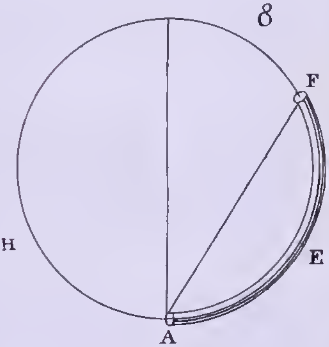
4



5


D
O
Q
K
L
M
I
N
H
C
F
B
E
A

8



SOPRA
UN METODO DI APPROSSIMAZIONE PROPOSTO SENZA DIMOSTRAZIONE DA *SIMPSON* PER LA RISOLUZIONE NUMERICA DI OGNI SPECIE DI EQUAZIONI

MEMORIA

Del Sig. Gioachino Pessuti

Ricevuta il dì 9 Giugno 1806 .

La teoria della risoluzione numerica delle equazioni algebraiche di qualunque grado fu creata , per così dire , come tanti altri rami di sublime analisi, dal sommo Geometra Sig. *Lagrange* , il quale sembra essersene egli stesso cotanto , e meritamente compiaciuto, che dopo di averla esposta in due lunghe *Memorie* della R. Acad. di Berlino per gli anni 1767 , e 1768, tornò poi a riprodurla sette , od otto anni indietro a Parigi , corredandola d'interessantissime note, ed addizioni. I lavori posteriori del nostro dotto Collega il Sig. Prof. *Ruffini* e del Sig. *Abbati*, a buon diritto coronati dalla nostra Società , aggiunsero poi certamente molta perfezione , e facilità di uso alle scoperte del Geometra Piemontese . Non si può però negare , che il metodo luminosissimo , e soddisfacentissimo in teoria , riesce poi assai lungo , e penoso in pratica , e massime se l' equazione del problema sia ingombra da' radicali; nel qual caso bisogna far la fatica di liberarnela per giungere per lo più ad equazioni di altissimo grado , epperò di difficilissimo maneggio ; ovvero che in vece di una vi sieno più incognite , nel qual caso , per applicare il metodo, bisogna assoggettarsi al nojoso lavoro dell' eliminazione . Il metodo poi del Sig. *Lagrange* a nulla giova per la risoluzione numerica delle equazioni trascendenti .

Sarebbe dunque a desiderarsi un metodo per l' uso, e per l' applicazione più comodo, il quale prendendo le equazioni tali quali si presentano nella soluzione di un problema, sieno esse razionali, od irrazionali, algebraiche, o trascendenti, ad una, o più incognite, ne insegnasse in ogni caso per via facile, e spedita a ritrovarne una quanto si voglia approssimante risoluzione. Ed un tal metodo appunto, senza però dimostrarlo, ha dato prima della metà del passato secolo il celebre Geometra Inglese *Tommaso Simpson* nella sua Opera intitolata: *Essays on several curious and useful subjects in speculative and mix'd Matematicks, illustrated by a variety of examples. London* 1740 *in* 4.° In quest' Opera pertanto (*pag.* 81) si legge una breve memoria, che ha per titolo; *A new method for the solution of equations in numbers*. Distinguendo l' autore due casi, espone letteralmente il suo metodo come segue

CASO I.°

Quando è data una sola equazione, e vi è una sola quantità x da determinarsi.

Prendasi il differenziale della data equazione, sia essa qualsivoglia, riguardando l' incognita x *come una variabile, e dividendo per* dx, *il risultato chiamisi* A. *Si assuma quindi un valore di* x *quanto più si può prossimo al vero, e questo si sostituisca tanto nella proposta equazione, quanto nel risultato* A. *Si avranno così due numeri, il primo de' quali diviso per il secondo darà un quoziente, che essendo sottratto dal valore assunto per* x, *ne somministrerà un nuovo valore molto più vicino al vero del primo. Da questo secondo valore all' istesso modo si procederà a ricercarne un terzo, e quindi un quarto ec., sinchè si giunga a quel grado di accuratezza, che più si brama.*

CA-

CASO II.°

Quando sono date due equazioni, e due quantità x, ed y da determinarsi per mezzo di esse.

Si prenda il differenziale di entrambe le equazioni, riguardando x, *ed* y *come variabili, e chiamisi* A *il coefficiente di* dx *nella prima*, B *quello di* dy, *e similmente nella seconda chiamisi* a *il coefficiente di* dx, b *quello di* dy. *Si assumano quindi per* x, *ed* y *due valori quanto più si può prossimi al vero, e questi sostituiti nelle due proposte equazioni supponghiamo che invece di renderle eguali a zero, dieno due risultati positivi, o negativi, che denoteremo rispettivamente colle lettere* R, *ed* r. *Si sostituiscano parimenti i valori assunti per* x, *ed* y *ne' quattro coefficienti* A, B, a, b; *e convertendo in numeri le quantità* $\frac{Br-bR}{Ab-aB}$, $\frac{aR-Ar}{Ab-aB}$, *ed aggiungendole agli assunti valori di* x, *ed* y, *si avranno due nuovi valori di queste quantità molto più prossimi al vero de' primi; e si renderanno poi anche sempre più prossimi, e quanto si desidera, ripetendo quanto occorre la medesima operazione.*

NOTA 1.° *Che le equazioni su di cui si opera, si suppongono ridotte ad aver zero nel secondo membro per mezzo della trasposizione.*

2.° *Che se dopo la prima operazione i valori di* x, *o di* y *non danno risultati così prossimi al vero come i valori assunti, ciò sarà un indizio, che questi non si sono assunti a dovere, onde non andranno attesi, e bisognerà ricominciare da capo l' operazione.*

3.° *Che, generalmente parlando, il metodo proposto quando i valori assunti per* x, *ed* y *sieno bastantemente vicini ai veri, in ogni operazione raddoppia il numero delle decimali esatte, e sicure; e procede lentamente soltanto l' approssimazione nel caso, che i divisori* A, *ed* $Ab-aB$ *sieno molto piccoli, e convergenti verso lo zero.*

Queste sono le due regole prescritte da *Simpson*, che egli poi esemplifica in varie equazioni di ogni specie, senza darsi però verun carico di dimostrarle. Ecco dunque la dimostrazione, che ne trovammo moltissimi anni addietro, allorchè c' imbattemmo a leggerle per la prima volta.

Dimostrazione della regola per il I.° CASO, *allorchè cioè si ha una sola incognita ed una sola equazione.*

Abbiasi $F.x=0$, intendendo per $F.x$ una qualunque funzione di x. Se supporremo $y=F.x$, avremo l' equazione di una curva RMN (*Fig.ª* 1.ª) riferita alle coordinate $AP=x$, $PM=y$, la quale in qualunque de' punti N ov' essa taglia l' asse delle ascisse, e dove in conseguenza $y=0$, darà $F.x=0$, cosicchè AN sarà uno de' cercati valori di x, che risolve la proposta equazione $F.x=0$. Supponghiamo ora, che si conosca un valore AP di x molto prossimo ad AN, il quale cioè prossimamente soddisfaccia all' equazione $F.x=0$, con un piccolo errore, che chiameremo E, cosicchè sia $F.AP=E$. Siccome per ipotesi dev' essere anche $F.AP=PM$, sarà perciò $E=PM$. Si differenzj ora l' equazione della curva $y=F.x$; e rappresentando al solito modo con $dxF'.x$ il differenziale di $F.x$, avremo $\frac{dy}{dx}=F'.x$, ed in M ove $x=AP$, sarà $\frac{dy}{dx}=F'.AP$, cioè sarà $\frac{dy}{dx}$ eguale al differenziale di $F.x$ diviso per dx, ponendo poscia nel quoziente AP in vece di x, cioè sarà $\frac{dy}{dx}$ eguale a ciò che il N. A. chiama A. Ma condotta la Tangente MS, si ha anche $\frac{dy}{dx}=\frac{PM}{PS}$, ossia perchè supponesi il punto P molto prossimo ad N, e perciò l' archetto MN quasi rettilineo, si ha prossimamente $\frac{dy}{dx}=\frac{PM}{PN}$. Sostituendo adunque in luogo di $\frac{dy}{dx}$, e PM i loro valori, cioè A, ed E, sarà finalmente . . .

A =

$A = \frac{E}{PN}$, e quindi $PN = \frac{E}{A}$; vale a dire, che dal valore AP assunto per x bisognerà sottrarre $\frac{E}{A}$ per avere più prossimamente la AN, che soddisfà alla proposta equazione $F.x=0$; ciò che doveva in primo luogo dimostrarsi.

Dimostrazione della regola per il II.° CASO, *allorchè cioè si hanno due equazioni e due incognite da determinarsi per mezzo di esse.*

Rappresentinsi le due date equazioni per $F.(x,y)=0$, $f.(x,y)=0$; intendendo per $F.(x,y)$, $f(x,y)$ due quali si sieno date funzioni di x, ed y. Possiam supporre, che queste due equazioni sieno quelle di due curve NVM, LXM (*Fig.*ª 2.ª) riferite ad un comune asse delle ascisse AP, ed allora il punto, o i punti M, in cui queste due curve s'intersecano, saranno quelli, in cui le due equazioni insieme si verificano, cioè le coordinate AP, PM di questo, o di questi punti saranno quei valori di x, ed y, che si cercano, i quali rendono allo stesso tempo $F.(x,y)=0$, $f.(x,y)=0$. Supponghiamo ora, che siensi già trovati due valori AQ, QS di x, ed y molto prossimi ad AP, PM, ed i quali in conseguenza con due piccoli errori, che il N. A. chiama R, ed r, soddisfanno alle proposte equazioni $F.(x,y)=0$, $f.(x,y)=0$, cosicchè $F.(AQ, QS) = R$, e $f.(AQ, QS)=r$. Si potrà dunque senza grave errore considerare il punto S come infinitamente prossimo a PM, e come posto sopra entrambe le curve NVM, LXM.

Condotta adunque ST parallela ad AP, si potranno riguardare ST, TM come i differenziali tanto delle due coordinate AQ, QU della curva AUM, quanto delle due coordinate AQ, QX della curva LXM.

Si differenzino ora le due espressioni $F.(x,y)$, $f.(x,y)$, e rappresentando i loro differenziali per rapporto ad x con $dxF'.(x,y)$, $dxf'.(x,y)$, e quelli presi per rapporto ad y con $dyF.1(x,y)$ $dyf.1(x,y)$, per i punti U, ed X delle due curve, che, come abbiam detto, si confondono prossimamente col punto S, si avrà

$$(1) \;.\;.\;.\; d.F(x,y) = d.F.(AQ,QU) = dxF'.(x,y) + dyF.1(x,y) = ST.F'.(AQ,QS) + MT.F.1(AQ,QS)$$

$$(2) \;.\;.\;.\; d.f.(x,y) = d.f.(AQ,QX) = dxf'.(x,y) + dyf.1(x,y) = ST.f'.(AQ,QS) + MT.f.1(AQ,QS)$$

Ora $d\,F.(AQ,QU) = F.(AP,PM) - F.(AQ,QU) = -F.(AQ,QS)$ prossimamente, dovendo essere per ipotesi $F(AP,PM) = 0$, ed essendo QU prossimamente $=$ QS. Avendo dunque veduto, che $F.(AQ,QS) = R$, si avrà $d.F.(AQ,QU) = -R$. Allo stesso modo si proverà, che $d.f.(AQ,QX) = -r$.

Inoltre $F'.(AQ, QS)$, $f'.(AQ, QS)$ rappresentano i differenziali di $F.(x,y)$, $f.(x,y)$ presi per rapporto ad x, e ne' quali, dopo di averli divisi per dx, si mette AQ, QS in vece di x, ed y, le quali quantità l'Au: chiama A, ed a; e similmente . . . . $F.1(AQ, QS)$, $f.1(AQ,QS)$ rappresentano quelle quantità, che l'Au: chiama B, e b.

Sostituendo pertanto questi valori, le due equazioni (1), e (2), che abbiam trovate qui sopra, diverranno

$$-R = A.ST + B.MT\,; \quad -r = a.ST + b.MT$$

dalle quali facilmente si dedurrà

$$ST = \frac{Br - bR}{Ab - aB}\,; \quad MT = \frac{aR - Ar}{Ab - aB}$$

cioè, che i valori da aggiungersi ad AQ, QS, che si sono alla prima assunti per x, ed y sono $QP = ST = \frac{Br - bR}{Ab - aB}$, ed $MT = \frac{aR - Ar}{Ab - aB}$, per avere più prossimamente AP, PM, cioè i valori di x, ed y, che insieme soddisfanno alle due proposte equazioni $F.(x,y) = 0$, $f.(x,y) = 0$; ciò, che doveva in secondo luogo dimostrarsi.

Sono queste le dimostrazioni, che moltissimi anni addietro ritrovammo di queste regole date senza dimostrazione da *Simpson*, allorchè le leggemmo per la prima volta. Ci sembrano esse assai semplici, ed elementari, e che non superino la capacità, ed intelligenza degli appena iniziati nel calcolo differenziale, ai quali può esser utile l'insegnare questo speditissimo metodo di frequentissimo uso, ed applicazione. Si potran dunque ritenere queste dimostrazioni per loro comodo, mentre i più provetti nella Scienza del Calcolo più naturalmente le vedranno nascere dal celebre teorema di *Taylor*, e dalla *teoria delle funzioni*, che su quel teorema tutta si fonda. In fatti tornando molti anni dopo a riflettere su questo metodo di *Simpson*, facilmente vidimo, che il suddetto teorema di *Taylor* n' era la radice, e che da questo patrio teorema l' Au: l'avea tratto, nascondendone il fonte. E così posteriormente lo trovammo difatti dimostrato (senza farsi però veruna menzione di *Simpson*, che fu il primo a proporlo) dal Sig. *Lagrange* (*De la resolution des équations numeriques de tous les degrés*: *Note* XI.), e dal di lui perpetuo commentatore Sig. *La Croix* (*Traité du calcul differentiel*, *et du calcul integral. Tome* I. *pag.* 325, 326). Il transunto delle dimostrazioni delle regole di *Simpson* dedotte dal teorema di *Taylor* è il seguente, e noi le accenniamo perchè meglio se ne rilevi la differenza dalle nostre.

Dovendosi nel *I.° Caso* rendere $=0$ una data funzione di x, ed avendosi un valore di x, che chiameremo a, il quale prossimamente soddisfa; ma che in vece di o dà u, se supporremo, che il vero valore di x sia $a+h$, la quantità h sarà molto piccola, e la funzione di $a+h$, la quale deve essere $=0$, sarà per il teorema di *Taylor*.

$$u + \frac{du}{da} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2u}{da^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{da^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \&c.$$

Trascurando adunque in questa espressione le potenze superiori di h quantità molto piccola, ed eguagliando a zero, si avrà prossimamente

$$u + \frac{du}{da} \cdot \frac{h}{1} = 0$$

cioè . . . . $h = -\frac{u}{\frac{du}{da}}$

ch' è appunto la regola data da *Simpson* per il *I.° CASO*.

Similmente per il *II.° CASO* supponghiamo, che si abbiano due funzioni di x, ed y da rendere $=0$, e che prossimamente vi soddisfacciano a, e b poste in luogo di x, ed y, le quali in vece di rendere le due funzioni $= 0$, dieno u, ed v. I veri valori di x, ed y sieno $a + h$, $b + k$, essendo h, e k quantità molto piccole; le due funzioni di $a + h$, e $b + k$, che deggiono per ipotesi essere $= 0$, saranno per la *teoria delle funzioni*, e per il teorema di *Taylor*.

$$u + \frac{1}{1}\left(\frac{du}{da} \cdot h + \frac{du}{db} \cdot k\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2u}{da^2} \cdot h^2 + 2\frac{d^2u}{da\,db} \cdot hk + \frac{d^2u}{db^2} \cdot k^2\right) + \text{ec}$$

$$v + \frac{1}{1}\left(\frac{dv}{du} \cdot h + \frac{du}{db} \cdot k\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2v}{da^2} \cdot h^2 + 2\frac{d^2v}{da\,db} \cdot hk + \frac{d^2v}{db^2} \cdot k^2\right) + \text{ec}$$

Trascurando le potenze, e i prodotti delle piccole quantità h, e k, ed eguagliando a zero ciò che resta, si avranno prossimamente vere le due equazioni

$$u + \frac{du}{da} \cdot h + \frac{du}{db} \cdot k = 0;\; v + \frac{dv}{da} \cdot h + \frac{dv}{db} \cdot k = 0$$

dalle quali risulteranno precisamente quei due medesimi valori di h, e k, che prescrive *Simpson* nella sua regola del *II.° CASO*.

Dal medesimo teorema di *Taylor* si può anche rilevare quale sarà per essere la legge, e il progresso dell'approssimazione nelle successive operazioni. Imperocchè essendosi trovato per es. per il *I.° CASO* il primo valore di $h = -\frac{u}{\frac{du}{da}}$, mettendo a in vece di x nella funzione u, il secondo valore di h, che si avrà nella seconda approssimazione risulterà allo stesso modo ponendo $a + h$ in vece di x nella funzione u. Ma ponendo $a + h$ in vece di x nella funzione u si ha per il teorema di *Taylor*.

$$u + \frac{du}{da} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2u}{da^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{da^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

cioè $\left(\text{per essersi fatto } u + \frac{du}{da} \cdot \frac{h}{1} = 0\right)$

$$\frac{d^2u}{da^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{da^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Sarà dunque il secondo valore di u, epperò anche il secondo valolore di $h = -\frac{u}{\frac{du}{da}}$, una quantità dell'ordine h^2; e allo stesso modo si proverà, che il terzo valore di u, e di h dovrà essere una quantità dell' ordine h^4, il quarto dell' ordine h^8 ec.; e l' istessa dimostrazione pure varrà, com' è evidente, per il *II.° CASO*. Quindi generalmente parlando si raddoppierà in ogni operazione il numero delle decimali esatte, e sicure, siccome appunto annuncia *Simpson* nella 3.ª *Nota*. Ma non più sulle dimostrazioni del *nuovo metodo di Simpson*: passiamo piuttosto con alcuni opportuni esempj ad illustrarlo. Gli esempj del *I.° CASO* ci verranno somministrati dall'equazioni del *problema meccanico*, che ſorma il soggetto della memoria precedente.

Risolvendo il secondo problema, in cui cioè si cercava l'arco, la di cui corda potrebbe percorrersi da un Grave nello stesso tempo, che la somma delle tre corde delle sue terze parti, siam giunti all' equazione

$$2 - 8x + 4x^2 - (6 - 10x + 4x^2)\sqrt{5 - 10x + 4x^2} + \cdots$$
$$\cdots + (2 - 2x).\sqrt{16x^4 - 88x^3 + 172x^2 - 140x + 40} = 0.$$

I limiti di x prescritti dalla natura del problema erano o, e 2, e il 2 ne dava una soluzione, la quale però come inutile doveva essere rigettata. Ma siccome posto o, ed 1 in luogo di x si hanno due risultati di segno contrario, si avrà perciò tra questi due limiti almeno un' altra soluzione. Ora ristringendo questi due limiti, si trovano anche due risultati di segno contrario ponendo o,1, e o,2 in vece di x, cioè col primo valore si ha prossimamente il risultato + o,56, e col secondo — 0,0288. Siccome questo secondo risultato è più vicino a zero del primo, suppongo perciò per una prima approssimazione $x = 0{,}2$. Differenzio ora la proposta equazione, e nel differenziale diviso per dx sostituisco parimenti 0,2 in vece di x, ed ho prossimamente per risultato — 5,403. Finalmente secondo che prescrive la regola del detto *CASO* divido — 0,0288 risultato della sostituzione di 0,2 in luogo di x nella proposta equazione, per l' ultimo risultato trovato $-54,03$, ed il quoziente, che sarà prossimamente $0,0053$ sottratto dal valore appunto $0,2$, darà per un secondo valore di x molto più prossimo al vero $0,1947$.

Similmente nel terzo problema della precedente Memoria, in cui si cercava l'arco la di cui corda potrebbe percorrersi da un Grave nello stesso tempo, che la somma delle corde delle due metà, avendo riguardo alla perdita della velocità nel passaggio dall' una all' altra si giunse all' equazione,

$$z^5 - 12z^4 + 53z^3 - 104z^2 + 86z - 23 = 0$$

e facilmente si stabilirono per il valore cercato di z i limiti $0,5$, e $0,6$. Adoperando il primo, ch' è più prossimo al vero, e sostituendolo nella proposta equazione si ha per risultato $-0,0938$. Sostituendolo similmente nel differenziale della medesima equazione diviso per dz, cioè in

$$5z^4 - 48z^3 + 159z^2 - 208z + 86$$

ne viene per risultato $+16,0625$. Diviso finalmente un risultato per l' altro si ha prossimamente per quoziente $-0,00583$, che sottratto da $0,5$ valore assunto per z, ne da per un secondo valore molto più prossimo al vero $0,50583$; dal quale si potrebbe poi passare, tenendo la medesima strada, ad ulteriori, e più accurate approssimazioni.

Il terzo, ed ultimo esempio del *I.° CASO*, che ricaveremo dalla precedente Memoria, sarà appunto l' ultimo problema, in cui si cercava l' arco, che un Grave potrebbe percorrere nello stesso tempo, che la sua corda. L' equazione, che prossimamente lo risolveva fu trovata essere

$$0,0122x^3 + 0,0351x^2 + 0,125x - 0,2732 = 0$$

nella quale al solito i limiti naturali di x erano 0, e 2, e si trovava poi facilmente, che 1, e 2 davano risultati di segno contrario, il primo cioe $-0,1009$, ed il secondo $+0,2148$. Adoperando il primo, come più prossimo, e sostituendo il valore 1 di x, che lo somministra, nel differenziale diviso per dx della surriferita equazione, cioè in

$$0,0366x^2 + 0,0702x + 0,125$$

si avrà per risultato $0,2318$. Dividendo per tanto $-0,1009$ per $0,2318$, 0,2318, e sottraendo il quoziente $-0,4352$, che ne risulta da 1, si otterrà molto prossimamente $x = 1,4352$.

Per aggiungere a questi anche un esempio di un' equazione trascendente, sia proposta a risolvere l'equazione

$$x^x - 100 = 0 .$$

Facilmente si vedrà, che il valore di x dev' essere compreso tra 3, e 4, e questi limiti si ridurranno poi colla stessa facilità a 3,5, e 3,6, i quali sostituiti in vece di x, valutando per mezzo de' logaritmi le potenze $3\,5^{3,5}$; $3,6^{3,6}$ daranno prossimamente i rispettivi risultati di segno contrario $-19,8$, $+0,6$. Scegliendo pertanto il secondo limite come il più prossimo, si dovrà esso sostituire nel differenziale della proposta equazione diviso per dx, cioè

$$(1 + \text{Log}.x).x^x$$

avvertendo, che Log.x è un logaritmo *Neperiano*, cioè eguale al logaritmo *tabulare* di x moltiplicato per 2,30258. Si avrà così per risultato prossimamente 229,368, per il quale dividendo l' altro risultato 0,6, che ha dato la proposta equazione, si avrà prossimamente per quoziente 0,0026, che sottratto da 3,6 darà per un secondo valore di x molto più prossimo del primo 3,5974.

Passando ora a dar qualche esempio del *II.° CASO*, prenderemo per il primo le due equazioni, che si propone a risolvere il medesimo *Simpson* nell' *esempio IV.°* del suo Opuscolo, cioè

$$49.\left(x - \frac{x}{\overline{1+y}^{2}}\right) - 25.\left(1 - \frac{x^2}{\overline{1+y}^{2}}\right) = 0$$

$$81.\left(1 - \frac{x^2}{\overline{1+y}^{2}}\right) - 49.\left(\frac{x}{y} - \frac{xy}{\overline{1+x}^{2}}\right) = 0 .$$

Dimostrando però prima, ciò che *Simpson* non ha fatto, che queste due equazioni nascono dal seguente problema.

Sopra di una data base AC (Fig.ª 3.ª) *descrivere un Triangolo* ABC *tale, che le rette* BD, CF, AE *dividenti in mezzo gli angoli, e prolungate sino ai lati opposti, sieno rispettivamente tra loro nel dato rapporto de' numeri* 5, 7, 9.

La soluzione di questo problema condurrà subito alle surriferite due equazioni mediante il seguente *Lemma*:

Il quadrato della retta BD *dividente in mezzo l' angolo* B *di un qualunque triangolo* (Fig.ª 4.ª). *e prolungata sino al lato opposto, eguaglia la differenza de' rettangoli de' lati* AB, BC, *che forman l' angolo, e de' segmenti* AD, DC *del lato opposto cioè* $\mathrm{BD}^2 = \mathrm{AB.BC} - \mathrm{AD.DC}$.

S' intenda al Triangolo circoscritto un Circolo, e prolungata la BD in E, e condotta la EC, saranno tra loro simili i tre triangoli ABD, EBC, ECD, epperò si

avrà . . . . . $\mathrm{AB : BD = EB : BC}$, $\mathrm{AD : BD = ED : DC}$
d' onde . . . . $\mathrm{EB \,.\, BD = AB \,.\, BC}$...$\mathrm{ED.BD = AD \,.\, DC}$
e quindi . . . . $\mathrm{EB.BD - ED \,.\, BD}$, cioè $\mathrm{BD^2 = AB\;BC - AD.DC}$.

Tornando adunque al problema, facciasi per maggior semplicità (Fig.ª 3.ª) la data base $\mathrm{AC} = 1$, e i lati cercati AB, BC chiaminsi rispettivamente x, ed y. Siccome BD divide in mezzo l' angolo B, si avrà dalla Geometria

$$x + y : x = 1 : \mathrm{AD},\quad x + y : y = 1 : \mathrm{DC}$$

cioè $\mathrm{AD} = \frac{x}{x+y}$, $\mathrm{DC} = \frac{y}{x+y}$.

Allo stesso modo, essendo l' angolo C diviso in mezzo dalla CF, si troverà $\mathrm{AF} = \frac{x}{1+y}$, $\mathrm{FB} = \frac{xy}{1+y}$; ed essendo l'angolo A diviso in mezzo dalla AE, si avrà $\mathrm{CE} = \frac{y}{1+x}$, $\mathrm{EB} = \frac{xy}{1+x}$.

Quindi per il premesso *Lemma* ne risulterà

$$\overline{\mathrm{BD}}^2 = \mathrm{AB.BC} - \mathrm{AD.DC} = xy - \frac{xy}{\overline{x+y}^2}.$$

$$\overline{\mathrm{CF}}^2 = \mathrm{AC.CD} - \mathrm{AF.FB} = y - \frac{x^2y}{\overline{1+y}^2}.$$

$$\overline{\mathrm{AE}}^2 = \mathrm{AC.AB} - \mathrm{CE.EB} = x - \frac{xy^2}{\overline{1+x}^2}.$$

Dovendo dunque stare per condizione del problema $\overline{\mathrm{BD}}^2$, $\overline{\mathrm{CF}}^2$, $\overline{\mathrm{AE}}^2$, come i quadrati de' numeri 5, 7, 9, cioè 25, 49, 81, si avranno perciò le due equazioni

$$49 . \left(xy - \frac{xy}{\overline{x+y}^2}\right) - 25 . \left(y - \frac{x^2y}{\overline{1+y}^2}\right) = 0$$

$$81 . \left(y - \frac{x^2y}{\overline{1+y}^2}\right)^2 - 49 . \left(x - \frac{xy^2}{\overline{1+x}^2}\right) = 0 .$$

Per risolverle colla regola del II.° CASO, bisogna primieramente stabilire due valori, quanto si può più prossimi di x, ed y. Ora riflettendo, che la retta, che divide in mezzo un angolo di un triangolo formato da due lati dati sarà, generalmente parlando, tanto più grande, quanto si supporrà più piccolo il lato opposto, e viceversa, facilmente se ne conchiuderà, ch' essendosi posta AC=1, e dovendo stare BD : CF : AE=5 : 7 : 9, i due lati cercati AB, BC dovranno esser minori di 1, ed AB maggiore di BC. Questo discorso che potrà esser anche coadjuvato da una costruzione fatta a tentone del ricercato triangolo, agevolmente porterà a supporre per una prima approssimazione $x=0,8$; $y=0,6$. Colla sostituzione di questi supposti valori nelle proposte equazioni si avranno subito quei delle quantità chiamate R, ed r nella regola del II.° CASO, cioè .... R=0, 45, r=2, 66.

Per avere le altre quattro quantità A, B, a, b della medesima regola, bisognerà differenziare le proposte equazioni, e si troverà, che il coefficiente di dx nella prima è $49\cdot\left(1+\frac{x-y}{2+y^3}\right)+\frac{50x}{1+y^2}$, quello di dy e $\frac{98x}{x+y^3}-\frac{50x^2}{1+y^3}$; e similmente il coefficiente di dx nel differenziale della seconda si troverà essere $-\frac{162x}{1+y^2}+49\cdot\left(\frac{y}{1+x^2}-\frac{1}{y}-\frac{2xy}{1+x^3}\right)$, e quello di dy si troverà $\frac{162x^2}{1+y^3}+49x\cdot\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)$. Ora la sostituzione di 0,8, e 0,6 in vece di x, ed y fatta in questi quattro coefficienti darà appunto prossimamente A=68, B=20,7; $a=-131$, $b=146$.

Finalmente con questi valori di R, r, A, B, a, b, a tenore della regola del II. CASO dovran determinarsi i valori delle quantità $\frac{\mathrm{B}r-b\mathrm{R}}{\mathrm{A}b-a\mathrm{B}}$, $\frac{a\mathrm{R}-\mathrm{A}r}{\mathrm{A}b-a\mathrm{B}}$, che si troveranno essere prossimamente $-0,0007$, e $-0,019$, e che aggiunti ai supposti valori 0,8; 0,6 daranno due nuovi valori di x, ed y molto più prossimi ai veri, cioè $x=0,7993$, $y=0,581$. Da questi si passerà collo stesso metodo agli altri anche più esatti $x=0,79912$, $y=0,58138$, che sono si-

sicuri sino alla quarta decimale ; e si potrà andare anche più oltre , se si vuole nell' esattezza dell' approssimazione .

Aggiungiamo anche un esempio di equazioni trascendenti nelle due equazioni

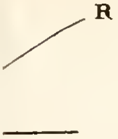
$$x^x+y^y-1000=0\ ,\quad x^y+y^x-100=0$$

Facilmente si scorgerà , che la maggiore delle due cercate quantità , che supporremo esser x, dev' esser maggiore di 4, e minore di 5 , poichè supponendola $=4$, quando anche l' altra y fosse $=4$, si avrebbe $x^x+y^y=512$, cioè <1000 , onde la prima equazione non potrebbe essere soddisfatta ; e supponendola $=5$, si avrebbe il solo termine $x^x=3125$, cioè >1000 . Alla stessa maniera dalla seconda equazione apparirà dover essere $y>2$, e <3 ; dappoichè quando anche fosse $x=5$, se si ponesse $y=2$, si avrebbe $x^y+y^x=25+32$, cioè <100 , e se si facesse $y=3$, quando anche fosse $x=4$, sarebbe $x^y+y^x=64+81$, cioè >100 .

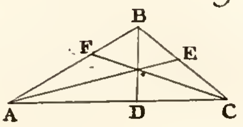
Potrà dunque supporsi alla prima $x=4{,}5$, $y=2{,}5$, e questi due supposti valori sostituiti nelle due equazioni , daranno per mezzo de' logaritmi, come nell' ultimo esempio del I.° CASO , $R=-120{,}218$, ed $r,=4.72$. I coefficienti di dx, e dy nel differenziale della prima equazione si troveranno essere $(1+\mathrm{Log}\,x).x^x$, $(1+\mathrm{Log}.y)y^y$, e quei del differenziale della seconda, $\frac{y}{x}\cdot x^y+y^x.\mathrm{Log}.y$, ed $\frac{x}{y}.\,y^x+x^y.\mathrm{Log}.x$. Se in questi quattro coefficienti pertanto si porranno in luogo di x, y i valori assunti 4,5, 2,5 , in vece di Log. x , e Log. y i logaritmi *tabulari* di 4,5 , e 2,5 moltiplicati per 2,30258, e finalmente in vece di x^x , y^y, x^y, y^x i valori loro già determinati nel trovare R, ed r , ne risulterà prossimamente $A=2178{,}23$, $B=18{,}936$, $a=80{,}41$, $b=175{,}96$; e questi quattro valori insieme con quei di R , ed r daranno prossimamente $\frac{Br-bR}{Ab-aB}=0{,}05$; $\frac{aR-Ar}{Ab-aB}=-0{,}05$, cioè i valori da aggiungersi ai valori assunti per x , ed y, onde avere con maggiore approssimazione $x=4{,}55$, $y=2{,}45$. Da questi con una consimile operazione si passerà agli altri anche più prossimi ai veri $x=4{,}5519$, $y=2{,}4495$; ec.

SO-

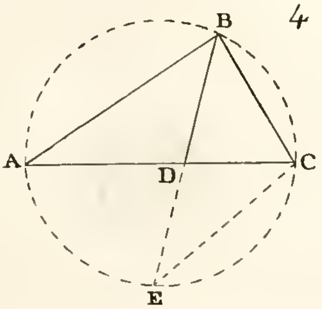
Memoria II.



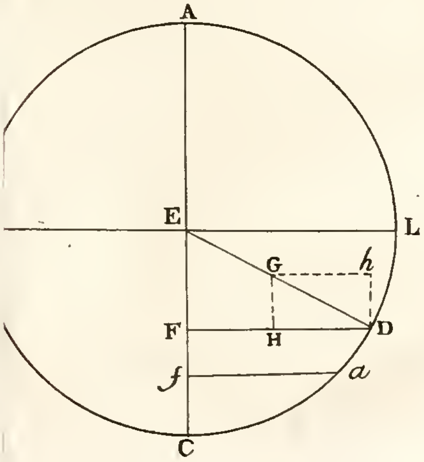
3



4

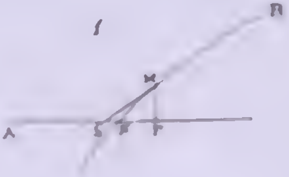


Memoria Delanges p. 171.

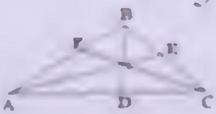

A
E
L
G
h
F
H
D
f
a
C

Memoria II

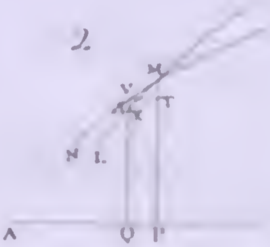
1



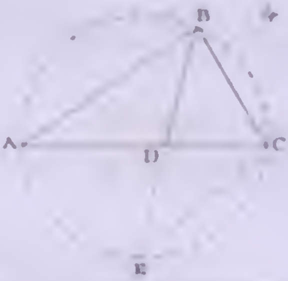
3



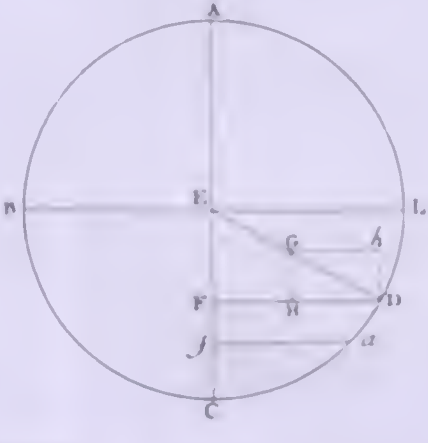
2


M
V
T
m
x
N
L
A
Q
P

4



Memoria Delanges p. 171


A
B
E
L
G
h
F
H
D
f
d
C

SOPRA LA MISURA DELLE ALTEZZE COL BAROMETRO

MEMORIA

Del P. D. Giuseppe Maria Racagni

Ricevuta il dì 15. *Giugno* 1806.

1. Il metodo di misurare le altezze dei luoghi col barometro, che interessa moltissimo i Fisici, i Naturalisti Geologi, e Geografi, e tutti ancora gli Amatori delle naturali curiosità, e che imaginato da Pascal (*Traité de l' Equilibre des liqueurs . Paris* 1663), e coltivato da molti altri di eccellente ingegno forniti, pareva al più alto grado di perfezione pervenuto, alla fine dello scorso secolo ha ricevuti alcuni notabili cambiamenti, poichè lasciando le maniere indirette, con le quali all' esempio di de Luc (*Recherches sur les modifications de l'Atmosphere T. I, e II. Geneve* 1772) cercavasi con tentativi di stabilire o il punto fisso di calore, al quale conforme all' insegnamento di Halleio (*Trans, Philos. London. n.* 181.) la differenza dei logaritmi delle altezze barometriche dasse l' altezza cercata in misure conosciute, o il coefficiente, il quale servisse a ridurre le diverse temperature a quel punto; primamente il Senatore La Place (*Exposition du sistéme du Monde Chap. XIV. Paris an. VII*) ha proposto un nuovo ordine di osservazioni, che secondo Ramond (*Journ. de Physique ... Germinal an. XIII*) procedono come la teoria, e si svolgono come il ragionamento; appresso Egli (*Traité de Mecanique celeste Vol. I. Liv. I. Chap. VIII. Paris an. VI.*, e *Vol. IV. Liv. X. Chap. IV. Paris an.* 1805) studiossi con diretti mezzi di rendere la ragione di quelle operazioni, e di valutare gli effetti di molte cagioni, che influiscono sopra quella misura, e di una

singolarmente che dipende dalla ineguaglianza della gravità nelle diverse latitudini; e per fine Saij Lussac (*Annales de Chymie vol. 43. Paris*) e Ramond con nuove osservazioni fornirono le quantità, che quel Fisico, e Matematico sommo doveva pigliare per base del suo lavoro, il quale al dire di Hauy (*Traité elementaire de Physique vol. I. Paris* 1803) non lascierà più niente a desiderare, quando la determinazione di queste quantità sarà presa di nuovo con tutta la precisione di cui essa è capace.

2. Ma questo metodo mentre altrove riscuoteva applausi, nell'Allemagna incontrò la critica di Rohde (*Veber La Places neve Verbescerung des aus barometrischen Deobachtungen berechneten Bergôhen. Halle* 1803) Capitano nelle Armate Prussiane, e Matematico molto vantaggiosamente conosciuto per altre sue opere, il quale pretese che la ineguaglianza della gravità nelle diverse latitudini non poteva in quelle misure effetto alcuno produrre; e io non saprei dire, se le di lui obbiezioni nel 1803 dirette contro il primo dei luoghi citati della Meccanica celeste siano arrivate a notizia di La Place, poichè questi non ne parla nel secondo uscito nel 1805, dove più ampiamente tratta il soggetto medesimo; e invece vedendo, che Ramond, Hauy, e Biot (*Traité elementaire d'Astron. Physique Paris an. XIII.*) espongono il suo metodo senza la correzione dovuta a quella ineguaglianza, e che altri citano la dissertazione di Rohde senza confutarla, mi è sembrato, che assai facilmente potrebbe alcuno pensar, che questa sia ben fondata, e quello sia ad uno non leggiero errore sottoposto; laonde ho pure creduto, che avrei fatto un' opera per alcuni non inutile, esponendo le ragioni per le quali sono persuaso, che debbasi assolutamente affermare il contrario. Ma questo non è il solo scopo, che mi sono prefisso, poichè tenendo dietro ai principj, che usarono La Place, e Rohde, cercherò ancora di richiamarli ad esame per modo, che possa ciascuno del loro merito giudicare.

3. E da principio parendo, che Rohde abbia creduto di rendere più esatto il calcolo di quelle misure, riguardando la figura

della terra sferoidica, quale nascerebbe dalla rivoluzione di una semiellisse intorno al suo asse minore, io pure supponendo quella figura, che se non è esattamente vera, è almeno la più semplice, chiamo a il semiasse maggiore, na il minore, e $1 - n = m$ l'elitticità, o l'appiattimento della Terra; seguendo poi il Trattato d'Astronomia di Biot, che è posteriore alle opere citate di La-Place, dalla proporzione $1 : n :: 335 : 334$, che è dedotta dal paragone dei gradi del Meridiano misurati all'Equatore da Bouguer, e in Francia da Mechain, e De-Lambre, ricavo $1 - n = m = \frac{1}{335} = 0,002985$, e $m^2 = 0,000009$; onde si vede la ragione, per cui si costuma generalmente di trascurare i termini affetti dalle potenze di m, cominciando ancora dalla seconda; io però per giungere al termine prefissomi terrò conto ancora di questa.

4. Quindi chiamo

z il semidiametro condotto dal centro della Terra ad un punto della di lei superficie,

x, e y le coordinate di questo punto prese, la prima partendo dal centro sull' asse maggiore, la seconda paralella all' asse minore,

α, e β gli angoli, che quel semidiametro forma con l'asse maggiore, e con la verticale alzata sopra quel luogo,

Ψ l'angolo, chequesta verticale forma con l'asse maggiore, col quale necessariamente s' incontra, e che è la latitudine di quel luogo, e dalle proprietà dell' ellisse deduco

l' equazione $y^2 = n^2(a^2 - x^2)$; la sottonormale $\frac{ydy}{dx} = -n^2x$;

$$\text{tang.}\Psi = \frac{y}{n^2x};\ y^2 = n^4x^2\ \text{tang.}^2\Psi;\ x^2 = \frac{a^2}{1+n^2.\text{tang.}^2\Psi};$$

$$\text{tang.}\alpha = \frac{y}{x} = n^2.\text{tang.}\Psi;$$

$$m.\text{sen.}^2\Psi = m.\text{sen.}^2\alpha(1+4m.\cos.^2\alpha);\ m.\cos.^2\Psi = m.\cos.^2\alpha(2-4m.\text{sen.}^2\alpha);$$

$$m.^2\text{sen.}^2\Psi.\cos.^2\Psi = m^2.\text{sen.}^2\alpha.\cos.^2\alpha;$$

$$\beta = \Psi - \alpha;\ \text{tang.}\beta = \frac{\text{tang.}\Psi - \text{tang}\,\alpha}{1+\text{tang.}\Psi\text{tang.}\alpha} = \frac{(1-n^2)\text{tang.}\Psi}{1+n^2\text{tang.}^2\Psi};$$

$$\frac{\text{sen.}^2\beta}{\cos.^2\beta} = \frac{(2m-m^2)^2\ \text{sen.}^2\Psi\ \cos.^2\Psi}{(1-1(2m-m^2)\text{sen}\ \Psi^2)^2}\ ;$$

$$\text{sen.}\beta = (2m-m^2+4m^2.\text{sen.}^2\Psi)\ \text{sen.}\Psi\ \cos.\Psi\ ;$$

$$\cos.\beta = 1-2m^2.\text{sen.}^2\Psi\ .\cos.^2\Psi\ ;$$

$$z^2 = x^2 + y^2 = a^2 . \frac{1+n^4\ \text{tang.}^2\Psi}{1+n^2.\text{tang.}^2\Psi} = a^2 . \frac{1+1(n^4-1).\text{sen.}^2\Psi}{1+1(n^2-1).\text{sen.}^2\Psi}$$

$$= a^2 . \frac{1-1(4m-6m^2).\text{sen.}^2\Psi}{1-1(2m-m^2).\text{sen.}^2\Psi} = a^2[1-1(2m-5m^2)4n^2\Psi-4m^2\text{sen.}^4\Psi];$$

$$z = a\left(1 - m.\text{sen.}^2\Psi + \frac{5m^2.\text{sen.}^2\Psi.\cos.^2\Psi}{2}\right)$$

$$= a\left(1 - m.\text{sen.}^2\alpha - \frac{3m.^2\text{sen.}^2\alpha.\cos.^2\alpha}{2}\right.\ .$$

5. Salendo poi dalla superficie della Terra sopra la verticale prendo
v per l' altezza, che si vuole misurare,
e dalla sua estremità più alta intendo condotte al centro la retta b, su cui si trova un altro semidiametro z',
e sopra il semidiametro z prolungato la perpendicolare, che sarà $= v.\text{sen}\ \beta$, e darà il prolungamento di questo semidiametro $= v.\cos\ \beta$.

Se poi si denominino
γ, e ω gli angoli, che la retta b comprende col semidiametro z, e col semiasse maggiore

sarà $\text{tang.}\gamma = \frac{v.\text{sen.}\beta}{z+v.\cos.\beta}$; $\omega = \alpha + \gamma$;

$$z' = a\left(1 - m.\text{sen.}^2\omega - \frac{3m.^2\text{sen.}^2\omega\ \cos.^2\omega}{2}\right).$$

Ma essendo sempre $v < 3220$ tese, alle quali secondo Pasumot (*Journ. de Phys. Septem.* 1783) appena arriva il monte altissimo Chimboraço, e dalle misure date da Biot essendo $a=3271208$ tese, si ha $\frac{v}{a} < 0,000984$; $\frac{mv}{a} < 0,000003$; $\frac{v^2}{a^2} < 0,000001$; onde appare la ragione, per cui si suole trascurare i termini affetti dai prodotti qualunque di m, e di $\frac{v}{a}$, cominciando da quelli di due dimensioni. Ad ogni modo tenendo conto ancora di questi si avrà

$b =$

$$b = \gamma[(z + v.\cos.^2\beta)^2 + v^2.\text{sen}.^2\beta] = z + v;$$

$$\text{tang}.\gamma = \frac{2mv.\text{sen}.\Psi.\cos.\Psi}{z+v} = \frac{2mv.\text{sen}.\Psi\ \cos.\Psi}{a}.$$

$$\text{sen}.\gamma = \frac{2mv.\text{sen}.\Psi.\cos.\Psi}{a};\ \cos.\gamma = 1;$$

$$\text{sen}.\omega = \text{sen}.\alpha.\cos.\gamma + \cos.\alpha\,\text{sen}.\gamma = \frac{\text{sen}.\alpha + 2mv.\text{sen}.\Psi.\cos.\Psi.\cos.\alpha}{a};$$

$$\cos.\omega = \text{sen}.\alpha.\text{sen}.\gamma - \cos.\alpha.\cos.\gamma = \frac{2mv.\text{sen}.\Psi.\cos\Psi.\text{sen}.\alpha}{a} - \cos.\alpha;$$

$$m.\text{sen}.^2\omega = m.\text{sen}.^2\alpha;\ m^2.\text{sen}.^2\omega.\cos.^2\omega = m^2.\text{sen}.^2\alpha.\cos.^2\alpha;$$

e quindi pel numero antecedente $z = z'$.

Nè sarà altrimenti, quando la retta v si prenda sulla verticale discendendo sotto alla superficie della Terra, se non che diverrà $b = z - v$.

6. Finalmente esprimo per g. g', g'' le gravità acceleratrici alla estremità del semidiametro z che è pure l' estremità inferiore di v, alla estremità superiore di v, e alla estremità del semidiametro z'; e poichè sulla superficie della Terra elissoidale quelle gravità sono reciprocamente come le distanze dal centro, sarà $g : g'' :: z' : z$, ed essendo (5) $z = z'$, si avrà $g = g''$; siccome poi salendo dalla superficie della Terra, quelle gravità seguono la ragione reciproca duplicata delle distanze dal centro, si avrà $g'' : g' :: b^2 : b'^2$, ossia (5) $g' = \frac{gz^2}{(z+v)^2}$; ma se la retta v cadesse sotto Terra; e g'' esprimesse la gravità acceleratrice alla sua estremità inferiore, sarebbe $g'' : g' :: z' : b$, perchè allora quelle gravità seguono la ragione diretta delle distanze, e si avrebbe $g' = \frac{g(z-v)}{z}$ Volendo dunque abbracciare ambedue i casi, e dare a questa teoria la maggior estensione, pongo la gravità nella ragione reciproca della potenza 5^{ma} della distanza dal centro, onde risulta

$$g' = g\,z^5\,(z+v)^{-5} = g\left(1 - \frac{5v}{z} + 5.\frac{5+1}{2}.\frac{v^2}{a^2}\right),$$

$$\text{ossia } g' = g\left(1 - \frac{5v}{a} - \frac{m5v}{a}.\text{sen}.^2\Psi + 5.\frac{5+1}{2}.\frac{v^2}{a^2}\right).$$

7. Ora si intenda, che quella verticale rappresenti una colonna d' aria, in cui ciascuna sezione orizzontale sia espressa dalla unità, e nelle due sezioni orizzontali inferiore, e superiore dell' altezza v come g, g' (6) sono le gravità acceleratrici, così siano p, p' le pressioni, δ, δ' le densità, c, c' i gradi del calore computati non dal zero arbitrario di un qualunque termometro ma dal zero assoluto. Se oltre ad v si prenda la colonna d' aria dell' altezza dv tanto piccola, che le quantità g', p', δ', c' vi si possano considerare come costanti, per ragione della base orizzontale di questa colonna, sarà il suo volume come dv, la sua massa come il prodotto della densità nel volume $\delta' . dv$, il suo peso come il prodotto della gravità acceleratrice nella massa $g'\delta' . dv$. Ma questo peso esprime la pressione della colonna d' aria dv sulla sua base orizzontale, e questa pressione deve esprimersi per $-dp'$, perchè è il decremento, che la pressione p' soffre passando dall' altezza v all' altra $v + dv$; dunque si avrà l' equazione

$$\delta' g' dv = - dp' ,$$

a cui pervennero tutti quelli, che questo argomento col calcolo infinitesimale trattarono dopo Newton (*Princ. Mathem. lib. II prop.* 22), e a cui pure condurrebbero i metodi di quelli, che lo precedettero, e massime di Mariotte (*Discours sur la nature de l'air Op. Leidae* 1717), e di Hallejo ponendo g' costante, ed eguale all' unità, poichè Mariotte conobbe, che la gravità scemando nell' alzarsi per l' atmosfera, doveva influire sulla misura delle altezze col barometro, ma a tenerne conto il primo fu Newton; e la tenue altezza degli strati, nei quali Mariotte, e Hallejo dividevano l' atmosfera, era un passo ben marcato verso il calcolo delli infinitesimi. Quella equazione vale ancora, quando si prenda v sotto terra, dove diviene dv negativa, e invece positiva dp', e sostituendo prima il valore di g' (6), e poi ponendo $g'dv = gdv'$ si riduce a

$$\delta' g dv' = - dp' .$$

8. Non si può integrare questa equazione senza introdurvi alcuni principj di Fisica, che riguardano le proprietà dell' atmosfera. E primamente l' aria essendo pesante, e compressibile, e ra-

rarefacendosi pel calore, Pascal aveva già conosciuto, che gli strati inferiori di quella dovevano essere densi più dei superiori, dai quali sono compressi, e Mariotte aggiunse che in questi strati la densità doveva decrescere un pò meno in paragone della pressione, perchè in circostanze pari erano meno caldi degli inferiori; quindi seguiva, che poste pari le altre circostanze, le densità di quei strati a diverse altezze erano come una qualche funzione della pressione insieme, e del calore. Ma da questo dovettero Mariotte, e quindi gli altri Fisici prescindere per lungo tempo; e invece in Inghilterra Riccardo Towley, mentre assisteva ad alcune sperienze del suo Maestro Boile (*Defensio contra Franciscum Linum; e Nova experimenta. Op. Genevae* 1677), e in Francia lo stesso Mariotte senza conoscere i lavori di Boile, furono abbastanza felici per iscoprire, che essendo pari tutte le altre circostanze, potevasi stabilire per legge la proporzione $\delta:\delta'::p:p'$; infatti se ad imitazione di Mariotte mettasi del mercurio in un tubo lasciandone piena d'aria la lunghezza V, e tenendolo chiuso si capovolga, perchè quest' aria salga alla di lui sommità, e così poi si immerga verticalmente fino ad una certa profondità nel mercurio stagnante; e aprendolo si misurino la lunghezza V', in cui quell' aria si dilata, e la lunghezza h'' della colonna del mercurio, che vi rimane sospesa, e in fine si osservi l' altezza h, che allora ha il mercurio in un barometro, variando l' esperienza in qualunque modo coll' immergere il tubo a diverse profondità, ancora quelle quantità si troveranno diverse ma in modo, che sarà sempre $V:V'::h-h'':h$; laonde si potrà inferire, che i volumi di una massa d' aria sono reciprocamente, e perciò le sue densità sono direttamente come le semplici pressioni, poichè per ragione della base costante, V, e V' sono come i volumi della massa d'aria lasciata nel tubo, ai quali sono reciproche le densità, e dalla scoperta di Torricelli è chiaro, che h, e $h-h''$ sono le pressioni, che quella massa soffre sotto a quei volumi.

9. Veramente questa legge non può a tutto rigore valere verso i limiti estremi della rarefazione, e della condensazione, perchè come argomentano Varignon (*Mem. de l'Acad. Paris* 1716), e de

e d' Alembert (*Traité de l'equil.* , *et du Mouv. des fluides Paris* 1744 , *e Reflex. sur la cause gener. des vents. Berlin* 1747), allora dovrebbe l'aria avere una dilatabilità infinita, onde tolta ogni forza comprimente restasse priva di densità; il che ripugna; e dovrebbe avere una compressibilità infinita, onde crescendo la forza comprimente, sempre crescesse la sua densità; il che sarà negato almeno da quelli, che tengono le parti dei corpi essere estese, e dure perfettamente, e potersi ridurre a vicendevole contatto. Ancora Boile, Mariotte, e massimamente Sulzer (*Mem. Berlin.* 1753) nelle esperienze loro hanno incontrato alcune anomalie per le quali parrebbe, che le densità dell' aria tanto meno corrispondano alle forze prementi, quanto più si allontanano da quella delle nostre basse regioni dell' atmosfera; laonde Cassini (*Mem. Paris* 1783) ha cercato le formole analitiche dello stato dell' atmosfera secondo la legge delle densità proporzionali al quadrato delle pressioni; e d' Alembert ha proposto di mettere le densità proporzionali a qualche potenza delle pressioni, o alle pressioni semplici accresciute di una forza costante, e Sulzer le pose proporzionali alla potenza 1, 0015.^{ma} delle pressioni.

10. Ma quelle anomalie oltrecchè sono tanto piccole, che si possono attribuire agli errori quasi inevitabili nel misurare le capacità dei piccoli vasi, ancora non convengono tra loro, perchè le densità dovrebbero crescere meno secondo Mariotte, e più delle pressioni secondo Sulzer, il quale forse anche fu ingannato da qualche non avvertita porzione di vapori acquei, che crescendo la densità dell' aria, si riducevano in vapori secondo le osservazioni di Dalton (*Memoirs of the litterary, and Philosophical Society of Manchester. Vol 5. p. 2. London*). Le leggi poi proposte da Cassini, e da d'Alembert sono inutili, perchè mancano di ogni mezzo per determinare con precisione o la potenza della pressione, o la quantità costante, di cui deve essere accresciuta; e infatti quelle non hanno potuto servire a Gregorio Fontana (*Delle altezze barometriche, Saggio analit. Pavia* 1771), Franceschinis (*Memorie della Società Italiana T.* 5.) Frisio (*Op. Vol. II Mediol.*

diol. 1783) Hennert (*Commentatio de altitudinum mensuratione. Traiecti* 1786), e ad altri se non per mostrare la loro erudizione, e facoltà nel maneggio del calcolo senza poterne fare alcuna applicazione. Quindi i Fisici ancora più rigorosi; nei limiti di densità che si possono incontrare nell' atmosfera, sonosi tenuti a quella legge denominata da Mariotte, che è semplicissima e confermata inoltre dalle esperienze di Bouguer, e di Condamine (*Mem. Paris* 1763), le quali essendo state fatte in luoghi diversi di clima, e di elevazione, smentiscono quelle del P. de Beze riportate da Maraldi (*ivi* 1709), che in vicinanza dell' equatore davano le densità dell' aria crescenti in una ragione maggiore delle pressioni.

11. Ancora soltanto a quella legge di Mariotte le ricerche loro appoggiarono Newton, Cotes (*Harmonia mensurarum. Par.* 1. *prop.* 5. *schol. Cantabr.* 1722), Taylor (*Methodus incrementorum*), d' Alembert, Fontana, Franceschinis, Frisi, e altri Matematici, i quali trattando della condizione degli strati della atmosfera, hanno preterito il calore, o piuttosto l'hanno supposto costante in tutta la di lei altezza, ossia perchè disperassero di conoscere la legge secondo cui quello varia, ossia perchè credessero di non poterla cercare senza entrare in dettaglii troppo fisici, come di se stesso dice d' Alembert (*Traité de' l'equil . . . . . . des fluides* §. 15), il quale non avvertì, che erano egualmente fisici, i dettaglii, nei quali entrato era per riguardo alla legge di Mariotte (9), e che la legge riguardante il calore, se fosse bene stabilita, poteva come quella con ogni facilità prestarsi alle ricerche, e ai calcoli dei Matematici. Ma finalmente Giovanni Bernoulli (*Discours sur les loix de la Communic. du Mouvem. Paris* 1727), e più ampiamente il di lui Figlio Daniele (*Hydrod. Argentor.* 1738 *sect.* X), han preso a trattare degli effetti del calore sulla densità degli strati dell' atmosfera, e Daniele più espressamente ancora di Mariotte affermò, che le formole ricavate dalla di lui legge per la misura delle altezze erano affatto discordi dalle osservazioni, solamente per motivo del calore. Forse le teorie loro non ebbero tutto il successo, che meritavano perchè

troppo erano dipendenti dall' altra delle forze vive; e maggiore l' ottenne l' Eulero (*Mem. Berlin* 1754, *e* 1755), che il primo combinando insieme la pressione, e il calore, stabilì la legge $\delta : \delta' :: \frac{p}{c'} : \frac{p'}{c}$, che dà le densità nella ragione semplice diretta delle pressioni, e reciproca del calore.

12. E questa veramente è la legge, che l' Hennert dice confermata dal consenso dei Fisici; ma doveva Egli esaminare, se tutti l' abbiano ammessa nel senso medesimo; perchè quando si parla di proporzione di calore, pare, che debbasi intendere quella, che risulta misurandolo coi cambiamenti di volume, che produce nel mercurio, ossia coi gradi del termometro a mercurio, che si usa massime nelle osservazioni dirette a conoscere le altezze diverse dei luoghi; e sicuramente in questo senso presero il calore l' Eulero, e gli altri, che la sua legge ricevettero seguendo insieme l' opinione di Amontons (*Mem. Paris* 1699, *e* 1703), Cruquius (*Trans. Phil. London.* 1726), de Luc, Shuckburgh (*ivi* 1777), Lambert (*Pyrometrie, Berlin* 1779), Saussure (*Essai sur l' Hygrometrie, Neuchatel* 1783), Monge, Berthollet, e Vandermonde (*Mem. Paris* 1786), e Say Lussac (*Annales de Chymie. Vol.* 43 *Paris*) i quali almeno nei gradi di calore, che noi siam soliti di misurare, credono di aver trovato, che quei cambiamenti procedano prossimamente con l' istess' ordine nel mercurio, e nell' aria, e che i termometri di ambedue questi fluidi abbiano a un di presso l' andamento medesimo. All' opposto la legge di Eulero solamente nel senso del calore misurato dai cambiamenti che produce sul volume dell' aria, ossia dai gradi del barometro, hanno potuto ricevere Roy (*Trans. Phil. London.* 1777), Guyton, e Prieur du Vernois (*Annales de Chymie Vol. I. Paris*), Luz (*Volstandigen Beschreibung Aller barometer. Nürnb.* 1784), e Dalton, i quali tengono, che le dilatazioni dell' aria siano decrescenti in proporzione di quelle del mercurio, come si può vedere in una tavola da Roy estesa dal grado 0 al 12.mo, e poi continuata di 10 in 10 grado fino al 212.mo di Fahrenheith, che Hennert ha riportata di grado in grado da 0 fino ai 92 pu-

pure di Fahrenheith, e che Oriani (*Ephemer. ad Merid. Mediol.* 1788) non ostanti le obbiezioni di Saussure, ha appiovata, e tradotta in gradi Reaumuriani da — 15 fino a + 36.

13. Io poi dimanderei ancora presentemente, se tutti i Fisici abbiano fatto uso di quella legge al modo medesimo; perchè suppongo senza difficoltà, che tutti l' abbiano riferita al calore computato dallo zero assoluto quantunque non tutti l'esprimano; ma coi metodi tenuti prima di La-Place stabilivasi sempre un certo calore, e la corrispondente densità dell' aria, da cui partivasi come da un termine fisso, onde dentro non molti gradi intorno a quel termine, che ciascuno aveva creduto corrispondere meglio alle osservazioni, bastava, che si potesse determinare la relazione tra i cambiamenti del calore, e dei volumi dell' aria, e del mercurio, e che questa si trovasse conforme alla legge Euleriana. Ma La-Place riporta questa al calore assoluto per modo, che vedremo abbasso, che ha bisogno di determinarlo, e a questo fine suppone, che fino dai limiti estremi, e cominciando dallo zero assoluto di calore, ai cambiamenti eguali di questo debbano sempre corrispondere cambiamenti eguali nel volume dell' aria, e del mercurio.

14. Ora comprendendo La-Place, che questo non si poteva con le esperienze verificare, prese invece a provarlo col dire (*Mech. cel. Vol. IV. pag. XXII.*), che se in un volume costante d' aria cresca la temperatura, è naturalissimo il pensare, che nello stesso rapporto crescerà la sua forza elastica, di cui il calore è la cagione; sottomettendolo poi in questo nuovo stato alla pressione, che provava nel primo, il suo volume crescerà come la sua forza elastica, e per conseguente come la sua temperatura; onde a lui pare, che il termometro ad aria indichi esattamente le variazioni del calore, come aveva già insegnato Amontons. Similmente alla pag. 261 trattando delle rifrazioni del lume attraverso all'aria, replica Egli a un dipresso l' argomento medesimo, che pare potersi ancora rinforzare con la opinione di Dalton, il quale avendo trovato, che tutti i fluidi aeriformi pel calore si dilatano con la stessa legge, ha pure argomentato, che quel-

li debbano a questo unicamente ogni loro elasticità, e dilatazione, la quale perciò dovrà sempre a tutto, e al solo calore corrispondere, a differenza dei fluidi liquidi, che hanno le dilatazioni corrispondenti al calore insieme, e alla affinità delle loro molecole; e si potrebbe aggiugnere altresì a differenza dei vapori, l'elasticità dei quali dipende principalmente dall' eccesso del calore, che hanno, sopra quello, per cui lasciarono la forma di liquore.

15. Io però confesso, che questi argomenti quanto mi pajono forti per provare, che l' aria deve tutta la sua elasticità a tutto il calore, e a confutare l' opinione di Bouguer (*Mem. Paris* 1753), e di altri, che supposero in quella parti fornite di elasticità specifica diversa, tanto mi pajono non bastanti a provare, che quella elasticità sia nella ragione semplice del calore assoluto piuttosto che in un' altra qualunque ragione composta, per cui debbano ambedue svanire insieme. E pare al contrario, che il sospetto di alcuna di queste ragioni possa venire non solo per le teorie delle forze vive usate da Daniele Bernoulli, e del calore specifico, che si cambii nell' aria cambiando la densità, ma singolarmente per le esperienze, nelle quali (12) le dilatazioni dell' aria comparvero discordi da quelle del mercurio, che secondo De-Luc, nei gradi che siam soliti di misurare, crescono prossimamente come il semplice calore. Quindi sembra pure, che la legge di Eulero si possa ammettere solamente nei gradi di calore, che siamo soliti di provare, riservando sempre a verificare col confronto tra le formole, e le osservazioni fin dove quella si estenda, e se ancora intendere si possa dei gradi misurati con le dilatazioni del mercurio; perciocchè La-Place seguendo il paragone fatto da Say Lussac, afferma potersi sempre il termometro a mercurio sostituire all' altro di aria; ma Roy, Luz, e Dalton, che sicuramente non furono meno diligenti, ebbero un successo affatto contrario, e la congettura addotta (14) di Dalton fa sospettare, che con la medesima proporzione il calore non possa cambiare i volumi di fluidi tanto diversi, quanto sono il mercurio, e l' aria.

16.

16. A notizia mia Eulero pure il primo pensò ad esprimere analiticamente per mezzo della distanza v la relazione tra c, e c', ossia la legge Fisica dei cambiamenti del calore nei diversi strati dell' atmosfera, che ancora si richiede per integrare l' equazione (7). Egli mostrò, che il calore non si cambia come la densità, perchè se fosse $c : c' :: \delta : \delta'$, l'equazione $\delta' p c' = \delta p' c$ (11) darebbe $\delta' p^2 = \delta p'^2$, che è contro la legge di Mariotte, e invece stabilì, che se le distanze si prendano in serie aritmètica, il calore si cambii in una serie armonica, che usando dei nostri simboli si potrebbe ridurre alla formola $c' = \frac{c}{1 + iv}$, in cui i è una costante da determinarsi con la osservazione del calore fatta ad una distanza v conosciuta. Ad imitazione di Eulero Lagrange (*Mem. Berlin* 1772) avvertì, che se $i, l \ldots, i', l' \ldots$ siano costanti da determinarsi con le osservazioni del calore fatte in altrettante distanze v conosciute, si potrebbe egualmente pigliare la formola $c' = \frac{c + i'v + l'v^2 \ldots}{1 + iv + lv^2 \ldots}$; ma a questa sostituisce Egli l'altra più semplice $c' = c - iv$. Lambert (*ivi*) poi considerando la tendenza, che il calore ha di propagarsi in alto, deriva la formola $\frac{c}{c'} = 1 + \frac{5}{12}\left(1 - e - \frac{v}{\theta}\right)$, in cui posto e il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico, v deve essere espressa in tese Francesi; delle quali 4200 sono espresse da θ. Finalmente La-Place trattando delle rifrazioni cerca le formole per la relazione $\frac{c'}{c} = \frac{\delta p'}{\delta' p}$ dipendentemente da varie condizioni, e in singolar modo da quella delle densità decrescenti in una progressione media tra la geometrica, e l' aritmetica; trattando però della maniera di misurare le altezze dei luoghi stabilisce, che il calore si cambii come le altezze prossimamente in una serie aritmetica, e per una formola più comoda prende $c' = \sqrt{(c^2 - iv)}$; e pare, che in questa opinione sia stato prevenuto da Saussure (*Journ. de Physique. Decem.* 1788), il quale tra i 45, e i 47 gradi di latitudine fino alla ci-

cima dei più alti monti fa decrescere la temperatura salendo per ogni tesa di 1, 01.^{mo} in estate, e in inverno di 0, 0066.^{mi} di gradi di Reaumur .

17. Prescindendo dalla formola di Lambert le altre si prestano al calcolo quasi egualmente, come oltre agli Autori citati si può vedere presso Hennert, e Oriani; e non è difficile a mostrare, che non sono diverse, quanto forse compajono; perche suppongasi, che i debbasi determinare osservando il calore all'altezza v, dove sia $c - 2c'$; sostituendo questo valore le formole di Eulero, La-grange, e La-Place daranno $i = \frac{1}{v'}$, $i = \frac{1}{2v}$, $i = \frac{3}{4v'}$. Ora l' Eulero avverte, che il freddo dei paesi polari ad eguale pressione fa crescere solamente di un terzo la densità dell' aria, e fuori di quei paesi non pare potersi ammettere che ad una altezza assai maggiore di un miglio d' Allemagna, e inferisce, che l' altezza v, dove il calore c' sia la metà di c, che si trova nello strato infimo dell' atmosfera, debba porsi almeno eguale a quattro di quelle miglia; onde segue, che quell' altezza sarà sempre assai grande in paragone di quelle, che noi possiamo misurare col barometro, e il coefficiente i sarà sempre assai piccolo, e la formola di Eulero diverrà $c' = c - civ$, e l' altra di La-Place $c' = c - \frac{iv'}{2c}$, che solo pel coefficiente del secondo termine sono diverse da quella di La-grange .

18. Ma indarno si tenterebbe di conciliare quelle formole con le osservazioni, dalle quali è noto, che succedono nel calore variazioni grandissime nelle basse regioni dell' atmosfera, e piccolissime nelle alte, dove senza differenza di climi, e di stagioni sembra sussistere una temperatura quasi costante, che poco si allontana dallo zero di Reaumur, come prova dei nostri monti De Luc, e de' Peruviani Bernoulli (*Acta Helvetica T. I, II*) ; inoltre i venti, e massime quelli, che ascendono, e discendono, così confondono li strati dell' atmosfera, che ancora nelle ore del giorno, e ad altezze non molto diverse le variazioni del calore non si possono corrispondere, e si può vederne

le prove presso De Luc, Pictet (*Essai sur le feu Chap. VIII*); e Ramond. Pare dunque che tra i valori c, c', e la distanza v non esista alcuna dipendenza, o relazione certa, che si possa esprimere con qualche formola; quindi tra le riferite di sopra niuna è non contradetta da gravissime difficoltà; poichè, per es., Hennert con sicure osservazioni dimostra, che nella formola di Eulero, e perciò ancora nelle altre (16) il coefficiente i non si può tenere per costante, e non avvertì poi, che senza questa condizione quelle darebbero la relazione tra c, e c' dipendentemente da due variabili i', e v, e perciò indeterminate: e ancora Lagrange prova essersi ingannato De Luc credendo, che la correzione da lui usata per l' effetto del calore dell' aria nella misura delle altezze supponga, che quello si cambii come le altezze in progressione aritmetica; onde a questa progressione stabilita da La-Place saranno contrarie tutte le osservazioni, sulle quali De Luc aveva fondata quella sua correzione. Quindi perfine se alcuna di quelle formole corrisponde a qualche osservazione, devesi attribuire all' ingegno del suo Autore, che da questa stessa ha saputo derivarla, o ancora all' accidente. Così se Say Lussac avesse intrapreso il suo viaggio per l' aria in tutt' altra ora del giorno, o stagione, avrebbe sicuramente trovato il grado del calore molto diverso al luogo della partenza, e quasi lo stesso alla stazione superiore, e La-Place sostituendo quel primo nella sua formola del caso delle rifrazioni, non avrebbe avuto un risultato per soli sei gradi del termometro centigrado diverso dal secondo.

19. Pare adunque, che ancora la formola di La-Place come la legge di Eulero (14) si possa ammettere solo per un mezzo comodo di approssimazione, affine di derivarne delle altre, che si dovranno sottoporre al confronto delle osservazioni. Ora l' espressione di questa legge (11) per la sostituzione di quella formola dà il valore di $\delta' = \frac{c\delta p'}{c'p} = \frac{c\delta p'}{p\sqrt{(c^2 - i'v')}}$, che sostituito nell' equazione (7) dà l' altra

$$\frac{c\delta p' g dv'}{p\sqrt{(c^2 - i'v')}} = - dp'; \text{ ossia } \frac{c\delta g dv'}{p\sqrt{(c^2 - i'v')}} = - \frac{dp'}{p},$$

le

la quale finchè si riporta alla verticale di un luogo dato della superficie terrestre, contiene le sole p', v' variabili separate, e le altre quantità c, δ, g, i, p costanti; laonde se prendasi $e = 2,302585$, che è il logaritmo iperbolico di 10, e L pel segno del logaritmo delle tavole, si avrà integrando

$$\frac{2c\delta g\sqrt{(c^2-i'v')}}{i'p} = e\,\mathrm{L}\,p' + \mathrm{C}\,;$$

e poichè posta $r=0$ diviene $p'=p$, e $\sqrt{(c^2-iv')}=c$, si avrà

$$\mathrm{C} = \frac{2c\delta gc}{ip} - e\,\mathrm{L}\,p,$$ e perciò sostituendo

$$\frac{2c\delta g}{ip}\left[c-\sqrt{(c^2-i'v')}\right] = e\,(\mathrm{L}p-\mathrm{L}p')\,;$$

di nuovo essendo $c-\sqrt{(c^2-i'v')}=c-c'=\frac{(c-c')(c+c')}{c+c'}=\frac{c^2-c'^2}{c+c'}=\frac{i'v'}{c+c'}$,

sarà $$\frac{2c\delta g}{p}\cdot\frac{v'}{c+c'} = e\,(\mathrm{L}\,p-\mathrm{L}p'),$$ e si dedurrà

$$v' = \frac{ep}{2c\delta g}\,(c+c')\,(\mathrm{L}\,p-\mathrm{L}\,p')\,.$$

Per fine se pongasi q il calore assoluto corrispondente allo zero di Reaumur dell' acqua, che gela, e $c=q+t$; $c'=q+t'$; $c+c' = 2q+t+t' = 2q\left(1+\frac{t+t'}{2q}\right)$ determinando i gradi t, t' secondo l' avvertenza data al num. 14 sarà

$$v' = \frac{epq}{c\delta g}\left(1+\frac{t+t'}{2q}\right)(\mathrm{L}\,p-\mathrm{L}p')\,.$$

20. Per la scoperta di Torricelli le pressioni p, p' sono esattamente eguali a quelle, che esercitano le colonne di mercurio osservato nel barometro alle due stazioni corrispondenti; siccome poi queste sono verticali, e di tenue altezza, le pressioni loro saranno come i prodotti della massa di ciascuna nella gravità acceleratrice conveniente alla stazione, in cui si trova, poichè non solo per l'aria (7), ma ancora pel mercurio duopo è tener conto della ineguaglianza della gravità nelle diverse distanze dal centro della Terra, che pare essere stata trascurata generalmente prima di Franceschinis. Ora la massa di ciascuna colonna è come

il prodotto del volume nella densità; e il volume è sempre come l' altezza, perchè la base si prende costantemente espressa dall' unità (7); e la densità è sempre reciprocamente in una certa proporzione col calore, che non meno degli altri corpi dilata il mercurio. Dunque se alle due stazioni inferiore, e superiore dell' altezza v siano h, h' le altezze del barometro; V, V' i gradi del calore del mercurio, che secondo l'insegnamento di De-Luc debbono osservarsi sopra un termometro Reaumuriano annesso al barometro, e si indicano con lettere diverse dalle t, t', perchè per lo più sono diversi dai gradi del calore dell' aria, che si debbono osservare sopra un termometro esposte a questa liberamente; infine se per ora le densità del mercurio in quelle stazioni si pongano corrispondenti alle funzioni del calore $f(q+V)$, $f(q+V')$, che si determineranno abbasso, sostituendo il valore di g' preso dal num. 6 si avrà

$$\frac{p}{p'} = \frac{gh.f(q+V')}{g'h f(q+V)} = \frac{h(z+V)^5.f(q+V')}{h'z^5.f(q+V)} = \frac{h.f(q+V')}{h.f(q+V)}$$

$$\left(1 + \frac{5v}{a} + m\,\frac{5v}{a}\,.\,\text{sen.}^2\Psi + 5\,.\,\frac{5-1}{2a^2}\,V^2\right);$$

$$\text{L}\,\frac{p}{p'} = \text{L}\left(\frac{h.f(q+V')}{h'.f(q+V)}\right) + \frac{1}{e}\left(\frac{5v}{a} + m\frac{5v}{a}\cdot\text{sen.}^2\Psi + 5\,.\,\frac{5-1}{2}\,.\,\frac{v^2}{a^2}\right).$$

21. Ma (7) dalla equazione $g'\delta v = g\delta v'$ si ricava $v' = v\left(1 - \frac{5v}{2a} - \frac{m5v}{2a}\text{sen.}^2\Psi + 5\,.\,\frac{5+1}{2}\,.\,\frac{v^2}{3a^2}\right)$; dunque sostituendo nel valore di v' (18) si troverà

$$v\left(1 - \frac{5v}{2a} - \frac{m5v}{2a}\,.\,\text{sen.}^2\Psi + 5\,.\,\frac{5+1}{2}\,.\,\frac{v^2}{3a^2}\right) =$$

$$\frac{epq}{c\delta g}\left(1 + \frac{t+v'}{2q}\right)\left[\text{L}\,\frac{h.f(q+V')}{h'f(q+V)} + \frac{15}{ae}\left(1 + m.\text{sen.}^2\Psi + \frac{5-1}{2}\,.\,\frac{v}{a}\right)\right].$$

Se Rohde avesse, come ho fatt'io, ridotte in serie le espressioni a misura, che risultano, avrebbe schivata una equazione non molto comoda, che per la integrazione ha richiesto l' uso dei logaritmi insieme, e degli archi di circolo, che senza quelle serie o le tavole non si possono valutare; inoltre avrebbe facilmente riconosciuto, che ancora tenendo conto dei termini affetti dai prodotti di due dimensioni delle quantità m, e $\frac{v}{a}$ riesce (5,6) $z=z'$, e $g=g''$; e che trascurando solamente i termini affetti da questi prodotti, quella equazione si cambierebbe nell' altra, che si troverebbe calcolando nella supposizione della figura sferica della Terra. Ora da questa verità dipende il giudizio sul merito, e l'esattezza delle maniere diverse di calcolare; ma vedrassi in seguito, che La-Place ha tenuto conto ancora di qualche termine affetto da $\frac{mv}{a}$ per la ragione, che in questi calcoli giova adoperare tutte le correzioni certe quantunque piccolissime, per non lasciare sussistere che gli errori inevitabili delle osservazioni, e di altre cagioni, che non si possono al calcolo sottoporre; quindi pare, che Egli non debba trovare superfluo, che si abbia riguardo alla figura sferoidica della Terra, e almeno nella espressione analitica si tenga conto dei termini affetti dello stesso coefficiente $\frac{mv}{a}$, che dipendono da quella figura, onde si avrà con grandissima precisione

$$v\left(1-\frac{5v}{2a}-\frac{m5v}{2a}.\,\text{sen.}^2\Psi\right)=$$

$$\frac{\epsilon pq}{c\delta g}\left(1+\frac{t+t'}{2q}\right)\left[\text{L}\,\frac{h.f(q+V')}{h'.f(q+V)}+\frac{\tau 5}{ae}\left(1+m.\,\text{sen.}^2\Psi\right)\right];$$

22. Dalla trovata equazione è manifesto, che se sia $c=c'$, e $V=V'$, il valore di v sarebbe indipendente dal calore, poichè le $f(q+V)$, $f(q+V')$ non possono non supporsi tali, che essendo $V=V'$, non riescano eguali, e diano $\frac{f(q+V')}{f(q+V)}=1$; se poi sia solamente $c=c'$, ovvero $V=V'$, il valore di v sarà indipendente dal calore dell' aria, ovvero del mercurio; e quindi in un modo diverso, e forse più generale di quello dell' Hennert mi sembra di avere mostrato l' errore di De-Luc, il quale avendo pel primo preso a considerare gli effetti del calore sul mercurio nella misura delle altezze, pretese che la correzione dovesse farsi ancora quando si trovasse $V=V'$ fuori di un certo grado da lui fissato. Ma primamente accade ben rare volte di trovare il calore stesso ad

ambedue le stagioni ; appresso è certo , che non tutti i tempi sono egualmente opportuni per le osservazioni, che debbono servire alle ricerche delle altezze dei luoghi col barometro , e si ingannerebbe chi credesse di poterle pigliare , quando i venti , le pioggie, e altre violente meteore turbano manifestamente lo stato dell' atmosfera ; ma senza dubbio il pregio di questo metodo sarebbe perduto in gran parte , se nelle osservazioni si richiedessero tali condizioni, che difficilmente si potessero ottenere se non restando sopra i luoghi per lungo tempo , o tornandovi più volte . Dunque era duopo di cercare il metodo per svolgere il valore di v ancora dipendentemente da osservazioni istituite in gradi diversi di calore .

23. Avanti La-Place tutti si ridussero a cercare tentando, un coefficiente, che sostituito invece di $\frac{epq}{c\delta g}\left(1+\frac{t+t'}{2q}\right)$ rendesse la formola trovata conforme alle osservazioni ; e il primo ad usare questo metodo fu sicuramente Bouguer (*La figure de la Terre . . . Paris* 1740) ; ma Egli credette , che quel coefficiente si potesse pigliare costante ; laddove De Luc il primo intese, che duopo era porlo variabile dipendentemente dal calore ; e soltanto prese costante la correzione , che doveva aggiungersi , o sottrarsi per ciascun grado di eccesso , o di difetto del calor medio tra le due stazioni sopra un certo stato, che insieme a quella correzione cercò per mezzo delle osservazioni ; quindi pare , che Hennert non sia stato abbastanza giusto mostrando di credere, che quest' Autore abbia preso da Bouguer il suo metodo senza indicare quella notabilissima differenza , che hanno tra loro . De Luc fu seguito da Roy , Shuckburg , e altri ; che solo differivano nel fissare quello stato, e la grandezza di quella correzione; poichè se sia t'' un altro grado di calore misurato sul termometro di Reaumur, e volendo avere l' altezza v in tese di Parigi , invece di quel coefficiente sostituiscasi l' altro $10000\left(1+\frac{t+t'-t''}{2q}\right)$, come si avrà quello di Bouguer ponendo $\frac{t+t'-t''}{2q}=-\frac{1}{30}$, così si avranno quelli di De Luc ponendo $t''=33,5$ e $q=215$; di Roy

ponendo $t''=23,9$, e $q=193$; di Shuckburgh ponendo $t''=23,4$, e $q'=195$, e così dicasi di quelli di Trembley, Kirwan, e altri. Ma questo metodo essendo indirettamente derivato dalle osservazioni con tentativi, non piacque a La-Place, che volendo procedere per una via diretta, invece si accinse a risolvere una delle questioni in fisica oscurissime, cercando il calore assoluto q, che corrisponde allo zero di Reaumur; pel quale intendimento io conosco solamente tre diverse maniere tenute dai Fisici.

24. La prima risulta dalla opinione di Amontons, il quale propose il suo termometro ad aria come un esatto misuratore del calore, in cui sotto la stessa pressione sempre si corrispondano eguali i gradi di questo, e le dilatazioni di quella. Ciò posto, tenendo eguali le pressioni p, p', (11) valerà sempre l' equazione $c\delta=c'\delta'$; e se δ' ritengasi per la densità corrispondente al calore $c'=q$, si avrà $c\delta=\delta'q$, e se $\delta'k$ sia il decremento della densità, che l' aria soffre passando dal calore q ad un altro, per es. agli $q+80$ gradi Reaumuriani, ossia l'incremento che un dato volume d'aria riceve passando dallo zero di Reaumur agli 80 gradi, e che è in ragione reciproca di quel decremento, si avrà ancora $c\delta=80\,\delta'k$, e dividendo quella equazione per questa si ricaverà $q=80k$ di quei gradi. Adunque questa maniera si appoggia alla non bene sicura (12..15) opinione di Amontons, ma inoltre richiede, che si conosca il cambiamento del volume, che soffre l' aria passando da un dato stato di calore ad un altro. Ora le ricerche intorno a questo argomento, che importa moltissimo massime per le teorie delle misure delle altezze col barometro, e delle rifrazioni, cominciate da Hauksbee (*Experim. Phys. mech. T. I. art. IV. Paris.* 1754) furono continuate da celebratissimi Fisici fino a Say Lussac, e la tavola dei risultati avuti prima del 1799 stampata da Kramp (*Analise des Refract. Strasburg*) potrebbe ancora accrescersi con quelli di Hauksbee, di Newton (*Opusc. Vol. II. Genevae*), di Musschembroech (*Inst. Phil. natur. p.* 2160.), e di Cruquius; ma molti differendo spesso più che del doppio, io esporrò solamente i lavori, che in questi ultimi tempi intrapresero Kirwan, e Dalton nell' Inghil-

terra, Luz nella Germania, e in Francia Say Lussac tenendo sempre l'aria a un dipresso sotto la stessa pressione.

25. Kirwan (*of the variations of the atmosph. . : London*) con varii metodi tratta quell'argomento, e secondo lui esprimendo per l'unità il volume dell'aria a 0 di Reaumur, la sua dilatazione da 0 ad 80 gradi riuscirebbe di 0,450. Dalton usando del termometro di Fahrenheith, e per l'unità esprimendo il volume d'aria a 55 gradi trovò, che la sua dilatazione dal grado 55.$^{\text{mo}}$ ai $55+78\frac{1}{2}$ (e non $77\frac{1}{2}$, come sta nella stampa sicuramente per errore) era di 0, 167, e dai gradi $55+78\frac{1}{2}$ fino ai $55+78\frac{1}{2}+78\frac{1}{2}$, ossia fino ai 212 era di 0, 158; laonde se nei 23 gradi, che precedono il 55.$^{\text{mo}}$, l'aria si dilatasse nella stessa ragione come dai $55+78\frac{1}{2}$, si avrebbe $78\frac{1}{2} : 0,167 :: 23 : 0,049$, e la dilatazione totale da 32 a 212 sarebbe di 0,374; se poi, non essendo secondo Dalton la dilatazione uniforme, suppongasi, che tale sia almeno l'eccesso di 0,009 corrispondente a gradi $78\frac{1}{2}$, la dilatazione nei $78\frac{1}{2}$ anteriori al 55.$^{\text{mo}}$ sarà di 0,176, e quella che spetterà ai 23 gradi immediatamente anteriori al 55.$^{\text{mo}}$ potrà porsi di 0,052, e la totale dai 32 ai 212 sarà di 0,377. Ma questi calcoli suppongono espresso dall'unità il volume dell'aria a 55 gradi; e se in vece con quella esprimasi questo volume a 32, il volume a 55 sarebbe 0,948, e la dilatazione di quel volume da 32 a 212, ossia da 0 ad 80 di Reaumur sarebbe nella prima supposizione di $\frac{374}{953} = 0,393$, e nella seconda di $\frac{377}{948} = 0,398$. Per fine tenendo sempre per unità il volume d'aria a 0 di Reaumur, da questo agli 80 gradi trovarono la sua dilatazione di 0,383 Luz, che provolla asciutta come nei giorni d'estate al 50.$^{\text{mo}}$ grado dell'Igrometro di Saussure, e di 0,375 Say Lussac.

26. Dunque non pare ancora con ogni esattezza fissato il

cambiamento di volume, che soffre l'aria cambiando calore, nè questo deve farci meraviglia, poichè secondo le avvertenze di Saussure, Kirwan, e Dalton, in questo genere di esperimenti si moltiplicano gli errori, che nascono dalle misure dei piccoli vasi, dalla adesione dei fluidi coi vetri, dalla azione del calore sopra di questi, e sopra l' umidità, che vi può essere aderente, o che si trova in istato di vapore, dalla rifrazione del lume attraverso ai vetri, pei quali conviene traguardare, e da altre incostanti cagioni. E egli è vero, che Say Lussac ha saputo con grande ingegno schivare il primo errore, poichè egli servissi di un vaso di vetro col collo munito di una chiave pneumatica, che con questo aperto in giù tenne nell' acqua calda ad 80 Reaumuriani, affinchè l' aria dilatandosi in proporzione di questo calore ne uscisse; avendo poi chiusa la chiave sott' acqua trasportollo in un bagno ridotto a 0, e apertolo di nuovo lasciò, che v' entrasse tant' acqua, quanta corrispondesse alla condensazione, che l'aria interna soffrì per quella diminuzione di calore; e paragonando il peso di quest' acqua con quello dell' altra, che riempiè il vaso a 0, ricavò la proporzione tra il volume d' aria, e la sua dilatazione, poichè la differenza di quei pesi sta al minore come il volume d' aria a 0 alla dilatazione, che riceve passando da questo agli 80 gradi. Ma ancora in questo metodo sussistono tutti gli altri errori; e chi vorrà ripetere questo esperimento, vedrà, che l' acqua attratta dal vetro forma intorno al vaso dentro, e fuori un anello, per cui riesce difficilissimo ad assicurarsi, che quella dentro, e fuori si trovi all' istesso livello, come è necessario, perchè l' aria vi ottenga la medesima densità; e forse entrando in sospetto, che Say Lussac non abbia potuto ben calcolare l' effetto della figura concava a cui si riduce la superficie dell'acqua, credeva di avere scoperta la vera cagione, per cui quello ha trovata la dilatazione dell' aria tanto piccola, giacchè non pare, che si possa valutare l' altro sospetto di Gilbert (*Annalen der Physik* 1802 *Zwölfty Stück*), che Say Lussac abbia trascurata la dilatazione del vetro, la quale secondo lui avrebbe accresciuta quella dell' aria di 0,005;

poichè quantunque nella Memoria di quest' Autore non si trovi alcun cenno della correzione dovuta a quella dilatazione, pure La-Place (*Mec. Cel. Vol. IV. pag.* 21, *e* 270) dice espressamente, che quello l' ha usata. Raccolgo dunque, che la maniera per determinare q dipendentemente dalla opinione di Amontons non sembra abbastanza sicura.

27. Lo stesso vale dell'altra maniera, che Crawford (*Exper. and observ. on animal head, and the inflammation of combustibles Bodies. London* 1779) ha derivata dalla nozione del calore specifico, che Wilke (*Neve Schwedische Abhandlungen II. B. Leipzig* 1784) introdusse nella fisica, e Crawford stesso valendosi delle esperienze ancora di Black, e di Irvine, e poi sotto altri nomi Lavoisier, e La-Place (*Mem. Paris* 1783) Sadolin (*de theoria calor. corp. specif. Aboae* 1784), e altri promossero. Se q, e q' siano i calori assoluti, e u, u' i calori specifici, che abbisognano per innalzare d'un grado la temperatura di una massa, o di un volume eguale di due corpi, potranno questi calori riguardarsi come i differenziali di quelli, e sarà $u : u' :: dq : dq'$; se poi suppongasi, che, qualunque siano i calori assoluti q, q', i calori specifici u, u' siano sempre in una ragione costante, o indipendente da q, e q', e viceversa, l' equazione $udq' = u'dq$ si potrà integrare, e darà $uq' = u'q$ senza addizione di costante, perchè q, e q' svaniscono insieme al zero assoluto. Dunque si avrà $q : q' :: u : u'$, e $q : q' - q :: u : u' - u$. Ma l'acqua secondo Wilke calda tra i 58, e 59, e secondo Black calda a 62 gradi Reaumuriani fonde un egual peso di ghiaccio riducendolo in acqua al grado 0. Dunque se q, e q' si riguardino come i calori assoluti dell' acqua, e del ghiaccio, e per la loro differenza media con Lavoisier, e La-Place si prendano gradi 60, si avrà $q' - q = 60$, e poichè dalle tavole di Gren (*Grundris der naturlehre*), e di altri, per l' acqua e il ghiaccio sta $u : u' :: 1000 : 900$, il calore assoluto dell' acqua a 0 risulterà $q = \frac{u(q' - q)}{u' - u} = \frac{1000 \cdot 60}{100} = 600$ gradi Reaumuriani. Ma questa maniera è appoggiata al supposto della ragione costante tra i calori specifici per

tutti i gradi del calore assoluto, che non ha prova alcuna a suo favore; che anzi è contrario alle nozioni del calore latente, poichè una diversa quantità di calore si deve svolgere, o fissare in ciascun corpo, secondochè è meno, o più denso, cioè più o meno caldo; che infine è contradetto dalle esperienze, onde solamente pigliando la proporzione dei calori specifici da corpi diversi espressi in quelle tavole, si vedrà risultare diverso il cercato calore assoluto.

28. Finalmente una terza maniera propose Dalton, il quale avendo supposto, che la forza ripellente di ciascuna particella d'aria sia proporzionale al calore assoluto, da cui è investita, inferì, che questo sia sempre come il diametro della sfera ripellente, o come la radice cubica dello spazio occupato dall'aria, e poichè egli aveva trovato (24), che questa dai 55 gradi ai 212 di Fahrenheith si dilata da 1 a 1,325, formò la proporzione $q+23 : q+180 :: 1 : \sqrt[3]{1,325} :: 1 : 1,0983446$, e derivò $q=1573,42$ gradi di Fahrenheith, che sono 699,3 di Reaumur. Ma lasciando altre cose, che si potrebbero dire, ancora questa maniera è appoggiata ad una ipotesi mancante di prove, e inoltre contraria all'esperienza dentro i limiti, nei quali i gradi del termometro a mercurio secondo De Luc corrispondono a quelli del calore, perciocchè come le differenze delle terze potenze dei numeri, che progrediscono in serie aritmetica, crescono sempre, così le dilatazioni prodotte da gradi eguali di calore dovrebbero nelle alte temperature essere maggiori, che nelle basse, mentre in realtà sono o costanti, o decrescenti (10); se poi queste non si prendano costanti, l'opinione di Dalton conduce all'assurdo, che il calore assoluto non si trova stesso, quando per calcolarlo si prendano le dilatazioni a diversi intervalli; e così per es. partendo dal dato (24), che l'aria da gradi 55 ai 133 $\frac{1}{2}$ si dilata da 1 a 1,167, si troverebbe $q=1714$ di Fahrenheith; e se Dalton rispondesse, che queste difficoltà nascono, perchè il termometro a mercurio non è un esatto misuratore del calore, mostrerebbe Egli stesso la inutilità del suo progetto, poichè finora nè abbiamo quel misuratore, nè pare, che si possa sperarlo.

29. Quantunque le esposte maniere siano tutte sottoposte a gravi difficoltà, pure potrebbe alcuno formare qualche pregiudizio a favore di una tra le due ultime, e contro la prima osservando, che 600, e 699 gradi, che risultano da quelle, sono non molto lontani tra loro, ma lontanissimi dal risultato della prima, che ancora seguendo l' esperienza più favorevole di Say Lussac (24) darebbe al sommo $q = \frac{80}{0,375} = \frac{80000}{375} = 213,33$ gradi. Nondimeno questo esattamente è il valore di q assegnato da La-Place, il quale segue l' opinione di Amontons, e preferisce quella dilatazione 0,375 non solo perchè conosceva la diligenza di quell' esperimentatore, ma ancora perchè Tobia Majer in circostanze eguali l' ha trovata 0,380, ciò, dice Egli (*Mech. cel vol. IV. pag.* 21), che differisce pochissimo dal risultato precedente, col quale le esperienze di Dalton sono perfettamente d'accordo. Quando io lessi questo luogo prima di aver veduto la memoria di Dalton, caddi nell' errore di credere, che la dilatazione dell' aria trovata da questo fosse prossima a quella di Say Lussac più ancora che quella di Majer; in seguito però essendomi assicurato del contrario (25), mi è sembrato di non fare torto ad alcuno, alla dilatazione 0,375 preferendo l'altra 0,380, perchè lasciando le ragioni già addotte (26), questa per l'attestato stesso di La-Place fu trovata da Majer Fisico così esatto, come grande Astronomo con esperienze, delle quali Egli garantisce l' esattezza, questa è ritenuta da Kramp, che la chiama un risultato d'una infinità d'osservazioni fatte dall'Osservatore il più esatto, e il più infaticabile del suo secolo; questa infine stando quasi in mezzo tra quelle di Luz, e di Say Lussac pochissimo si allontana da ambedue, e meno assai di quella di Lussac si scosta da quelle di Dalton, Schmidt, Roy, Saussure, e altri, che possono vedersi presso Kramp, e nelle esperienze loro non tralasciarono alcuna diligenza. Quindi se non ostanti le opposte difficoltà (24) vogliasi ritenere la maniera di Amontons, dovrà porsi $q = \frac{80}{0,380} = \frac{8000}{38} = 210,53$.

30. Ancora per riguardo alle $f(q+V)$, $f(q+V')$, che correggono l'errore risultante dall'effetto del calore sul mercurio, De Luc propose il metodo indiretto di ridurre le altezze barometriche h, h' ad altre due, che si sarebbero trovate, se in ambedue le stazioni stato fosse un certo grado di calore V'', nel quale credeva Egli, che secondo le osservazioni non fosse richiesta alcuna riduzione; e avanti La-Place fu De Luc seguito da tutti, che solo differivano nel fissare la grandezza di quel grado V'', o della correzione, che si doveva usare per ogni grado Reaumuriano delle differenze $V''-V$, $V''-V'$; quindi se una colonna di mercurio per ciascuno di quei gradi si allunghi sempre della sua parte $n'.^{ma}$, la formola $\frac{f(q+V')}{f(q+V)}=\frac{1+n'(V''-V)}{1+n'(V''-V')}$ regolando i segni dei gradi V, V', V'', che qui si suppongono positivi, darà la correzione di De Luc, posto $V''=10$, e $n'=\frac{1}{4320}=0{,}000231$, e quelle di Roy, e di Shuckburgh posto $V''=0$, e $n'=\frac{1}{4116}=0{,}000243$ pel primo, e $n'=\frac{1}{4068}$ pel secondo. Ma La Place insegnò, che per avere la cercata correzione, bastava ridurre le colonne barometriche h, h' ad una medesima temperatura, e scelse poi di ridurre la meno calda h' a quella della più calda, onde risulterebbe $\frac{f(q+V')}{f(q+V)}=\frac{1}{1+n'(V-V')}$; laddove se volesse ridursi la colonna più calda alla temperatura dell' altra si avrebbe $\frac{f(q+V')}{f(q+V)}=\ldots$ $1-n'(V-V')$; e secondo lui è $n'=\frac{1}{4730}=0{,}000211$. Se però bastasse per correggerle ridurre ambidue le colonne ad una medesima temperatura, qualunque questa fosse, chiaro è, che le tre date espressioni di $\frac{f(q+V')}{f(q+V)}$ dovrebbero essere eguali, e la prima dovrebbe essere costante per qualunque valore di V''. Ma con le più facili leggi dell'analisi si può mostrare che questo non è; e la differenza veramente per lo più è dell'ordine di n'^2, e perciò pic-

colissima; ma in qualche circostanza massima tra le due ultime espressioni, e la prima arriva all' ordine di n da non trascurarsi. Dunque sebbene essendo eguale la temperatura ad ambedue le stazioni, non abbisogni alcuna correzione delle colonne barometriche (22), pure in ogni altro caso per correggerle non pare, che basti ridurle ambedue ad una stessa temperatura qualunque.

31. Ora io dichiaro, che nè presso alcun Autore, nè da me ho potuto trovare alcun mezzo diretto, che in questa parte soddisfaccia almeno per approssimazione. Da principio mi sembrò, che potesse giovare la determinazione fatta, o supposta di q (24, e *segu.*); ma riflettendo, che le leggi della dilatazione del calore forse non sono le stesse pel mercurio, e per l' aria (12), e sono meno sicuramente pel mercurio nei due stati di solido, e di fluido, e massime nel passaggio da uno stato all' altro, niuno sicuramente vorrà dire, che la di lui densità sia reciproca al calore assoluto, come si è stabilito dell' aria (11, e *segu.*); e se vi avesse un' altra relazione, non si vede come si possa determinarla. Appresso però sapendo, che le dilatazioni del mercurio nello stato solido debbono essere assai tenui in paragone delle dilatazioni nello stato fluido, e che queste sembrano almeno con leggieri differenze progredire, e crescere corrispondentemente ai gradi del calore, caddemi in mente, che in circostanze pari la densità del mercurio potesse mettersi proporzionale reciprocamente ai gradi del calore, che riceve dopo la sua fusione, toltine alcuni pochi, nei quali sappiamo, che il mercurio accostandosi alla congelazione a guisa dell' acqua si condensa, e soffre anzi qualche dilatazione; ma ancora questo progetto, quantunque recasse il vantaggio di non richiedere la determinazione di n', sulla quale i Fisici non sono ben d' accordo (30), non mi parve poi che una semplice congettura nemmeno esente da ogni difficoltà. Mancando adunque ogni mezzo diretto per correggere gli effetti del calore sul mercurio del barometro, la scelta tra i mezzi indiretti, e di approssimazione, che finora sono stati proposti dipenderà sempre dal confronto delle formole con le osservazioni; e so-

solamente con questo riguardo io porrò $\frac{h.f(q+V)}{h'.f(q+V)} = \frac{H}{H'}$ intendendo per H, H' espresse le colonne h, h' corrette secondo il metodo di La-Place.

32. Facendo questa sostituzione, e moltiplicando per $1 + \frac{vs}{2a}(1 + m.\text{sen.}^2\Psi)$ l'equazione 21 darà

$$v = \frac{epq}{c\delta g}\left(1 + \frac{t+t'}{2q}\right)\left(1 + \frac{vs}{2a}(1 + m.\text{sen.}^2\Psi)\right)\left[L\frac{H}{H'} + \frac{vs}{ae}(1 + m.\text{sen.}^2\Psi)\right].$$

Ma nei diversi luoghi della sferoide terrestre le gravità sono reciprocamente come le distanze dal centro, laonde posta 1 la gravità all' Equatore, starà $1 : g :: z : a$, e (4) sarà $g = \frac{a}{z} = \frac{1}{1 - m.\text{sen.}^2\Psi + \frac{sm.^2\text{sen.}\Psi.\text{cos.}^2\Psi}{2}}$: dunque si avrà l'espressione $v =$

$$\frac{epq}{c\delta}\left(1 - m.\text{sen.}^2\Psi + \frac{sm.^2\text{sen.}^2\Psi.\text{cos.}^2\Psi}{2}\right)\left(1 + \frac{t+t'}{2q}\right)\left(1 + \frac{vs}{2a}(1 + m.\text{sen.}^2\Psi)\right)\Big[L\frac{H}{H'} + \frac{vs}{ae}(1 + m.\text{sen.}^2\Psi$$

invece di cui riguardando la figura della terra come sferica, e per m esprimendo non la sua elitticità, ma il coefficiente di $\text{sen.}^2\Psi$, che determina l' ineguaglianza della gravità sopra la di lei superficie, si troverebbe secondo La-Place l' altra

$$v = \frac{epq}{c\delta}(1 - m.\text{sen.}^2\Psi)\left(1 + \frac{t+t'}{2q}\right)\left[\left(1 + \frac{vs}{2a}\right) L\frac{H}{H'} + \frac{vs}{ae}\right],$$

che svolta darà dei termini affetti da $\frac{mv}{a}$, i quali secondo l' avvertenza già data (21) sembrano richiedere, che almeno nella espressione analitica si ritengano ancora gli altri termini affetti dallo stesso, o da altro analogo coefficiente, che risultano, quando quella figura si considera come sferoidica. Ora da ambedue quelle espressioni è manifesto, che la misura delle altezze col barometro dipende dalla latitudine, in cui queste si trovano; e il primo, che questo dedusse dalla teoria della ineguaglianza della gravità fu sicuramente La-Place; ma Roy fino dal 1777 aveva dedotto dalle osservazioni, che nelle formole spettanti a quella misura conviene introdurre una correzione, che Egli chiama latitudinale, perchè si riferisce alla latitudine, e che altrove sarà paragonata con quella di La-Place.

33. Intanto mi pare, che l'andamento del calcolo, con cui ò dimostrata quella dipendenza, non ammetta alcuna eccezione, e sono certo, che Rohde ancora l'avrebbe riconosciuta se svolte avesse le sue formole, perchè dai termini risultanti dalla ineguaglianza della gravità nella superficie della Terra non poteva prescindere in alcun modo; e se Egli avesse voluto trascurare gli altri, che contengono i prodotti di m, e di $\frac{v}{a}$ di due dimensioni, io consentirei a questo senza difficoltà, poichè questi infatto sono piccolissimi, e senza grande vantaggio per la precisione rendono la formola molto complicata; ma Egli allora avrebbe riconosciuto, che sussisteva l'insegnamento di La-Place, e che inutilmente si era Egli dipartito dalla figura sferica della Terra per riguardarla come sferoidica. Ma ecco dove io penso, che Rohde siasi ingannato opponendosi a La-Place. Al livello del mare l'aria formando uno di quei strati, che diconsi a livello, se pongasi il calore costante, deve in qualunque latitudine esercitare, e soffrire dal mercurio del barometro la stessa pressione p, e avere la stessa densità δ; stando poi sempre a quel livello se nella latitudine, dove è g la gravità acceleratrice, e h l'altezza del barometro, sia Δ la densità del mercurio, e l l'altezza, che avrebbe l'atmosfera, se fino alla sommità conservasse la densità δ, si avrà l'equazione $\delta l = \Delta h$, che è sicurissima presso tutti; in un'altra latitudine poi, dove la gravità acceleratrice sia h'' diversa da g, la densità del mercurio sarà ancora Δ, perchè il calore si ritiene costante, e Rohde afferma di più, che sarà ancora h l'altezza del barometro, perchè, dice Egli, questa non può variare per ragione del calore, da cui essendo costante si prescinde, nè per ragione della compressibilità, che nella colonna del barometro è sempre trascurabile; quindi Egli deduce, che esprimendo la base costante per l'unità, in questa seconda latitudine sarà Δh la massa della colonna barometrica, e $\Delta h g'' = p$ la sua pressione. Ma tenendo il calore costante (11) è $\delta : p :: \delta' : p'$; dunque sarà $p' = \frac{\delta' p}{\delta}$

$\frac{\delta' p}{\delta} = \frac{\delta \Delta' h g''}{\delta} = \delta' l g''$; onde conchiude esser falsa la dimostrazione data da La-Place nel volume primo della Meccanica celeste, la quale evidentemente conduce all' equazione $p' = \delta' l g$.

34. Ma non sembra potersi dubitare, che in quella seconda latitudine l'altezza del barometro debba essere diversa da h, che spetta alla prima, per ragione non del calore, nè della compressibilità, ma della ineguaglianza della gravità; poichè secondo le note leggi dell'Idrostatica il mercurio, che mantiene la stessa densità $\triangle$, non può, cambiandosi la gravità, esercitare la stessa pressione p in ambedue le latitudini, se non ha le altezze proporzionali reciprocamente alle gravità acceleratrici; quindi nella seconda latitudine la colonna del barometro non avrà l' altezza h, ma l' altra $\frac{hg}{g''}$, che eserciterà la pressione $p = \nabla \cdot \frac{hg}{g''} \cdot g'' = \triangle hg$, da cui per la proporzione di sopra espressa $\delta : p :: \delta' : p'$ si ricava $p' = \frac{\delta' p}{\delta} = \frac{\delta' \Delta hg}{\delta} = \delta' l g$, come richiede la dimostrazione di La-Place. Ora io non mi meraviglio, che Rohde non abbia avvertito, che l' altezza del barometro al livello del mare deve crescere, come scema la gravità andando dai poli all'Equatore, perchè nemmeno ho letto alcun altro, che l'abbia indicato; e forse le variazioni molto maggiori, alle quali l' altezza del barometro è sottoposta per altre cagioni nei diversi luoghi della Terra, hanno impedito, che si potesse distinguere l' altra dipendente dalla latitudine, che in una altezza di pollici 28 ai poli nemmeno darebbe la differenza di una linea all' Equatore. Ma quì torna in acconcio l' insegnamento di La-Place (22); e da questo esempio si vede la necessità di ritenere nelle espressioni analitiche alcune correzioni, che in pratica si posson trascurare, perchè senza di queste alcuna volta quelle compajono sbagliate. Del resto se vi ha circostanza, in cui ancora in pratica convenga far uso delle correzioni, che sonosi introdotte nelle formole, sicuramente è, dove queste si vogliono applicare ad osservazioni fatte in latitudini molto diverse, come ha fatto diligentemente Ramond per

quelle da Humboldt prese in vicinanza dell'Equatore; quindi il metodo, e le tavole di Biot, che tutte quelle piccole correzioni ha trascurate, non basterebbero, quando si volesse eseguire il progetto già indicato da De Luc, e rinnovato da La-Place di impiegare insieme alla latitudine, e alla longitudine ancora le osservazioni barometriche per determinare la posizione dei diversi punti della Terra, indicando non solo la loro projezione, ma ancora la loro elevazione sopra la di lei superficie.

35. La formola 32 ponendo $s = 2$, servirà per la legge della gravità proporzionale reciprocamente al quadrato della distanza dal centro della Terra, che vale alzandosi sulla di lei superficie; e ponendo $s = 1$, servirà per la legge della gravità proporzionale reciprocamente alla semplice distanza da quel centro, che vale discendendo sotto alla di lei superficie, onde conviene in questo caso riguardare la v come negativa; e egli è chiaro, che Ramond volendo con le osservazioni barometriche riferite da Humboldt determinare le profondità delle miniere, doveva servirsi della formola ridotta a questa seconda legge. Infine dando ad s il conveniente valore, quella formola servirà alla legge di gravità, che si vorrà considerare. In ciascuna di queste leggi paragonando le altezze con le densità degli strati d'aria corrispondenti, e applicando le formole a casi particolari, si incontrano spesso delle bellissime proprietà; e alcuna volta dei paradossi; io però non mi fermo sopra questi oggetti, che possono vedersi ampiamente trattati dall'Hermanno nella Phoronomia, e dai Matematici già indicati (11).

36. Ora poichè manchiamo di esatte esperienze sopra la relazione tra le densità dell'aria, e del mercurio a qualunque grado di calore, da cui dipende il coefficiente $\frac{pq}{c\delta}$ della formola 32, converrà invece tutt'insieme dedurre il coefficiente $\frac{epq}{c\delta}$ dal paragone delle altezze barometriche con le altezze misurate con le operazioni trigonometriche. E veramente se ad una latitudine data Ψ con queste si misuri un'altezza v, e alle sue estremità si osservino i

gradi di calore t, t', e deducansi le altezze barometriche H, H', e in fine in quella formola ridotta alla legge di $s=2$, oltre a quelle quantità sostituiscansi i valori di m (3), di $\frac{v}{a}$ (5), di q (29) nel divisore di $t+t'$, e di e (19) nel divisore di vs, chiaro è, che si potrà tutt' insieme trovare il valore del coefficiente $\frac{epq}{c\delta}$ espresso nelle misure stesse di v, il quale non apparterrà a quella sola latitudine Ψ, ma a tutte quante, poichè le grandezze e, $\frac{p}{c\delta}$, q sono le stesse per tutta la superficie della Terra. Così Ramond paragonando un gran numero di misure trigonometriche di Monti con le misure loro prese col barometro ha trovato, che verso il parallelo di 45 gradi di latitudine era $\frac{epq}{c\delta g} = 18336$ metri; ma per quel parallelo (32) è $g = \frac{1}{1-m.\text{sen.}^2\Psi + \frac{sm^2.\text{sen}^2\Psi\cos^2\Psi}{2}} = 1 + \frac{m}{2} - \frac{3m^2}{8}$ dunque sarà $\frac{epq}{c\delta} =$ metri $18336\left(1 + \frac{m}{2} - \frac{3m^2}{8}\right)$; e se pongasi

$$18336\left(1-m\,\text{sen.}^2\Psi + \frac{sm^2.\text{sen.}^2\Psi.\cos^2\Psi}{2}\right)\left(1+\frac{m}{2}-\frac{3m^2}{8}\right) =$$

$$18336\Big(1 + \frac{m.\cos.2\Psi}{2} - \frac{m^2}{4}\Big(\frac{1}{2} - \cos.2\Psi + \frac{5}{4}.\cos.4\Psi\Big) = \text{M},$$

la espressione 32 darà in metri il valore di

$$v = \text{M}\left(1+\frac{t+t'}{2q}\right)\left(1+\frac{vs}{2a}(1+m.\text{sen.}^2\Psi)\right)\left[\text{L}\,\frac{\text{H}}{\text{H}'} + \frac{vs}{ae}(1+m\,\text{sen.}^2\Psi)\right]$$

37. Ma ecco qualche riflessione, per cui si potrebbe desiderare un' altra determinazione del coefficiente M. Scorrendo la memoria di Ramond pare, che Egli abbia trovato questo coefficiente con la formola corrispondente al primo metodo dato da La-Place (*Exposition du sisteme &c.*), la quale esprimendo il calore coi gradi Reaumuriani sarebbe $v = \frac{epq}{c\delta g}\left(1 + \frac{t+t'}{2.200}\right)\text{L}\,\frac{\text{H}}{\text{H}'}$, e che è mancante dei termini dipendenti dalla ineguaglianza della

la gravità per le distanze dal centro della Terra tanto sull' aria, quanto sul mercurio; e quand' anche in quella formola avesse Ramond presa v' invece di v, come scrive La-Place, pure mancherebbe sempre il termine risultante dalla ineguaglianza della gravità sul mercurio; e poi in ambedue i casi il divisore di $t+t'$ è 2.200, laddove dovrebbe essere (28) secondo me 2.211, e secondo lo stesso La-Place 2.213; ora per questa sola differenza il coefficiente $\frac{epq}{c\gamma g}$ riuscirebbe sicuramente minore di 18336, e si scosterebbe meno dall' altro di metri 17971,1, che Egli aveva posto nella esposizione del sistema del mondo. E io so bene, che secondo la di lui asserzione (*Mec. cel. vol. IV*) si soddisfa assai bene alle osservazioni usando nella formola il fattore $\frac{t+t'}{2.200}$ invece dell' altro $\frac{t+t'}{2.213}$. Ma a qual fine si sarebbe Egli data tanta pena per determinare questo fattore direttamente con la teoria, se poi si doveva cambiarlo per rendere la formola corrispondente alle osservazioni? perciocchè allora questa pure diviene empirica, e non vi ha più ragione, per cui debbasi preferirla a quella di De Luc, o di alcun altro de' suoi seguaci, che soddisfa egualmente a molte osservazioni, e per lo meno è più semplice, e facile da calcolarsi. Io dunque tornerò altrove sopra questo argomento; e mi rincresce, che non potrò approfittare direttamente dei travagli di Ramond, il quale pare, che si dolga di Saussure, perchè ha pubblicato solamente il risultato, e non il dettaglio di alcune sue osservazioni, e poi lo ha imitato Egli stesso, che per una sola delle sue quattro osservazioni ci ha fatto sapere lo stato del calore delle colonne barometriche; ma procurerò di supplirvi con le osservazioni di altri, ai quali ancora mi sembra, che debbasi avere qualche riguardo, e inoltre dai calcoli stessi di Ramond cercherò i valori diversi di $L\,\frac{H}{H'}$, che sostituiti nelle formole (32) serviranno a farci conoscere il coefficiente M.

38. La formola (36) svolta in tutti i suoi termini si riduce ad una equazione del secondo grado, da cui si potrà derivare l' espressione analitica di v; ma questa essendo assai complicata forse riuscirà più facile il calcolarne il valore col metodo di Hennert, a cui è simile quello di La-Place; poichè se nel secondo membro di quella formola suppongasi $v=0$, si avrà $v = M\left(1 + \frac{t+t'}{2q}\right) L \frac{H}{H'}$; e se in questa espressione facciansi le opportune sostituzioni, si troverà un valore prossimo di v, che si potrà poi in quel secondo membro sostituire per ottenerne il valore, che si accosti meglio all' esattezza. Nè io temo, che alcuno opponga la lunghezza dei calcoli, che queste operazioni richiedono, perchè il lavoro non deve stimarsi mai troppo, quando serve a rendere il risultato meno inesatto; e poi io in queste formole ho tenuto conto di alcuni termini affetti dai prodotti di due dimensioni di m, e di $\frac{v}{a}$, solo per mostrare fino a qual segno quelle dipendano dalla sferoicità della Terra, a cui Rohde ha voluto avere riguardo; ma se prendasi il partito di trascurare quei termini, che in verità sono piccolissimi, si vedrà, che quelle formole perdendo pochissimo per l' esattezza, acquistano una semplicità meravigliosa, che rende ambedue quelle operazioni facilissime.

39. Ma oltre alle cagioni finora esposte ancora altre influiscono sopra la misura delle altezze col barometro, perchè a cagion d' esempio l' attrazione delle montagne alla cima si unisce, alla base si oppone alla attrazione della Terra, e accresce in quella stazione, e diminuisce in questa la gravità; i venti massime ascendenti, o discendenti diminuiscono, o accrescono la pressione dell' aria; l' umidità ancora di questa pare che crescendo, ricerchi qualche diminuzione del divisore di $t+t'$, perchè tra le formole, che prima si usavano, trovavasi migliore per l' aria secca quella di De Luc, per l' umida quella di Shuckburgh, per l' umidissima quella di Roy; quindi ottimamente fanno quelli che pigliando le osservazioni cercano di fissare anco-

cora lo stato, e gli effetti di queste cagioni, che si sottraggono ad ogni calcolo, e che insieme alle inesattezze già notate di sopra, massime nelle leggi dell'azione del calore, impediranno sempre, che ancora dopo di avere eseguite le operazioni prescritte si ritrovi il risultato corrispondente alle osservazioni. Ma del paragone tra queste, e le formole trovate secondo la Teoria da La-Place, o semplicemente dedotte da altri con tentativi, io dirò in altro luogo.

SULL' ESPERIMENTO POLENIANO DELLA CADUTA DE' GRAVI IN MATERIE CEDEVOLI

MEMORIA

Del Sig. Ab. Angelo Zendrini

Presentata dal Sig. ANTONIO CAGNOLI

Il dì 16 *Giugno* 1806.

Se il noto sperimento esposto dal Poleni nel suo Trattato delle Pescaje o Cataratte n.° 101, e ripetuto posteriormente con diverso successo, è indifferente, com' è dimostrato, all' oggetto di definire la disputa per cui si volle inventare, può peraltro essere argomento, mi sembra, di una che io sappia non ancor fatta e non inutile ricerca, atta a recare lume a chiunque piacesse di ripetere quell' esperimento medesimo. La ricerca è la seguente

Dati due corpi di volume uguali e simili, ma di masse in ragione reciproca delle altezze, dalle quali cadono su una materia molle e omogenea in tutte le sue parti, si dimanda se le cavità, che produrranno, saranno uguali.

Che in qualunque ipotesi di resistenza comunque variabile gli effetti prodotti da certi corpi, e che rappresentati vengono dalle resistenze pegli spazj percorsi, sieno uguali, è cosa dimostrata, come lo è pure (*V. Mem. sulla inutilità della Questione intorno alla misura delle forze vive*: Zendrini) che nel caso in cui la resistenza sia costante, non solo gli effetti totali, ma le sole cavità ancora serbano tra loro ragione di uguaglianza.

Ma il caso ipotetico della forza di resistenza costante è egli quello della natura?

Sebbene la teoría della resistenza de' fluidi malgrado gli studj di molti celebri Matematici non sia giunta per anco alla sua perfezione, ciò non toglie per altro che si conoscano le cause, per cui un corpo che si muove in un fluido, incontrar deve una resistenza. Sono queste, la coesione delle parti del fluido, e la sua inerzia. La resistenza proveniente dalla prima di queste due cause si sa essere proporzionale alla semplice velocità; siccome quella che proviene dalla seconda è in ragione del quadrato della velocità del corpo che per entro il fluido si muove.

Quantunque i Fisici qualora trattano della resistenza de' mezzi si restringano a considerare soltanto i fluidi propriamente tali, siccome quelli de' quali più interessa conoscere le affezioni, non essendovi, moto in natura, che non venga se non da altro ritardato da un mezzo ch' è fluido; egli è però indubitato che le stesse cause di resistenza agir devono pure nelle particelle di un qualunque altro corpo, se non fluido, molle, e tale che considerato venga come uno spazio materiale per cui trapassa un corpo movendosi, ossia come un mezzo per entro cui esso si muove. Imperciocchè nessuno negherà certamente che movendosi un corpo in una materia molle, vincer deve la coesione per cui le particelle di essa aderiscono tra loro: e parimenti mi sembra non esservi dubbio che la inerzia delle particelle della materia suddetta, le quali il corpo avanzandosi in essa percuote successivamente, produr deve una resistenza crescente in proporzione del numero delle particelle che vengono urtate in ugual tempo; inoltre questa resistenza crescer deve ancora in proporzione della forza con cui le particelle vengono urtate dal corpo, la qual forza, restando il corpo lo stesso, cresce in ragione della di lui velocità. Quindi la resistenza totale che proviene dalla inerzia della materia molle dee essere proporzionale al quadrato della velocità del corpo che si muove per essa, locchè è appunto ciò che i Fisici dimostrano accadere ne' fluidi propriamente detti. Posto pertanto il principio che la resistenza la quale opponesi da un mezzo qualunque si sia, non è mai una forza costante, dovendo per ciò che si è detto essere in parte proporzionale alla semplice velocità, con cui si muove il corpo che penetra in esso mezzo, ed in parte proporzionale al quadrato della velocità, entriamo nell' esame del proposto quesito.

Per ritrovare il rapporto tra i due spazj, ossia tra le due cavità formate dalle due palle nel quesito enunziate, converrebbe introdurre nelle note formule pei moti ritardati la legge delle resistenze esposta. Egli è ben vero che trattandosi di moti rapidi, che si eseguiscono ne' fluidi, si suole trascurare la resistenza che nasce dalla coesione delle parti, la quale diviene poco sensibile in confronto dell' altra ch'è proporzionale al quadrato della velocità. Questo per altro non può aver luogo essendo piccola la velocità del corpo, come avviene negli sperimenti che danno occasione al quesito. Di più, alla tenacità delle parti della materia, in cui si fanno gli sperimenti, è da aggiugnersi l' azione dell' attrito delle particelle tra di loro, e di esse col corpo che vi s' immerge, dal che rilevasi dover succedere alterazioni sensibili nel rapporto della legge di resistenza proporzionale al quadrato della velocità.

Queste considerazioni fanno adunque che introdur convenga nelle formule pei moti ritardati una espressione generale, la quale soddisfacendo alla indicazione di un rapporto qualunque si sia della resistenza colla velocità, serva a farci risolvere in un modo generale il proposto quesito.

La formula generale pei moti ritardati è $r\partial s = -mu\partial u$. Sostituiscasi pertanto ad r, φu, indicando φ quella funzione qualunque della velocità ch' esprime il generale rapporto tra essa e la resistenza. Chiamata m la massa di una di esse palle, u la velocità acquistata nella discesa, s lo spazio ch'essa percorre introducendosi nella materia molle; come pure chiamata M la massa dell' altra palla, V la velocità nella discesa acquistata, S lo spazio da essa percorso nella materia istessa, si avrà per la prima $\varphi u\partial s = -mu\partial u$, e per la seconda $\varphi V\partial S = -MV\partial V$.

Essendo, come si è posto, le masse in ragione reciproca dei quadrati delle velocità rispettive, si ha $mu^2 = MV^2$; e quindi differenziando $mu\partial u = MV\partial V$. Ma $\varphi u\partial s = -mu\partial u$, e $\varphi V\partial S = -MV\partial V$: dunque, come si sa, $\varphi u\partial s = \varphi V\partial S$. Queste uguali quantità sono il prodotto ciascheduna di due fattori, l'una di $\varphi u \times \partial s$, l' altra di $\varphi V \times \partial S$. Ora perchè un fattore di una di queste quantitità fosse uguale al fattore omologo dell' altra, sarebbe mestieri che l' altro fattore parimenti ch' entra a comporre uno de' due prodotti, fosse uguale al fattore corrispondente dell'altro prodotto. Quindi è che se ∂s deve essere lo stesso che ∂S, ossia $\int \partial s = \int \partial S$, egli è forza che anco φu sia uguale a φV. Ma nel nostro caso φu e φV non potranno mai essere uguali essendo funzioni simili di velocità diverse. Dunque neppure $\int \partial S$ potrà essere uguale a $\int \partial S$; ch' è quanto dire le cavità prodotte da due corpi di figura simili, ma di masse in ragione reciproca dei quadrati delle di loro velocità rispettive, cadenti in una materia molle, che si suppone in tutte le sue parti omogenea, non potranno essere uguali.

Corol. 1. Da ciò si deduce che minore dovrà essere la cavità prodotta da quello de' due corpi ch' essendo di massa minore vi cade da maggiore altezza. Poichè essendo in ambedue i casi la resistenza, come una data funzione della velocità del corpo che cade sulla materia molle, crescendo la velocità del corpo, crescerà pure la resistenza che incontra; e siccome poi i prodotti, per ciò ch' è dimostrato, delle resistenze vinte pegli spazj percorsi devono essere uguali, così la maggioranza di resistenza vinta sarà a discapito dello spazio che percorrerà il corpo.

Corol. 2. Dalle cose dette si deduce parimenti che crescendo la differenza della velocità tra i due corpi, conservando essi però sempre tra le masse e le velocità rispettive la proposta ragione, crescer deve la differenza fra le due cavità. Infatti essendo come sopra $\varphi u \partial s = \varphi V \partial S$, quanto più il valore di φV sarà maggiore di quello di φu, tanto minore, fatte le integrazioni, dovrà esser il valor dell' altro fattore del primo prodotto in confronto dell' omologo fattor del secondo.

Questi risultati che ottengonsi dalla teoria non hanno talvolta esattamente luogo nella pratica. Le circostanze particolari imprevedute o non conoscibili della materia, su cui si fanno gli sperimenti, inducono sensibili alterazioni, le quali per essere spiegate, converrebbe poter mettere a calcolo le differenze delle particolari località. Infatti al Poleni e ad altri Fisici di autorità gravissima successe di riscontrare la uguaglianza nelle cavità prodotte dalle due palle. Procede forse questo fenomeno da quelle medesime cause locali, per cui lo stesso corpo cadendo nella stessa materia dalla medesima altezza, non produce le molte volte fossa parimenti profonda. Ciò ch' è cagione di disuguaglianza in questo caso, produce la uguaglianza nell'altro succedendo locali compensi di resistenze.

PROBLEMA GEOMETRICO

DEL SIG. GIANFRANCESCO MALFATTI

FRA I TRIANGOLI EQUILATERI, I QUADRATI E IL CIRCOLO, CHE SI POSSONO INSCRIVERE IN UN DATO TRIANGOLO, SCEGLIER LA FIGURA DELL' AJA MASSIMA.

Ricevuto il dì 17 Giugno 1806.

Per chi lavora in pietre dure, come sarebbero le *agate*, le *corniole*, i *marmi preziosi* ec. potrebbe molte volte, esser utile il sapere, come si debba operare per cavar da un pezzo di pietra irregolare, la regolar figura più grande, sopra la quale formar poi le ideate incisioni. Io comincio dalla figura triangolare equilatera, massima fra tutti gl' infiniti triangoli equilateri, che si possono in essa inscrivere; o quando poggiano i loro angoli sui tre lati rispettivamente del dato triangolo; o quando il vertice di un solo angolo, comune col vertice di un altro angolo della figura, e 'l lato opposto e quest' angolo è collocato sul lato opposto della stessa figura.

Sia pertanto ABC il dato triangolo irregolare (fig.ª 1.ª), e supposto in esso inscritto il triangolo equilatero DOF, cercar debbansi i rapporti, che hanno tra loro le rette AD, AO. Si faccia pertanto $AD = p$; $AO = q$; il seno dell' angolo $A = S.a$; il seno dell' angolo $C = S.c$, e quindi riuscendo l' angolo $B = 2r - A - C$ rappresentando r l' angolo retto, sarà il seno di $B = S.(2r - A - C) = S.(a + c)$ riferiti tutti questi angoli al raggio 1. Dal punto D si tiri la normale DE al lato AC, e per ragione del triangolo rettangolo ADE varrà quest' analogia $1 : S.a :: p : DE = pS.a$. Indicati poi i coseni dei suddetti angoli col simbolo C avremo $1 : C.a :: p : AE = p\,C.a$. Quindi risulta $EO = q - pC.a$. Si chiami ora il lato DC del triangolo equilatero inscritto $= y$, e O l' angolo AOD. Il triangolo

DEO ci somministra le due seguenti analogie $1 : S.o : : y : pS.a$; $1 : C.o : : y : q - pC.a$; e quindi abbiamo $S.o = \frac{pS.a}{y}$; $C.o = \frac{q - pB.a}{y}$. Ma l' angolo O, unito all' angolo di 60 gradi adjacente del triangolo equilatero inscritto con di più l'angolo FOC viene a formare 180 gradi; sarà quindi l' angolo $FOC = 180 - 60 - O = 120 - O$, e però il terzo angolo, nel triangolo $FOC = 180 - 120 + O - c = O + 60 - c = O + \frac{2r}{3} - c$; e il seno di quest'angolo $= S.(O + \frac{2r}{3} - c)$, ma per la teoria dei seni, e coseni, della somma di due angoli, diventa $S.(O + \frac{2r}{3} - c) = S.OC.\left(\frac{2r}{3} - c\right) + C.OS.\left(\frac{2r}{3} - c\right)$; poichè i lati del triangolo sono in proporzione dei seni, sarà $OC : y : : S.OC.\left(\frac{2r}{3} - c\right) + C.OS.\left(\frac{2r}{3} - c\right) : S.c$. Per lo stesso teorema dei lati in ragione de' seni degli angoli, chiamato $AB = f$, sarà $S.c : S.(a+c) : : f : AC = fS.\frac{(a+c)}{S.c}$, onde si trae $OC = fS.\frac{(\ +c)}{S.c} - q$. Valendoci pertanto di questa espressione di OC nella superiore analogia, e invece di $S.O$, $C.O$ sostituendo i valori già trovati, avremo

$$fS.\frac{(a+c)}{S.c} - q : y : : \frac{pS.aC.\left(\frac{2r}{3} - c\right) + qS.\left(\frac{2r}{3} - c\right) - pC.aS.\left(\frac{2r}{3} - c\right)}{q} : S.c,$$

onde risulta l' equazione $fS.(a+c) - qS.c = pS.aC.\left(\frac{2r}{3} - c\right) + qS.\left(\frac{2r}{3} - c\right) + pC.aS.\left(\frac{2r}{3} - c\right) = pS.\left(a + c - \frac{2r}{3}\right) + qS.\left(\frac{2r}{3} - c\right)$, pel teorema trigonometrico del seno della differenza di due dati angoli, ossia $fS.(a+c) = pS.\left(a + c - \frac{2r}{3}\right) + qS.c + qS.\left(\frac{2r}{3} - c\right) = pS.\left(a + c - \frac{2r}{3}\right) + qS.c + qS.\frac{2r}{3}C.c - qC.\frac{2r}{3}S.c = pS.\left(a + c - \frac{2r}{3}\right) + qS.c + \frac{\sqrt{3}}{2}qC.c - \frac{1}{2}qS.c = pS.\left(a + c - \frac{2r}{3}\right) + \frac{1}{2}qS.c + \frac{\sqrt{3}}{2}qC.^{c}$

$=$

$= p\,S.\left(a+c-\frac{2r}{3}\right)+q\,S.\left(c+\frac{2r}{3}\right)$, ovvero

$$p=\frac{fS.(a+c)-qS\left(c+\frac{2r}{3}\right)}{S.\left(a+c-\frac{2r}{3}\right)},\ \text{e}\ q=\frac{f\,S.(a+c)-pS.\left(a+c-\frac{2r}{3}\right)}{S.\left(c+\frac{2r}{3}\right)}.$$

Essendo poi DO $= y = \sqrt{\overline{DE^2+EO^2}}$, passando ai quadrati colla sostituzione dei valori di DE, ed EO sopra trovati, sarà $y^2=p^2S.^2a+q^2-2pqC.a+p^2C.^2a=p^2+q^2-2pqC.a$. Per comodo si faccia $fS.(a+c)=g$; $S.\left(a+c-\frac{2r}{3}\right)=k$; $S.\left(c+\frac{2r}{3}\right)=h$ e nasce sostituendo questi simboli $q=\frac{g-kp}{h}$, e risulterà quindi $y^2=\frac{h^2p^2+g^2-2gkp+k^2p^2-2ghpC.a+2hkp^2C.a}{h^2}$ $=\frac{(k^2+h^2+2hkC.a)p^2-2p(gk+ghC.a)+g^2}{h^2}$, equazione, che può anche assumere la seguente forma $p^2(-2gp)\frac{(k+hC.a)}{k^2+h^2+2hkC.a}$ $=\frac{h^2y^2-g^2}{k^2+h^2+2khC.a}$; e compiendo il quadrato nel primo membro, e fatte le necessarie riduzioni, si avrà $\left(\frac{g(k+hC.a)}{k^2+h^2+2hkC.a}-p\right)^2$ $=\frac{h^2y^2}{k^2+k^2+2hkC.a}-\frac{q^2S.^2a\,h^2}{(k^2+h^2+2hkC.a)^2}$. Si faccia $\frac{g(k+hC.a)}{k^2+h^2+2khC.a}$ $-p=x$, e l' equazione si potrà trasformare in quest' altra, $x^2+\frac{g^2S.^2a\,h^2}{(k^2+h^2+2hkC.a)^2}=\frac{h^2y^2}{k^2+h^2+2hkC.a}$; che è un' equazione all' iperbola conica riferita alle ascisse dal centro, al secondo asse, in cui si può supporre insistere ad angolo retto le coordinate x, y, e nella quale il primo semiasse si troverà essere $\frac{gS.a}{\sqrt{k^2+h^2+2hkC.a}}$, ed il secondo $\frac{ghS.a}{\sqrt{k^2+h^2+2hkC.a}}$. Ridotta per tal modo l' equazione egli è certo, che cominciando le ascisse x dal centro, le ordinate rappresentano tutte le grandezze possibili dei lati dei triangoli equilateri, che poggiano cogli an-

angoli sui lati del triangolo ABC, se occorre prodotti. Ciò posto, egli è evidente, che il lato del triangolo minimo inscrittibile dovrà essere eguale al primo semiasse, che è la più corta ordinata, che condur si possa alla curva, e questa vien data dall'equazione, quando sia $x=0$. Ma per la sostituzione da noi fatta, supposta $x=0$, diventa $p=\frac{g(k+hC.a)}{k^2+h^2+2hkC.a}$, e a questo valore corrisponde per quello di y ossia del lato del triangolo equilatero inscrittibile il valore del primo semiasse della medesima iperbola $=\frac{gS.a}{\sqrt{k^2+k^2+2hkC.a}}$. Dunque al caso che piaccia d' inscrivere nel dato triangolo ABC, il minimo equilatero, che poggia coi suoi tre angoli sui lati del medesimo, sostituiti invece dei simboli g, h, k, i valori dati pei cogniti a, c, f, si potrà determinare la posizione di questo minimo triangolo.

Considerato il nostro triangolo ABC (fig. 2ª) nella posizione, che gli abbiamo data al principio, nella quale si stabilisce l' angolo B il massimo dei tre angoli, l' angolo C il medio, e A il minimo, supposto che la somma dei due angoli C, A sia maggiore di 60°, o di $\frac{2r}{3}$, onde rimanga $k=S.\left(a+c-\frac{2r}{3}\right)$ un seno positivo; ripresa l'equazione $p=\frac{f\,S.(a+c)-qS.\left(c+\frac{2r}{3}\right)}{S.\left(a+c-\frac{2r}{3}\right)}$ si vegga qual valore di q corrisponde alla ipotesi di $p=0$. Nel qual caso dev' essere $q=f.\frac{S.(a+c)}{S.\left(c+\frac{2r}{3}\right)}$, e questo valore di q diventa il lato di uno di quei triangoli equilateri, che poggiano coi loro angoli su i lati del detto triangolo ABC, se occorre prodotti. Ma siccome abbiam supposto l' angolo A il minimo dei tre del dato triangolo, essendo questo per necessità un angolo minore di 60°, a formare l' equilatero corrispondente alla nostra ipotesi, converrebbe aggiungere verso la sinistra all' A, l' angolo di complemento a 60°, il che mette necessariamente una porzione di questo equilatero fuori dell' aja del dato, e non fa al caso del nostro problema. Anche prendendo nel lato AB alcuni valori di p ad arbitrio, dati i quali resteran cogniti i corrispondenti di q, vi saranno molti casi, nei quali la linea congiungente gli estremi di p, e di q, farà angoli minori di 60° colla porzione, che nel lato AB va verso B, onde in tutti questi casi i triangoli equilateri competenti usciranno in parte fuori della figura, e il primo, che potrà restar tutto dentro la medesima, sarà il triangolo BHP, nel quale HP fa un angolo di 60° con BP, la qual cosa io dimostro così

L'equazione $p = \dfrac{f\,S.(a+c) - S.\left(c + \frac{2r}{3}\right)}{S.\left(a+c-\frac{2r}{3}\right)}$ ci fa conoscere che calando p, cresce q, dal che si conclude, che preso qualunque valore AT minore di AP, poichè ad esso dee corrispondere q maggiore di AH, la retta congiungente gli estremi di queste due, sarebbe il lato dell' equilatero competente ai suddetti valori di p, e di q. Ora tal retta tagliando necessariamente in qualche punto la PH, fa essere l'angolo esterno BPH di 60° maggiore dell' interno fatto da B, e dalla retta che unisce gli estremi di questi nuovi valori di p, e di q. Per formare l' equilatero corrispondente al suddetto lato siamo costretti ad uscir fuori della figura, il qual raziocinio valendo per tutti i casi de' valori di p minori di AP, resta dimostrato che il primo equilatero incluso nella figura è il triangolo BPH. Il lato BH di questo primo triangolo è minore di BQ; imperciocchè essendo l' angolo BHP di 60°, sarà l'angolo BHQ maggiore di 60°, cioè maggiore dell' angolo BQH, che si è fatto di gradi 60: onde $BQ > BH$.

Essendo la AR il lato del triangolo equilatero corrispondente all' ipotesi di $p=0$, e per la proprietà dell' iperbola, che rappresenta colle sue ordinate i lati di questi equilateri, a misura, che cresce p, diminuendosi queste ordinate, sino alla minima, vi sarà benissimo una ordinata, prima che si arrivi alla minima eguale alla BQ; ma poichè abbiamo dimostrato, che quando è

p=AP, il lato PH è minore di BQ, resta chiaro che il valore di p, da cui nasce il lato dell' equilatero = BQ, resta minore di AP, e forma conseguentemente un angolo minore di 60° coll' inferior residuo del lato AB, e quindi non si può avere che un equilatero inutile pel nostro intento. Se si prendono valori di p maggiori di AP, la proprietà dell' iperbola ci avvisa, che i lati degli equilateri risultanti, andranno sempre diminuendo sino al minimo, oltre il quale comincieranno a crescere nuovamente: ed è evidente, che non potendo le ascisse p dell' iperbola adattate alla figura del dato triangolo ABC, crescer più oltre del valore di p=AB; se faremo l' ipotesi di $p=f$, il lato dell' equilatero ad essa corrispondente per la nostra figura sarà il massimo dopo il minimo; e se noi dimostreremo, che tal massimo è ancora minore di AQ, quando con AQ si possa inscrivere nella figura un triangolo equilatero, resterà anche dimostrato, che questo sarà il massimo inscrittibile nel triangolo dato.

Tale dimostrazione però avrà luogo quando essendo A + C maggiore di 60°, sia il medio angolo C minore di 60°. Fatto pertanto $p=f$, nella equazione $p=\dfrac{fS.(a+c)-qS.\left(c+\frac{2r}{3}\right)}{S.\left(a+c-\frac{2r}{2}\right)}$, nasce

$$q=\frac{fS\,(a+c).-fS.\left(a+c-\frac{2r}{3}\right)}{S.\left(c+\frac{2r}{3}\right)}=\frac{fS.(a+c).1-C\frac{2r}{3}+fC.(a+c)S.}{S.\left(c+\frac{2r}{3}\right)}$$

$$=\frac{fS\,(a+c)C.\frac{2r}{3}+fC.(a+c)S.\frac{2r}{3}}{S.\left(c+\frac{2r}{3}\right)}=\frac{fS.\left(a+c+\frac{2r}{3}\right)}{S.\left(\frac{2r}{3}+c\right)}$$, e poichè nel triangolo ABC sta $S.120°=S.60°=S.\frac{2r}{3}:S.\,ABQ=S.\left(\frac{2r}{3}-a\right)::f:AQ$, sarà $AQ=\dfrac{fS.\left(\frac{2r}{3}-a\right)}{S.\frac{2r}{3}}$. Ora io dico essere

$\frac{f\,S.\left(\frac{2r}{3}+a+c\right)}{S.\left(c+\frac{2r}{3}\right)}$ maggiore di $\frac{fS.\left(\frac{2r}{3}-a\right)}{S.\frac{2r}{3}}$. Fatta tale ipotesi risulta $S.\frac{2r}{3}.S.\left(a+c+\frac{2r}{3}\right) > S.\left(\frac{2r}{3}-a\right)S.\left(c+\frac{2r}{3}\right)$, cioè $S.\frac{2r}{3}S.a,C.\left(\frac{2r}{3}+c\right)+S.\frac{2r}{3}\,C.a\,S.\left(\frac{2r}{3}+c\right) > S.\frac{2r}{3}\,C.a\,S.\left(\frac{2r}{3}+c\right) - C.\frac{2r}{3}S.\,a\,S.\left(\frac{2r}{3}+c\right)$, ossia $S.\frac{2r}{3}\,S.a\,C.\left(\frac{2r}{3}+c\right) + C.\frac{2r}{3}S.\,a\,S.\left(\frac{2r}{3}+c\right) > 0$, ovvero $S.a.S.\left(\frac{4r}{3}+c\right) > 0$. Ma per essere C, secondo l'ipotesi, minore di $\frac{2r}{3}$, ossia di 60°, mentre $\frac{4r}{3}$ è 120°; risulta $S.\left(\frac{4r}{3}+c\right) < S.\ 180°$, e conseguentemente questo seno è positivo, e la quantità $f\,S.\ a.\ S.\left(\frac{4r}{3}+c\right)$ è effettivamente maggiore di zero; e perciò ad AP$=f$, corrisponde $q>$AQ. S' intenda ora condotta dal punto B la BO perpendicolare ad AC, dico, che il suddetto q corrispondente a $p=f$ sarà minore di AO. Poichè sta $1 : C.\ a : : f :$ AO, sarà AO $= f\,C.\ a$. Ma $\frac{f\,S.\left(a+c+\frac{2r}{3}\right)}{S.\left(c+\frac{2r}{3}\right)}$ è minore di $f\,C.\ a$, mentre in tale supposizione abbiamo $S.\ a\ C.\left(c+\frac{2r}{3}\right)+C.a.S.\left(c+\frac{2r}{3}\right) < C.a.S.\left(c+\frac{2r}{3}\right)$ che dà $S.a.C.\left(\frac{2r}{3}+c\right) < 0$; ed avendo noi supposto, che C sia maggiore d' A, e nello stesso tempo, che sia A$+$C$>\frac{2r}{3}$, o di 60°, dev' esser C$>$30°. Sarà quindi $C.\left(\frac{2r}{3}+c\right)$ il coseno d' un angolo $>$ 90° e però una quantità negativa <0, che costituisce giusta l' ipotesi il nostro $q<$AO, nel tempo stesso, che si è dimostrato maggiore di AQ.

Intendendo pertanto condotta da B a questo punto medio una retta che è il lato dell' equilatero massimo, dopo il minimo, egli è evidente, che questo pure è minore di AQ. Da tutto ciò risulta, che fatta l' esclusione di tutti gli altri triangoli equilateri inscrittibili, il massimo dentro l' aja della figura è quello, che ha per lato BQ, al quale dee prendersi una retta eguale situata da Q verso C, e congiunger l' estremo di essa con altra che vada a B, e così verrà determinato l' equilatero massimo ricercato nella presente ipotesi di $a + c > \frac{2r}{3}$, e di $C < 60°$.

Dedurremo da ciò come corollario, che se sarà A di 60°, diventerà nullo l' angolo ABQ, e in tal caso la retta BQ cade sopra il lato BA, e Q in A; ora siccome C non può essere maggiore di 60° attesa la nostra ipotesi, nè può esser minore, perchè allora sarebbe $C < A$, il che pure è contro l' ipotesi; dunque anche C è di 60 gradi, e in conseguenza anche B, e il triangolo massimo diventa il triangolo della figura.

Consideriamo presentemente la ipotesi di $c + a > \frac{2r}{3}$, essendo $c > 60°$, che fa essere necessariamente $a < 60°$, perchè il terzo B sia sempre il massimo. In questa supposizione la retta BQ della prima, e seconda figura, che fa un angolo di 60° con QC non può darci un equilatero, che resti incluso nel dato triangolo, perchè essendo nella presente ipotesi l' angolo BCQ maggiore di 60°, presa da Q sopra QC una retta = BQ, questa retta oltrepasserebbe necessariamente il punto C al disotto, dal cui punto estremo condotta poi a B la terza retta, si potrebbe avere il triangolo equilatero, ma tale che per qualche sua porzione uscirebbe dalla figura. Conoscendo pertanto inutile al nostro intento questo lato di equilatero BQ, conviene determinarne un altro, che ci dia il massimo cercato. Ciò si ottiene, dividendo con una retta l' angolo C, in modo, che da una parte resti un angolo di 60° e dall' altro il residuo, che compie C. Ma poichè si può far rimanere tal residuo, o dalla parte di BC, o dalla parte di CA, convien vedere se sia indifferente l' una, e l' altra collocazione.

Nella (fig. 3.ª) supposto l'angolo BCO di 60° resta il residuo OCA dalla parte di AC; e supposto di 60° l'angolo ACD rimane il residuo BCD dalla parte di BC. Quando l'angolo BCO si fa di 60°, resta l'angolo OCA $= c - 60° = c - \frac{2r}{3}$. Quindi risulta l'angolo BOC esterno rispetto al triangolo COA, $= a + c - \frac{2r}{3}$. Se quest'angolo, nella nostra ipotesi di $c > 60°$, e di a minore, potesse esser maggiore di 60°, levandone una qualche porzione avrebbesi uno degli equilateri inclusi nella figura. Ma se quest'angolo risultar dovesse necessariamente $< 60°$, l'equilatero, che avesse per lato CO, cadrebbe in parte fuori del dato ABC, e non potrebbe essere pel nostro scopo di alcun giovamento. Ora essendo effettivamente tale angolo minore di 60°, perchè fatta l'ipotesi $\frac{2r}{3} > a + c - \frac{2r}{3}$, risulta $a + c < \frac{4r}{3}$, cioè $< 120°$. Poichè C è maggiore di 60°, ed a minore, ma in modo che l'angolo ABC $= 2r - a - c$ sia il massimo, non può essere $a + c$, che minore di 120°. Dunque $a + c - \frac{2r}{3} < 60$, e quindi dovremo escludere l'equilatero, che ha per lato CO. Costituito poi l'angolo di 60° nella posizione di ACD, l'esterno BDC diventa $= \frac{2r}{3} + a$, e perciò l'angolo CDA $= 2r - \frac{2r}{3} - a = \frac{4r}{3} - a$, che nella nostra supposizione è maggiore di $\frac{2r}{3}$; perchè ciò posto, riesce $\frac{2r}{3} - a > 0$, il che è verissimo, perchè essendo $C < 60°$ e B l'angolo massimo del triangolo, non può non essere A, che minore di 60° ossia di $\frac{2r}{3}$. Si potrà dunque tagliando una porzione dell'angolo CDA$> 60°$, costituire un angolo CDZ di 60° che formi l'equilatero CZD incluso tutto dentro il dato triangolo; e questo dimostreremo essere il massimo di tutti gli equilateri, che si possono inscrivere dentro il triangolo ABC.

Anche in questa terza figura determinata coll'equazione data tra p e q la retta AP alla quale corrisponde il lato PV dell'equiquilatero da inscriversi, costituente l'angolo VPB di 60°, ripetuta la dimostrazione fatta per la prima ipotesi, si vedrà che i lati degli equilateri competenti a porzioni di AB < AP formano coi residui della stessa AB angoli < 60° e in conseguenza tutti quei triangoli equilateri non fanno il nostro caso. Essendo pertanto il primo triangolo incluso, quello che ha PV per lato, dimostreremo essere PV < CD. Prima di tutto proveremo che il punto P cade al disopra di D, e per ciò, non faremo, che confrontare le espressioni facilmente reperibili di AP, e di AD. Quanto alla AP condotta la BV sarà il seno dell' angolo BVA $= S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)$ perchè seno del complemento BVC $= \frac{2r}{3}+a$. Dunque perchè l' angolo ABV è di 60° varrà quest'analogia : $S.\left(\frac{2r}{3}+a\right) : S.a :: f :$ BV $=$ BP $= f - p$, onde si trae $fS.\left(\frac{2r}{3}+a\right) - pS.\left(\frac{2r}{3}+a\right) = fS.a$, e $p = \dfrac{fS\left(\frac{2r}{3}+a\right) - fS.a}{S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)} = fS\,\dfrac{\left(\frac{2r}{2}-a\right)}{S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}$. Nel triangolo poi ADC, perchè DCA è di 60°, e CDB $= \frac{2r}{3}+a$, sarà $S.\left(\frac{2r}{3}+a\right) : S.\frac{2r}{3} :: fS.\frac{(a+c)}{S.c}$: AD $= fS.\frac{2r}{3}\cdot\dfrac{S.(a+c)}{S.c.S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}$ e spezzando dall' una, e dall' altra parte i seni degli angoli composti, adottata l'ipotesi di AP<AD, risulta $\frac{\sqrt{3}}{2}S.c\,C.a - \frac{1}{2}S\,c\,S.a < S.\frac{2r}{3}\,S.a.C.c + S.\frac{2r}{3}C.a\,S.c$, ossia $-\frac{1}{2}S.a\,S.c < S.\frac{2r}{3}\,S.a\,C.c$. Ma non potendo esser C > 90° perchè ripugna alla nostra ipotesi di B angolo massimo, risulta necessariamente $C.c$ quantità positiva, onde essendo il primo membro negativo è chiaro esser minore dell' altro positivo, e conseguentemente giusta l' ipotesi. Resta ora a dimostrare ciò che abbiamo detto più innanzi essere PV<CD.

Poichè sta il seno dell' angolo BVA al seno di BAV : : AB : BV = PV essendo $S.\mathrm{BVA} = S.\mathrm{BVC} = S.\left(\frac{2r}{3} + a\right)$, sarà $S.\left(\frac{2r}{3} + a\right) : S.a :: f : \mathrm{BV}$, e quindi $\mathrm{PV} = \frac{f\,S.a}{S.\left(\frac{2r}{3} + a\right)}$. Il valore poi di CD si ha colla seguente analogia $S.\mathrm{CDA} : S.\mathrm{A} :: \mathrm{AC} : \mathrm{CD}$. Ma $S.\mathrm{CDA} = S.\mathrm{CDB} = S.(\mathrm{DCA} + \mathrm{A}) = S.\left(\frac{2r}{3} + a\right)$, e inoltre si è trovato $\mathrm{AC} = f\,S.\left(\frac{a+c}{S.c}\right)$. Quindi $S.\left(\frac{2r}{3} + a\right) : S.a :: f\,S.\left(\frac{a+c}{S.c}\right) : \mathrm{CD}$, onde $\mathrm{CD} = \frac{f S.a\; S.(a+c)}{S.c\; S.\left(\frac{2r}{3} + a\right)}$, e però se deve essere PV < CD si dee pur verificare $\frac{f\,S.a}{S.\left(\frac{2r}{3} + a\right)} < \frac{f\,S.a\; S.(a+e)}{S.c\, S.\left(\frac{2r}{3} + a\right)}$, ossia $S.c < S.(a+c)$. Assunta tale ipotesi dev' essere $S.c < S.a\, C.c + C.a\, S.c$, ossia $(1 - C.a) \times S.c < S.a\, S.c < S.a\, C.c$, e alzati al quadrato i termini, poichè $1 - C.a$ è sempre quantità positiva, avremo $(1 - C.a)^2\, S.^2c < S.^2a\, C.^2c$, cioè $< 1 - C.^2a \times (1 - S.^2c)$, cioè $(1 - 2C.a + C.^2a)\, S.^2c < 1 - C.^2a - S.^2c + C.^2a\, S.^2c$, ossia $(2 - 2C.a)\, S.^2c < 1 - C.^2a < (1 - C.a) \times (1 + C.a)$, e finalmente $S.^2c < \frac{1 + C.a}{2}$, e quindi $S.c < \frac{\sqrt{1 + C.a}}{\sqrt{2}}$; ma pei teoremi trigonometrici $\frac{\sqrt{1 + C.a}}{\sqrt{2}} = C.\frac{a}{2}$, dunque perchè si verifichi il nostro assunto, fa mestieri che sia $C.\frac{a}{2} > S.c$, e a noi incombe il dimostrarlo, avuto riguardo, sempre, alle assunte condizioni. Poichè è $c > 60°$, suppongo $c = 60° + z$, ove avverto che z dev' essere $< 30°$, perchè resti massimo l' angolo B. Pongasi ora $a = 60' - 2z$, e da queste due posizioni di angoli nasce il terzo $\mathrm{B} = 60° + z$, cioè diventa $\mathrm{B} = \mathrm{C}$. In tal caso si fa $C.\frac{a}{2} = C.(30° - z) = S.(60° + z)$ e questo è il caso d' uguaglianza tra $S.c$, e $C.\frac{a}{2}$. Supponiamo ora, che si aggiunga ad

$a = 60° - 2z$ una qualunque quantità d' angolo che sia x, in questo caso $C.\frac{a}{2}$ si fa eguale $C.\left(30° - z + \frac{a}{2}\right) = S.\left(60° + z - \frac{x}{2}\right)$, che essendo $< S.(60° + z)$ costituisce $C.\frac{a}{2} < S.c$. Ma con questa ipotesi non può sussistere, che B sia massimo, perchè esso diverrebbe $60° + z - x < 60° + z$. Dunque volendo B sempre massimo, non potrà mai essere $C.\frac{a}{2} < S.c$. Invece di aggiungere all' angolo a la quantità x intendiamola levata, onde sia $a = 60° - 2z - x$, il che fa essere $B = 60° + z + x > C = 60° + z$. Qualunque sia x, che insieme con z non può passare 30° sarà sempre $C.\frac{a}{2} = C.\left(30° - \frac{x}{2} - z\right) = S.\left(60 + z + \frac{x}{2}\right)$ che riuscendo maggiore di $S.(60 + z)$ fa essere sempre $C.\frac{a}{2} > S.c$, il che dà $S.c < S.(a + c)$, cioè sarà sempre CD > PV, fuor del caso in cui PV, CD sono eguali.

Dimostrato che PV non può essere maggiore di CD, e che desso è sempre minore, od al più eguale, se intendiamo una qualche linea $p > AP$, questa sarà nella iperbola, un' ascissa che fino a un certo valore di p, porterà a una ordinata corrispondente più vicina alla minima, e rappresentando tali ordinate i lati degli equilateri inscrittibili, questi saranno minori di PV. Presa poi qualche p, oltre quella, che corrisponde al minimo, torneranno a crescere le ordinate, cioè i lati degli equilateri, e fatta $p = AD$ il lato dell'equilatero CD sarà maggiore di tutti i precedenti lati al disotto del minimo. Ai valori poi di $p > AD$, sino all'ultimo, che è lo stesso AB, competeranno sempre lati di equilateri maggiori di CD, e il massimo sarà quello, che corrisponde a $p = f = AB$. Ora noi proveremo, che tutti questi equilateri, i quali determinar si possono coi valori di $p > AD$, escono, in parte, fuori della figura, e son però da rigettarsi.

Costituito nella figura 1ª, che ha lo stesso triangolo ABC delle altre, uno di quelli equilateri, che hanno il superior lato HO con direzione dal basso all' alto, dal punto H si guidi la normale HM sul lato AC. A questo equilatero HON compete AH $= p$ AO $= q$, onde risulta OM $= pC.a - q$, e non già $q - pC.a$, come accade quando la perpendicolare cade fra li punti A, O. Ciò però non porta alcuna variazione nella equazione di rapporto tra p, e q, che diversifichi da quella, che abbiamo trovato nei casi precedenti. Ove piaccia, il calcolo, che si facesse in simil maniera sul principio usata, adattare al caso presente; verrebbesi a conoscere la verità della proposizione, la quale si può anche dedurre dal valor generico y del lato dell'equilatero, che è compreso nella seguente equazione $y = \sqrt{p^2 + q^2 - 2pqC.a}$, che equivale all' una, o all' altra delle seguenti espressioni $y = \sqrt{(q - pC.a)^2 + p^2S.^2a}$; $y = \sqrt{(pC.a - q)^2 + p^2S.^2a}$, valendo la prima espressione quando la perpendicolare HO cade dentro la lunghezza di q, e la seconda quando al disotto. Ciò posto variando in lunghezza la AH, l' equilatero, che gli corrisponde farà variar l' angolo NOC, e vi sarà tal valore di p, che renda quest'angolo nullo. Dunque se a tale ipotesi adatteremo l' equazion generale tra p, e q, trovarne potremo i suoi valori, onde quest' angolo NOC sia nullo. Chiamato pertanto l' angolo HOC acuto $= O$, diventerà l' angolo NOC $= O - 60° = O - \frac{2r}{3}$, e il suo seno $= S.\left(O - \frac{2r}{3}\right) = \frac{1}{2}S.O - \frac{\sqrt{3}}{2}C.O$, e sostituiti i valori di $S.O$, $C.O$, che si traggono dalla ispezione del triangolo HOM, la quale fa essere $S.O = p\frac{S.a}{y}$; $C.O = p\frac{C.(a-q)}{y}$ avremo $S.\left(O - \frac{2r}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}pS.a - \frac{\sqrt{3}}{2}pC.a + \frac{\sqrt{3}}{2}q}{y}$, che nella nostra supposizione dell' angolo HOC nullo, dev' essere $= 0$; e quindi poichè $\frac{1}{2}S.a - \frac{\sqrt{3}}{2}C.a$ equivale $-S.\left(\frac{2r}{3} - a\right)$, sarà $pS.\left(\frac{2r}{3} - a\right) + S.\frac{2r}{3} - q = 0$, e però $p = \frac{S.\frac{2r}{3} - q}{S.\left(\frac{2r}{3} - a\right)}$. Nel caso della costruzione da noi fatta, (*fig.* 3ª 2) che determina il valore di $p = \mathrm{AD}$, quando l'angolo DZC è di 60° corrispondente alla nullità dell'angolo NOC della 4ª figura, si è trovato $\mathrm{AD} = p =$

$$\frac{f S.\frac{2r}{3}\, S.(a+c)}{S.c\; S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}$$

, onde sostituito questo valore nella equazione

$$p = \frac{S.\frac{2r}{3} - q}{S.\left(\frac{2r}{3}-a\right)} \text{ risulterà } q = \frac{f S.(a+c) S.\left(\frac{2r}{3}-a\right)}{S.c\; S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)} :$$

Colla costruzione da noi fatta (*fig.* 5ª) cerchiamo il valore di AZ. Poichè l'angolo DZC è di 60°, sarà $\mathrm{ADZ} = 60° - a = \frac{2r}{3} - a$, ed essendo $S.\mathrm{DZA} = S.\frac{2r}{3} : S.\left(\frac{2r}{3}-a\right) :: \mathrm{AD} : \mathrm{AZ}$,

ossia $S.\frac{2r}{3} : S.\left(\frac{2r}{3}-a\right) :: \dfrac{f S.\frac{2r}{3}\, S.(a+c)}{S.c\; S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)} : \mathrm{AZ}$, avremo $\mathrm{AZ} =$

$$\frac{f. S.(a+c) S.\left(\frac{2r}{3}-a\right)}{S.c S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}$$

identico con quello, che si è trovato col mezzo dell'equazione. Dunque a $p = \mathrm{AD}$, la AZ che corrisponde, è il q che gli compete. Laonde se si prende qualunque $p > \mathrm{AD}$, poichè in tal caso il q rispettivo dev' esser minore di AZ, e gli estremi di queste nuove rette p, q, congiunti con altra retta, fan risultare questa il lato dell' equilatero conveniente, poichè taglia necessariamente la DZ (*fig.* 3ª), essendo l' angolo DZC di 60°, farà col residuo inferiore di AC un angolo minore, e conseguentemente il triangolo equilatero, che descriver si volesse dalla parte di C col lato della suddetta retta, per qualche sua porzione uscirebbe fuori della figura. Ma non è nemmen possibile colla medesima retta costituire un equilatero incluso, dalla parte di AD, perchè essendo l' angolo $\mathrm{ADZ} = \frac{2r}{3} - a$, esso è $< 60°$,

e

e perchè si fa esterno rispetto all' angolo, che forma il lato dell' equilatero, avente il suo apice inferiormente al punto D, colla porzione superiore del lato AB, a più forte ragione divien minore di 60° questo nuovo angolo, e quindi anche dalla parte di AB l' equilatero che si descrivesse renderebbesi inutile pel nostro intento; e ciò verificandosi dall' una, e dall' altra parte, di tutti quegli equilateri, che competono a tutti i valori di $p > \mathrm{AD}$, sino all' ultimo, che dà $p = f$, resta pienamente dimostrato, che degl' inclusi nella data figura il maggior equilatero è quello, che ha per lato CD determinato colla nostra costruzione.

Esaurite le precedenti due ipotesi, dobbiamo ora considerare quella, che stabilisce $a + c < 60'$. Allora l' espressione $S.\left(a + c - \frac{2r}{3}\right)$ diventa una quantità negativa, cioè $S.\left(\frac{2r}{3} - a - c\right)$, e però l' equazione di relazione tra p, e q si cangia nella seguente $p = \dfrac{q S.\left(\frac{2r}{3} + c\right) - f S.(a + c)}{S.\left(\frac{2r}{3} - a - c\right)}$, dove si vede che calando p, colla q, e al contrario; facciasi come nella seconda figura l' angolo BQC di 60° (*fig.* 50) e s' intenda tirata la PH per modo, che l'angolo BPH eziandio sia di 60°. Colla determinazione di $\mathrm{AP} = p$, fatta col metodo della prima supposizione, e ripetendo il medesimo raziocinio, che in quella si è fatto, troveremo essere $\mathrm{PH} < \mathrm{BQ}$. Se prendiamo poi una qualunque $\mathrm{AN} < \mathrm{AP}$, poichè l' estremo della q corrispondente dee cadere al dissopra di H, supporremo che sia essa AM, onde NM diventi il lato dell' equilatero competente a $p = \mathrm{NA}$. Prendiamo ora in mano le formole che hanno guidato nella prima ipotesi all' equazione dell' iperbola conica, e poichè si fece allora $\frac{g(k + hC.a)}{k^2 + h^2 + 2h\,kC.a} - p = x$ riuscendo nel caso nostro $k = S.\left(a + c - \frac{2r}{3}\right)$ una quantità negativa, la formola si cangierà in quest'altra $\frac{g(hC.a - k)}{k^2 + h^2 + 2hkC.a}$

—

$- p = x$. Ora noi proveremo, che qualora sia $a + c < \frac{2r}{3}$, sarà $h\,C.a - k$ una quantità positiva essendo allora $k = S.\left(\frac{2r}{3} - a - c\right)$, e $h = S.\left(\frac{2r}{3} + c\right)$. Assunta pertanto questa ipotesi di $h.\,C.a > S.\left(\frac{2r}{3} - a - c\right)$ colla spezzatura dei seni, risulta $\frac{\sqrt{3}}{2} C.a\,C.c + \frac{1}{2} C.a\,S.c > \frac{\sqrt{3}}{2} C.a\,C.c - \frac{1}{2} C.a\,S.c - \frac{1}{2} S.a\,C.c + \frac{\sqrt{3}}{2} S.a\,S.c$, ossia $\frac{1}{2} C.a\,S.c + \frac{1}{2} C.a\,S.c - \frac{\sqrt{3}}{2} S\,a\,S.c > 0$. Il primo, e l'ultimo termine fanno $S.c\left[C\left(\frac{2r}{3} + a\right)\right]$, e quindi $S.c\,C.\left(\frac{2r}{3} + a\right) + \frac{1}{2} C.a\,S.c > 0$. Ma dovendo essere nella nostra ipotesi $a + c < 60^\circ$, e $c > a < 30^\circ$ e perciò $\frac{2r}{3} + a$ angolo minore del retto; resteranno positivi tutti due i termini del primo membro, e però maggiori di zero, onde diventa giusta la nostra supposizione di $h\,C.a - k$ quantità positiva. Il denominatore poi $k^2 + h^2 - 2hk\,C.a$, equivalendo alla somma dei due quadrati $(h\,C.a - k)^2 + h^2 S.^2 a$ sarà sempre una quantità positiva, ed avrà luogo nel caso nostro la sostituzione $\frac{g(hC.a - k)}{k^2 + h^2 - 2hkC.a} - p = x$, e il lato del minimo equilatero per la nostra ipotesi corrisponderà al valore di $p = \frac{g(hC.a - k)}{k^2 + h^2 - 2hkC.a}$. E poichè nella prima ipotesi il primo semiasse dell' iperbola era $\frac{g\,S.a}{h\sqrt{k^2 + h^2 + 2hkC.a}}$, riuscendo nella presente k negativo, il valore del lato del minimo equilatero sarà quì $= \frac{g\,S.a}{h\sqrt{k^2 + h^2 - 2hkC.a}}$.

Nella figura 5ª essendo AP $= p$, che determina l' equilatero costituente col suo lato PH un angolo di 60° con PB. Sia AN $<$ AP il nuovo p in generale, cui corrisponde il lato dell'equilatero NM, e si chiami z l' angolo BNM, che farà essere l' angolo NMA $=$ $z - a$, onde risulta questa analogia $S.(z-a) : S.z :: p:q = \frac{pS.z}{S.(z-a)}$. Invece di q nella nostra equazione di rapporto tra p, e q, se ne sostituisca il suo valore, ed avremo $p = \frac{p\frac{S.z}{S.(z-a)} S.\left(c + \frac{2r}{3}\right) - fS.(a+c)}{S.\left(\frac{2r}{3} - a - c\right)}$, onde si trae $p = \frac{fS.(a+c)}{\frac{S.zS.\left(c + \frac{2r}{3}\right)}{S.(z-a)} - S.\left(\frac{2r}{3} - a - c\right)}$, che è parimenti un' equazion generale pei nostri equilateri, nella quale non si confronta il p col q, ma lo stesso p coll' angolo esterno z. Dunque quando si suppone $z = 60^\circ = \frac{2r}{3}$, il simbolo p diventa AP, e si fa $= \frac{fS.(a+c)}{\frac{S.\frac{2r}{3}S.\left(c + \frac{2r}{3}\right)}{S.\left(\frac{2r}{3} - a\right)} - S.\left(\frac{2r}{3} - a - c\right)}$. Veggiamo ora se per avere un $p <$ AP, possa essere l' angolo z, o maggiore del retto, o essendo anche acuto, maggiore di 60°, o finalmente minore. Posta la prima ipotesi, sia $z = 90^\circ + x$. In tal caso diventa $S.z = S.(90^\circ + x) = C.x$, e così $S.(z-a) = S.(90^\circ + x - a) = C.(x-a)$; e colla sostituzione di tai valori si fa $p = \frac{fS.(a+c)}{\frac{C.x\, S.\left(\frac{2r}{3} + c\right)}{C.(x-a)} - S.\left(\frac{2r}{3} - a - c\right)}$. Perchè con tale angolo $z > 90^\circ$ si potesse avere un $p <$ AP, sarebbe d' uopo che potesse essere $\frac{C.x}{C.(x-a)} > \frac{S.\frac{2r}{3}}{S.\left(\frac{2r}{3} - a\right)}$. Fatta tale supposizione, risulterebbe $C.x\, S.\left(\frac{2r}{3} - a\right) > S\frac{2r}{3}C.(x-a)$, e finalmente colla la solita spezzatura $-C.\frac{2r}{3}.\,C.x\,S.a > S.\frac{2r}{3}\,S.x\,S.a$, la qual cosa è impossibile, perchè non potendo x esser maggiore di 90° e restando in conseguenza positivo $C.x$, sarebbe la quantità negativa maggiore della positiva, che è un assurdo. Dunque ad un $p <$ AP non può competere un lato di equilatero che faccia col residuo inferiore di AB un angolo di 90° gradi.

Supponiamo ora, il che è possibile, che nella stessa ipotesi di $p <$ AP possa il lato dell'equilatero costituire coll' inferiore residuo di AB un angolo bensì acuto, ma maggiore di 60°, e chiamato z quest' angolo, abbiasi $p = \frac{f\,S.(a+c)}{\frac{S.z\,S.\left(\frac{2r}{3}+c\right)}{S.(z-a)} - S.\left(\frac{2r}{3}-a-c\right)}$.

Dunque affinchè si abbia un $p <$ AP, è necessario che possa essere $\frac{S.z}{S.(z-a)} > \frac{S.\frac{2r}{3}}{S.\left(\frac{2r}{3}-a\right)}$, ovvero $S.z\,S.\left(\frac{2r}{3}-a\right) > S.\frac{2r}{3}\,S.(z-a)$, e colla spezzatura de'seni, e opportuna riduzione, $S.a\,S.\left(\frac{2r}{3}-z\right) > 0$: ma perchè abbiam supposto $z >$ 60° cioè di $\frac{4r}{3}$, si fa $S.\left(\frac{2r}{3}-z\right)$ una quantità negativa, che fa essere assurdo $S.a\,S.\left(\frac{2r}{3}-z\right) > 0$. Dunque non può essere possibile, che ad un $p <$ AP competa l' angolo, che fa il lato dell' equilatero, col residuo inferiore di AB, maggiore di 60°. In conseguenza tale angolo è minore di 60°; la qual cosa verificandosi in tutti i valori di $p <$ AP sino al primo $p = 0$, tutti gli equilateri, che possono aver luogo nei sopradetti valori, escono in parte fuori della figura, e il primo incluso si ha quando $p =$ AP. In tal caso si è superiormente dimostrato essere il lato dell' equilatero PH < BQ, e poichè assumendo altri $p >$ AP, le ordinate dell' iperbole rappresentanti i lati degli equilateri, si vanno accostando all'ordinata minima uguale al primo semiasse, se BH è minore di BQ, molto più i lati degli equilateri successivi sino al minimo, saranno minori di BQ. Dopo il minimo, crescendo le ordinate dell' iperbola, cresceranno pure i lati dei seguenti equilateri, e avremo il massimo dopo il minimo per la nostra figura, quando si prenderà $p = \mathrm{AB} = f$. Fatto pertanto $p = f$; l' equazione di rapporto tra p, e q, diventa $f = \dfrac{q\, S.\left(c + \frac{2r}{3}\right) - f\, S.(a+c)}{S.\left(\frac{2r}{3} - a - c\right)}$, cioè $q = \dfrac{f\, S.(a+c) + f\, S.\left(\frac{4r}{3} - a - c\right)}{S.\left(c + \frac{2r}{3}\right)}$, ossia spezzando i seni, e facendo le convenienti riduzioni $q = \dfrac{f.S.\left(\frac{2r}{3} + a + c\right)}{S.\left(c + \frac{2r}{3}\right)}$. Ora io dico essere questo valore di $q >$ AQ. Il valore di AQ si trova colla presente analogia $S.\mathrm{AQB} : S.\mathrm{ABQ} :: \mathrm{AB} : \mathrm{AQ}$, ossia $S.\frac{2r}{3} : S.\left(\frac{2r}{3} - a\right) :: f : \mathrm{AQ} = \dfrac{f\, S.\left(\frac{2r}{3} - a\right)}{S.\frac{2r}{3}}$.

Dunque dev' essere $\dfrac{S.\left(\frac{2r}{3} + a + c\right)}{S.\left(c + \frac{2r}{3}\right)} > \dfrac{S.\left(\frac{2r}{3} - a\right)}{S.\frac{2r}{3}}$ cioè, $S.\left(\frac{2r}{3} + a + c\right) S.\frac{2r}{3} > S.\left(\frac{2r}{3} - a\right) S.\left(c + \frac{2r}{3}\right)$. Se qui pure si spezzano i seni, e si fanno le opportune riduzioni, ci risulta da ultimo $S.a \left[S.\frac{2r}{3}\, C.\left(\frac{2r}{3} + c\right) + C.\frac{2r}{3} S.\left(\frac{2r}{3} + c\right)\right] > 0$, o più brevemente $S.a\ S.\left(\frac{4r}{3} + c\right) > 0$, e poichè nella nostra ipotesi è $C < 60°$, il che fa essere $\frac{4r}{3} + c < 180°$, e in conseguenza $S.\left(\frac{4r}{3} + c\right)$ quantità positiva, resta evidente, essere il q corrispondente ad AB, maggiore di AQ.

Nella 2.ª figura essendosi presa $\mathrm{QY} = \mathrm{BQ}$, dimostreremo che se ad AQ si aggiunge QY sarà la nostra $q < \mathrm{AY}$. Poichè il lato $\mathrm{BQ} = \mathrm{QY}$ si è trovato $= f.\dfrac{S.a}{S\frac{2r}{3}}$, sarà tutta la $\mathrm{AY} = f.\dfrac{\left[S.\left(\frac{2r}{3} - a\right) + S.a\right]}{S.\frac{2r}{3}}$, equivalente a quest'altra espressione $\frac{f.\,S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}{S.\frac{2r}{3}}$. Deve dunque essere $\frac{f.\,S\left(\frac{2r}{3}+a\right)}{S.\frac{2r}{3}} > \frac{fS.\left(\frac{2r}{3}+a+c\right)}{S.\left(\frac{2r}{3}+c\right)}$, ossia $f.S.\left(\frac{2r}{3}+a\right) S.\left(\frac{2r}{3}+c\right) > f.\,S.\frac{2r}{3}\,S.\left(\frac{2r}{3}+a+c\right)$, che ci dà colla consueta spezzatura, e riduzione, $f\,S.c\left[C.\frac{2r}{3}S.\left(\frac{2r}{3}+a\right) - S.\frac{2r}{3}C.\left(\frac{2r}{3}+a\right)\right] = f.\,S.c\,S.a > 0$, il che è verissimo, e conseguentemente resta dimostrato, che il q corrispondente a $p =$ AB, essendo maggiore di AQ, e minore di AY, dee cadere colla sua estremità tra i punti Q, Y, e che il lato del massimo equilatero dopo il minimo deve andare da B a questo punto medio tra Q, ed Y, ed essere una retta, che nel triangolo equilatero QBY si guida da B all' opposto lato QY, necessariamente minore dello stesso lato BQ, onde concluderemo essere BQ il lato del massimo equilatero, appartenente alla presente ipotesi.

L' unica ipotesi, che ci rimane da considerare, nel nostro problema, si è quella, che pone il maggior angolo B di 120°, che fa essere $a + c = 60^\circ = \frac{2r}{3}$. Questa supposizione introdotta nella equazione generale tra p, e q, che esprimo coi più abbreviati simboli, $kp = g - hq$, poichè $k = S.\left(a + c - \frac{2r}{3}\right)$ si annulla, ci somministra $q = \frac{g}{h} = \frac{f\,S.(a+c)}{S.\left(c+\frac{2r}{3}\right)} = \frac{f.\,S.\frac{2r}{3}}{S.\left(\frac{2r}{3}+c\right)}$, qualunque sia il valore di p, il che ci fa vedere, che riuscendo invariabile questo valore di q, di qualunque grandezza si prenda p, tutti i lati degli equilateri che congiungono gli estremi di qualunque,

que, e di questa costante q, hanno il vertice d' un angolo sempre in quel punto, che termina una retta nel lato $AC = \frac{f \,.\, S.\frac{2r}{3}}{S.\left(\frac{2r}{3} + c\right)}$

Ciò non altera per niente le conseguenze dedotte dalla prima ipotesi di $a + c > \frac{2r}{3}$, essendo $c < 60^\circ$, e $> a$. Dunque siccome in quella abbiamo dimostrato, che la retta BQ (*fig.* 2ª) la quale fa un angolo di 60° con QC, è il lato del maggiore equilatero, che può restar incluso nel dato triangolo ABC, anche in quest' ultima ipotesi sarà vera la proposizione, e questo caso ancora resterà esaurito, il che si può anche confermare così

Si divida per metà l' angolo B (*fig.* 6ª) di 120° colla retta BH, e sarà l' angolo AHB esterno, rispetto al triangolo BHC, eguale $60^\circ + c$, e però $S.AHB = S.\left(\frac{2r}{3} + c\right)$, e perchè è pure di 60° l' angolo ABH, varrà l' analogia $S.\left(\frac{2r}{3} + c\right) : S.\frac{2r}{3} :: f : AH = \frac{f.\, S.\frac{2r}{3}}{S.\left(\frac{2r}{3} + c\right)}$. Ecco pertanto con tale costruzione determinato il valore della costante q, all' estremo della quale devon far capo tutti gli equilateri, che si possono costruire nella nostra figura, qualunque sia il valore di p, e che poggiano coi loro angoli su tutti tre i lati del triangolo ABC. Al caso poi, che si faccia $p = f$, il lato dell' equilatero, che diventa il massimo dopo il minimo, è BH il cui valore si determina con questa analogia $S.\left(\frac{2r}{3} + c\right) : S.a :: f : BH = \frac{f.\, S.a}{S.\left(\frac{2r}{3} + c\right)}$. Ed essendo il seno di AHB lo stesso che il seno del complemento AHC, cioè $= S.\left(\frac{2r}{3} + a\right)$, sarà anche $BH = \frac{f.\, S.a}{S.\left(\frac{2r}{3} + a\right)}$. Paragoniamo ora questo lato BH, col lato BQ il cui valore sappiamo essere $\frac{f.S.a}{S.\frac{2r}{3}}$. Poichè $a + c = 60°$, e $c > a$, necessariamente diventa $a < 30°$, e l' angolo $\frac{2r}{3} + a$ non supera il retto, onde riesce sempre $S.\left(\frac{2r}{3} + a\right) > S.\frac{2r}{3}$ il che fa essere BH < BQ, e perciò anche in quest' ultima modificazione BQ diventa il lato del massimo triangolo incluso.

Ove piaccia ad alcuno di determinare i valori di p, e q corrispondenti al minimo equilatero, che colloca i suoi angoli su i tre lati della data figura, basterà ricorrere alle formole generali, che ci sono risultate per la prima ipotesi di $a+c > \frac{2r}{3}$, nella determinazione degli assi della nostra iperbola. Si osservò ivi, che corrispondendo alla supposizione di $x = 0$ il primo semiasse di quella curva, che dà il lato del minimo equilatero, per la equazione $\frac{gk + h\,C.a}{k^2 + h^2 + 2hk\,C.a} - p = x$. Fatto $x = 0$, dev' essere $p = \frac{gk + h\,C.a}{k^2 + h^2 + 2hk\,C.a}$, e poichè nell' equazione generale tra p, e q, si ha $p = \frac{g - hq}{k}$, sarà facile coi due presenti valori di p, ritrovare ancora pel valore analogo di q quest' altra equazione $q = \frac{gh}{k^2 + h^2 + 2hk\,C.a}$ e il lato dell' equilatero minimo che riesce uguale al primo semiasse dell' iperbola $= \frac{gS.a}{\sqrt{k^2 + h^2 + 2hk\,C.a}}$. La seconda ipotesi di $a+c < \frac{4}{}$ non fa che rendere negativo il simbolo $k = S.\left(a + c - \frac{2r}{3}\right)$; onde le superiori formole dei valori di p, q, e del lato del minimo equilatero non soffriranno altro cangiamento, che quello, il quale nasce dal far k negativo. Nell' ultima ipotesi poi di $a+c = \frac{2r}{3}$, che fa essere l'angolo B di 120°, basta nelle suddette formole annullare i termini, ne' quali entra il simbolo k, e in tal modo ci risulta $p = \frac{g C.a}{h}$; $q = \frac{g}{h}$, e il lato del minimo equilatero $= \frac{g.S.a}{h}$, ossia colla introduzione dei valori cogniti primitivi $p = \frac{f.S.\frac{2r}{3}C.a}{S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}$; $q = \frac{f.S.\frac{2r}{3}}{S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}$; e il lato $= \frac{f.S.\frac{2r}{3}S.a}{S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}$. Per questo caso dell' angolo B = 120° abbiamo una facile costruzione, che ci determina il lato del minimo triangolo equilatero. Si divida per metà l' angolo B colla retta BM (*fig.*ª 1.ª) e dal punto d' incontro M colla AC si guidi la normale MH sopra AB, e si prenda HF = HM, che incontri in F la BC, e congiunta la FM sarà il triangolo MHF il minimo equilatero cercato. Imperciocchè essendo il seno dell' angolo BMA $= S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)$, sarà

$$S.\left(\frac{2r}{3}+a\right) : S.\frac{2r}{3} :: f : \mathrm{AM} = \frac{f.S.\frac{2r}{3}}{S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}$$

ed ecco determinata la lunghezza della costante q, ed in essa il punto M, dove devono concorrere con uno dei loro angoli tutti gli equilateri appartenenti al problema. Per ragione poi del triangolo rettangolo AMH abbiamo

$$1 : C.a :: \mathrm{AM} : \mathrm{AH} :: \frac{f.S.\frac{2r}{3}}{S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)} : \mathrm{AH} = \frac{f.S.\frac{2r}{3}C.a}{S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)},$$

che è il p competente al minimo equilatero. Finalmente essendo pure

$$1 : S.a :: \mathrm{AM} : \mathrm{MH} :: \frac{f.S.\frac{2r}{3}}{S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)} : \mathrm{MH},$$

avremo $\mathrm{MH} = \frac{f.S.\frac{2r}{3}S.a}{S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}$, che è appunto il lato sopra trovato, di cui resta anche nota la posizione.

Sebbene per tutti i casi del nostro problema, essendo noi stati obbligati, nella considerazione dei soli triangoli equilateri inclusi nella figura, a procedere per la via della esclusione, e conseguentemente a far uso di una dimostrazione, che non ha certamente il pregio della brevità: quanto alla pratica però, nei due diversi casi, nei quali cangia la determinazione dei massimi equilateri inclusi, essa è facilissima, e tale che qualunque artefice meno istrutto, può di essa far uso.

Il primo caso è quando misurati gli angoli A, C, si trova ciascuno d' essi, minore di 60°, essendo sempre $a < c$, od al più eguale. Sia $a + c$ maggiore, o minore di 60°: con tali dati misurati i gradi dell'angolo A, non si ha da far altro, che sottrar questi dal numero 60, e al residuo $60^\circ - a$ far eguale (*fig.* 1ª) ABQ. La retta BQ è il lato dell'equilatero, e resta nota pure la sua posizione. Trasportata la BQ verso QC, e il suo estremo congiunto con B, si viene a formare l' intero equilatero, che si deve staccare, dalla data materia componente il triangolo ABC.

Quando poi misurato l'angolo C sempre maggiore di A, o al più eguale, si trovi esso maggiore di 60° o al più eguale, come nella fig. 3ª, non si ha da far altro, che sottrarre da tutto l'angolo C l' angolo ACD di 60° colla retta CD. Questa è la lunghezza, e la posizione del lato del massimo equilatero incluso; onde presa nella AC una porzione = CD si congiunga l' estremo di essa con D, ed abbiamo anche per questa ultima ipotesi il massimo equilatero; e quindi, e per questo, e pel precedente caso, anche il massimo Prisma di basi equilatere, che si voglia staccare dal Prisma triangolare. In tutte queste ipotesi deve sempre l' artefice collocare B angolo massimo, C medio, A minimo.

Se tra i nostri triangoli inscrittibili, comunicanti coi loro angoli cogl' istessi tre lati della data figura, volesse il Geometra determinare nella medesima la posizione di un equilatero di lato dato, deve considerare due diverse ipotesi: la prima dell' angolo $C < 60^\circ$, la seconda dell' angolo C maggiore. Supposto $C < 60^\circ$, se il lato del suo equilatero è $>$ BQ (*fig.* 2ª), non è possibile estrarlo dalla figura; siccome nol caverà se essendo

C $>$

C > 60°, il suo lato diventi maggiore di CD (*fig.* 3ª) Posto poi, che nell' uno, e nell'altro caso sia minore di BQ, o di CD, chiamato l questo lato dato, varrà l'equazione $l^2=p^2+q^2-2pqC.a$, e varrà insieme l'altra $q=\frac{g-kp}{h}$. Da queste due equazioni si trarrà il valore di p, e di q dato pel simbolo l, e pei noti seni dei dati angoli.

Quanto alla pratica dell' artefice, che vuol cavare uno dei nostri equilateri dalla data materia di figura triangolare, egli ne farà il modello in una sottile assicella, o in un sottil cartone, e nell' ipotesi di C < 60° comincierà dall' adattare al punto B (*fig.* 2ª) un angolo del suo modello, collocando un de' lati sopra BQ. Se BQ riesce esattamente eguale alla lunghezza del lato del suo triangolo, ottiene facilmente quel, che desidera; se tal lato riesce maggiore di QBL, non è possibile, che egli abbia l' intento. Qualora poi l' angolo C sia maggiore di 60°, collocato l' angolo del suo modello in modo che coincida coll'apertura DCA di 60°; se il lato del cartone (*fig.* 3ª) si fa = CD, egli ha in pronto la maniera di cavare il dato equilatero dalla cimentata materia, e deve abbandonare l'impresa, se il suddetto lato si trova maggiore di CD. Qualora poi nell' uno, e nell' altro caso riesca minore, ma in modo, che sia necessaria la posizione dei tre angoli del suo modello sui tre lati della data figura, posto uno de' suoi angoli o in B, od in C, col lento movimento dello stesso modello sopra BC, cangiando continuamente al medesimo la sua posizione, osserverà se in alcuna di esse resti incluso tutto dentro la figura data, sulla quale seguendo con matita le linee coincidenti coi lati, levato il modello, gli resterà cognito il modo di tagliare nella data materia l' equilatero del suo dato lato.

Siccome quì si tratta di cavar da materie preziose figure regolari di massima aja, o Prismi a basi equilatere di massima solidità, potrebbe forse l'artefice creder più utile di trarre dal dato triangolo ABC un quadrato massimo, che superasse colla sua aja quella del triangolo massimo inscrittibile. Noi pertanto consideriamo degno dell' indagine del Geometra quest' altro problema: inscrivere in un dato triangolo ABC un massimo quadrato. Han luogo in questo problema due ipotesi; la prima che l'angolo massimo B sia ottuso, l'altra, che sia acuto, rimanendo sempre C > A. Quando il triangolo ABC è ottusangolo, poichè un lato del quadrato deve sempre cadere sopra uno dei tre del triangolo, si vede chiaro, che non può aversi aja di quadrato tutta inclusa dentro il triangolo, se non si fa cadere un lato di questo quadrato sul maggiore AC opposto all' angolo ottuso B, mentre se si suppone, che cada un lato del quadrato sopra un degli altri minori, qualche porzione di tai quadrati esce necessariamente fuori dell' aja del triangolo. Nel caso poi del triangolo ABC acutangolo, si possono effettivamente avere tre inclusi quadrati diversi, che poggiano uno dei loro lati or sopra l'uno, or sopra l'altro dei tre del triangolo dato. Ora non avendosi nella prima ipotesi, che un sol quadrato inscrittibile, ne cercaremo la sua aja, e poi ne faremo il confronto con quella del massimo triangolo equilatero per decidere sulla scelta che dobbiamo fare dell' una, o dell'altra figura.

Nella supposizione, che il lato del quadrato da inscriversi (*fig.* 7) sia MF parallelo al maggior lato AC, essendo gli altri MN, NH, HF, chiamato AM $= p$; AB $= f$; $S.A = S.a$; $S.C = S.c$, che dà $S.(a+c) = S.B$, abbiamo quest'analogia $1 : S.a :: p :$ MN $= p.S.a$, e poichè l'angolo BFM = all'angolo C, sarà $S.c : S.(a+c)$ $::$ BM : MF $:: f - p : p.S.a$, e quindi $p = \frac{f.\,S.\,(a+c)}{S.a\,S.c\,+\,S.\,(a+c)}$, onde $p.\,S.a =$ MN $= \frac{f.\,S.a\,S.(a+c)}{S.a.S.c\,+\,S.(a+c)}$. La figura 7^a presenta, che ha l' angolo ottuso in B, ma se fosse anche acuto, purchè sia il massimo angolo, risulta lo stesso il valore del lato del quadrato MN, che si è quì trovato.

Nel caso del triangolo acutangolo possono aversi tre quadrati inscritti, uno dei quali colloca uno dei suoi lati sopra AB opposto all' angolo medio C, come nella fig. 7^a, l' altro sopra BC, opposto all' angolo minimo A, come nella fig. 7^a. Essendo il terzo quadrato, quel che a somiglianza della figura settima ha il suo lato parallelo al lato massimo AC, l' espressione del lato di questo quadrato sarà la stessa, che si è trovata pel caso del triangolo ottusangolo, cioè $= \frac{f.S.a\,S.(a+c)}{S.a\,S.c + S.(a+c)}$. Considerando ora il caso della figura 7$^{a\prime\prime}$, sia AF $= q$, non mutate le denominazioni di cui ci siamo serviti per la figura 7^{a}, avremo l' analogia $1 : S.a :: q :$ NF $= q\,S.a$, e perchè sta $S.c : S.(a+c) :: f :$ AC, sarà AC $= f.\frac{S.(a+c)}{S.c}$, quindi FC $= f.\frac{S.(a+c)}{S.c} - q$. Ma per l'eguaglianza degli angoli CMF, CBA abbiamo $q.\,S.(a+c) : S.c :: f\frac{S.(a+c)}{S.c} - q : q.\,S.a$, onde si trae $q = \frac{f.S.(a+c)}{S.c + S.a\,S.(a+c)}$ e però NF $= f.\frac{S.a\,S.(a+c)}{S.c + S.a\,S.(a+c)}$. Facciamo ora il confronto di questo lato di quadrato con quello, che riusciva parallelo al lato maggiore AC, e veggiamo quale risulta maggiore. Fatta l' ipotesi di $\frac{f.S.a\,S.(a+c)}{S.a\,S.c + S.(a+c)} < \frac{f.S.a\,S.(a+c)}{S.c + S.a\,S.(a+c)}$, perchè i numeratori sono eguali, darà $\frac{1}{S.c + S.a\,S.(a+c)} > \frac{1}{S.c\,S.a + S.(a+c)}$, cioè $S.a\,S.c + S.(a+c) > S.c + S.a\,S.(a+c)$, ossia dopo la riduzione $S.(a+c) > S.c$. Ma poichè $S.(a+c)$ diventa seno dell' angolo acuto ABC, che per ipotesi è maggiore dell' angolo C, riesce sempre $S.(a+c) > S.c$, quindi il lato del quadrato, che poggia sul lato medio AB, è maggiore del lato del quadrato parallelo ad AC. Nella figura 7$^{a\prime\prime\prime}$ il lato NH del quadrato inscritto poggia sopra BC opposto al minimo angolo A. Essendo pertanto AF $= p$, ed FM parallela a BC, che fa essere l' angolo FMA $=$ C, avremo $S.c : S.a :: p :$ FM $= p\,\frac{S.a}{S.c}$, onde poichè BF $= f - p$, ricorre quest' altra analogia $1 : S.(a+c) :: f - p : p\,\frac{S.a}{S.c}$, e $p = \frac{f\,S.(a+c)\,S.c}{S.a + S.(a+c)\,S.c}$, onde il lato FM $= p\,\frac{S.a}{S.c} = \frac{f\,S.a\,S.(a+c)}{S.a + S.(a+c)\,S.c}$. Si paragoni ora questa espressione, con quella del caso precedente; omessi i numeratori eguali, ed accettata l' ipotesi di questo lato maggiore dell' altro risulta $\frac{1}{S.a + S.(a+c)\,S.c} > \frac{1}{S.c + S.(a+c)\,S.a}$, ossia $S.a + S.(a+c)\,S.c < S.c + S.(a+c)\,S.a$, o finalmente $S.(a+c) < 1$ la qual conseguenza è certissima, perchè l' unità è il seno massimo..

Concluderemo pertanto, che qualora $a+c$ sia minore di 90°, il massimo dei tre quadrati inscrittibili nel triangolo ABC è quello, che ha situato un suo lato sopra il minimo BC, il cui valore si è trovato $= \frac{f.\,S.a\,S.(a+c)}{S.a + S.(a+c)\,S.c}$.

Omettendo le altre figure regolari, e rettilinee, che potrebbero essere inscritte al dato triangolo ABC, noi ci limitiamo al solo cerchio inscritto di massima aja, che deve per conseguenza avere per tangenti i tre lati del trilineo, e daremo le regole per conoscere se questa riesca maggiore, o minore della massima aja delle precedenti figure, onde ó debba essa preferirsi o posporsi alle altre aje massime per il distacco dalla data materia.

Nella figura 8ª per determinare il centro di questo circolo inscritto divido giusta le dottrine Euclidee i due angoli A, B per metà, e il concorso K delle linee dividenti determina il centro di questo circolo, e la perpendicolare KP sopra un lato AB mi dà la lunghezza del suo raggio. Chiamati al solito a, c, gli angoli A,C, onde riesca l' angolo $B = 2r - a - c$, sarà il seno della metà di $A = S.\frac{a}{2}$, e quello della metà di $B = S.\left(r - \frac{a-c}{2}\right) = C.\left(\frac{a+c}{2}\right)$. Chiamata pertanto $AP = p$, $AB = f$ sta $C.\frac{a}{2} : S.\frac{a}{2} :: AP : PK$ $= p\,\frac{S.\frac{a}{2}}{C.\frac{a}{2}}$. Inoltre, poichè il seno dell' angolo PBK è $C.\left(\frac{a+c}{2}\right)$, sarà il seno dell' angolo $BKP = S.\left(\frac{a+c}{2}\right)$, e però avremo $S.\left(\frac{a+c}{2}\right) : C.\left(\frac{a+c}{2}\right) :: f - p : PK = p\,\frac{S.\frac{a}{2}}{C.\frac{a}{2}}$, onde si trae $p = f\,\frac{C.\left(\frac{a+c}{2}\right)\,C.\frac{a}{2}}{C.\,\frac{c}{2}}$,

e

e finalmente il raggio KP $= f \frac{C.\left(\frac{a+c}{2}\right) S.\frac{a}{2}}{C.\frac{c}{2}}$. Essendo poi nota la proporzione che passa tra il raggio 1 e la semicirconferenza del circolo con tutta quella approssimazione, che più piace, sia tal ragione 1 : π. Da ciò risulta l' aja circolare del raggio KP $= \pi f^2 \frac{C.^2\left(\frac{a+c}{2}\right) S.^2\frac{a}{2}}{C.^2\frac{c}{2}}$, la quale nei diversi casi andrà confrontata coll' aja dell' equilatero massimo, o con quella del massimo quadrato.

Supponiamo presentemente, che essendo l' angolo B ottuso, e C < 60°, col confronto dell' aja del triangolo equilatero di lato BQ, e dell' unico quadrato inscrittibile, si sia trovata maggiore l' aja del primo. Converrà dunque vedere se di questa sia maggiore, o minore l' aja circolare. Comincieremo pertanto dall' esprimere la suddetta aja, che è quella dell' equilatero di lato BQ (*fig.* 2). Poichè BQ $= f\frac{S.a}{S.\frac{2r}{3}}$, sarà l' aja $= f^2\frac{S.^2 a}{\sqrt{3}}$ che supponendosi maggiore dell'aja circolare fa essere $f^2\frac{S.^2 a}{\sqrt{3}} > \pi f^2 \frac{C.^2\left(\frac{a+c}{2}\right) S.^2\frac{a}{2}}{C.^2\frac{c}{2}}$ ossia $\frac{f S.a}{\sqrt[4]{3}} > \frac{\sqrt{\pi} f\ C.\left(\frac{a+c}{2}\right) .S\frac{a}{2}}{C.\frac{c}{2}}$. Ma $S.a = S.2.\frac{a}{2} = 2\left(S.\frac{a}{2} \cdot C.\frac{a}{2}\right)$, avremo quindi $\frac{2f S.\frac{a}{2}.\ C.\frac{a}{2}}{\sqrt[4]{3}} > \frac{\sqrt{\pi} f\ C.\left(\frac{a+c}{2}\right) S.\frac{a}{2}}{C.\frac{c}{2}}$, ossia $\frac{2}{\sqrt[4]{3}\ \sqrt{\pi}} > \frac{C.\left(\frac{a+c}{2}\right)}{C.\frac{a}{2}\ C.\frac{c}{2}}$. Riducendo in decimali i valori di $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{\pi}$, si faccia la moltiplicazione tra loro di questi numeri risulta-

-tati, e si avrà in fine il valore della frazione $\frac{2}{\sqrt[4]{3}\ \sqrt{\pi}} = 0{,}860180$. Perchè il triangolo equilatero possa esser maggiore del circolo inscritto, dovrà verificarsi $0{,}860180 > \frac{C.\left(\frac{a+c}{2}\right)}{C.\frac{a}{2}\ C.\frac{c}{2}}$, ossia $> 1 - \frac{C.\frac{a}{2}\ S.\frac{c}{2}}{C.\frac{a}{2}\ C.\frac{c}{2}}$, $> 1 - \text{Tang.}\frac{a}{2}\ \text{Tang.}\frac{c}{2}$, e le tavole trigonometriche, giacchè son cogniti gli angoli a, c, ci daranno pel secondo termine di confronto un numero, che essendo minore del numero del primo termine, renderà giusta la assunta ipotesi del triangolo maggiore del circolo, e riuscendo maggiore farà essere l'aja del circolo maggiore della triangolare.

Conservata l'ipotesi dell'angolo B ottuso, e dell'angolo $C < 60^\circ$, pongo che l'esame fatto renda il quadrato inscrittibile ad ABC maggiore dell'equilatero di lato BQ (*fig.* 2ª), e confronto ora l'aja del circolo inscritto, con quella del suddetto quadrato. Riassunte pertanto le espressioni del lato del quadrato; $\frac{f.\ S.a\ S.(a+c)}{S.a\ S.c + S.(a+c)}$, e della radice dell'aja circolare inscritta $= \frac{\sqrt{\pi}\ f\ C.\left(\frac{a+c}{2}\right)\ S.\frac{a}{2}}{C.\frac{c}{2}}$, e divisi tai termini di confronto pel moltiplicatore di $\sqrt{\pi}$, onde nascano questi altri due termini $\frac{S.a\ S.(a+c)\ C.\frac{c}{2}}{\left(S.a\ S.c + S.(a+c)\right).\left(C.\left(\frac{a+c}{2}\right)\ S.\frac{a}{2}\right)}$, $\sqrt{\pi}$, coll'uso delle tavole trigonometriche si trovi il valor numerico del primo di questi due termini, e poichè è quello di $\sqrt{\pi} = 1{,}772453$, se il primo numero risultante si fa maggiore di questo secondo, il quadrato inscritto è maggiore del circolo, e al contrario se minore.

Rimanendo l' angolo B ottuso, sia ora C>60°, nel qual caso il lato del maggior triangolo equilatero inscrittibile diventa CD (fig.ª 3ª) $= \frac{fS.aS.(a+c)}{S.c\,S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}$, e la radice dell' aja di tale equilatero $= \frac{f.S.a\,S.(a+c)\sqrt[4]{3}}{2S.c\,S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}$. Onde quando sarà questa maggiore del quadrato inscrittibile, converrà farne il confronto colla radice quadrata dell' aja circolare, vale a dire con $\frac{\sqrt{\pi}\,f.C.\frac{(a+c)}{2}\,S.\frac{a}{2}}{C.\frac{c}{2}}$, il che si riduce a paragonare tra loro questi altri due termini, $\frac{S.a\,S.(a+c)C.\frac{c}{4}}{\left(2S.c\,S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)\right)\left(C.\left(\frac{a+c}{2}\right)S.\frac{a}{2}\right)}$, $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}$. Ora poichè abbiamo in decimali i valori di $\sqrt{\pi} = 1,772453$, e di $\sqrt[4]{3} = 1,316074$, sarà pur reperibile il valore della frazione $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{1.772453}{1.316074} = 1,194805$. Colle tavole poi si troverà espresso in numeri il primo termine del nostro confronto, che riuscendo maggiore, o minore del secondo numero, farà essere il triangolo maggiore, o minore dell' aja circolare.

Nel caso poi, che si trovi il quadrato maggiore del triangolo equilatero, se ne deve fare il confronto coll' aja circolare, nella maniera esposta per l' ipotesi precedente.

Rimane da ultimo, che si consideri il caso dell' angolo massimo acuto conservando sempre C>A. Qui pure può esser C maggiore di 60°, e minore. Se C è minore, il lato del triangolo equilatero è la retta BQ (fig. 2ª) e abbiamo trovato, che dei tre quadrati inscrittibili al dato triangolo ABC, il massimo è quello che poggia uno dei suoi lati (fig. 7ª) sul minimo BC;

il che si verifica ancora, quando l'angolo B sia il massimo degli acuti, cioè retto. Ora posto, che riesca l'aja del triangolo quistionato maggiore del quadrato, non variando la formola del raggio del circolo inscritto, che in tutte le ipotesi è sempre la stessa, nè variando quella del triangolo sopra trovata pel caso dell' angolo B ottuso, nel modo più volte indicato si esaminerà coll' uso delle tavole trigonometriche se riesca l'aja maggiore del circolo, o quella del mentovato triangolo. Trovandosi poi maggiore dell'aja triangolare quella del quadrato, conviene prendere in mano l'espressione del lato di questo quadrato la quale è, $\frac{fS.aS.(a+c)}{S.a+S.(a+c)S.c}$ e confrontarla colla radice quadrata dell' aja circolare, cioè con $\frac{\sqrt{\pi}\, f.\, C.\frac{(a+c)}{2}\, S.\frac{a}{2}}{C.\frac{c}{2}}$, o anche equivalentemente confrontando tra loro i due seguenti termini

$$\frac{S.a\, S.(a+c)\, C.\frac{c}{2}}{\left(S.a+S.(a+c)S.c\right)\left(C.\left(\frac{a+c}{2}\right)S.\frac{a}{2}\right)},\ \sqrt{\pi}.$$

Poichè son cogniti gli angoli A, C, le tavole trigonometriche ci somministrano il numero corrispondente alla prima formola, ed essendo anche cognito quello, che compete a $\sqrt{\pi}$, ove sia quest' ultimo minore del precedente, il quadrato sarà maggiore del circolo, e al contrario se maggiore.

Quando poi l'angolo C è maggiore di 60°, il lato dell'equilatero diventa la retta CD (fig. 3ª) di cui già abbiamo espresso il valore. Se il confronto di questo equilatero col quadrato massimo inscritto lo fa riescire maggiore, converrà paragonarlo coll' aja del circolo, ripetendo ciò che s' è detto pei precedenti casi; e se si troverà maggiore l'aja del quadrato, abbiamo già veduta nella prossima ipotesi, come si debba fare per conoscere la prevalenza dell' aja del quadrato sopra quella del circolo, o al contrario.

I metodi precedenti, di confronto tra l'aja circolare, e il massimo triangolo equilatero, o il massimo quadrato, che si può in-

inscrivere nel trilineo ABC, esigono, che si sappia antecedentemente conoscere quale delle due figure rettilinee inscrittibili, sia quella, che contenga la maggior aja, onde abbia luogo la indagine già esposta, se di questa sia anche maggiore, o minore quella del circolo. Convien quindi confrontare tra loro le suddette aje massime rettilinee, avendo riflesso alle diverse ipotesi degli angoli B, C, A della data figura. Mi propongo, per tale ricerca, prima il caso dell' angolo B ottuso, e di C<60°, cui compete per lato di triangolo massimo la retta BQ (fig. 2.^{a}) $= \frac{fS.\,a}{S.\,\frac{2r}{3}} = \frac{2fS.\,a}{\sqrt{3}}$, onde risulta l' aja del triangolo equilatero $= \frac{f^2 S^2 a}{\sqrt{3}}$. Ma nel caso dell' angolo B ottuso abbiamo trovato il lato dell' unico quadrato inscrittibile $= \frac{f.\,S.a\,S.(a+c)}{S.a\,S.c+S.(a+c)}$. Dunque con questo si dovrà confrontare la radice quadrata dell' espressione dell' aja del triangolo, cioè $\frac{fS.\,a}{\sqrt[4]{3}}$, od anche $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, con $\frac{S.(a+c)}{S.a\,S.c+S\,(a+c)}$. Trovato coll' uso delle tavole il valor numerico del secondo termine di confronto, se il numero del primo diventa di questo maggiore, il triangolo è maggior del quadrato, minore, se minore, e tutt' al contrario deve avvenire se rivoltiamo le frazioni, facendo i termini di confronto questi che seguono $\sqrt[4]{3}$, $\frac{S.a\,S.c+S.(a+c)}{S.(a+c)}$. Onde se $\sqrt[4]{3} = 1,316074$ diventa minore del numero, che corrisponde a $\frac{S.a\,S.c+S.(a+c)}{S.(a+c)}$, la figura triangolare è maggiore della quadrata, e al contrario se maggiore.

Sia ora C>60° rimanendo B ottuso, il che importa che debba essere l' angolo A<30°. In tale supposizione il lato del maggiore equilatero inscrittibile è la retta CD (fig. 3.^{a}) $= \frac{f\,S.a\,S.(a+c)}{S.\,c\,S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}$, che ci somministra l' aja del corrispondente equilatero $= \frac{f^2 S.^2 a\, S.^2 (a+c) \sqrt{3}}{4 S.^2 c\, S.^2 \left(\frac{2r}{3}+a\right)}$, e la sua radice quadrata è $\frac{f.S.a\, S.(a+c) \sqrt[4]{3}}{2 S.c\, S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}$, primo termine di confronto, essendo l'altro il lato del quadrato $= \frac{f.\, S.a\, S.(a+c)}{S.a\, S.c + S.(a+c)}$, o anche $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$, $\frac{S.\, c\, S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}{S.a S.c + S.(a+c)}$. Dal valor cognito di $\sqrt[4]{3}$ in numeri decimali risulta $\frac{\sqrt[4]{3}}{2} = 0', 658037$. Ritrovato poi colle tavole il numero equivalente al secondo termine di confronto, la maggioranza, o minoranza del primo relativamente a questo secondo ci farà decidere, se sia maggiore, o minore il triangolo del quadrato.

La terza ipotesi stabilisce l' angolo B acuto, in cui il quadrato massimo inscrittibile è FMNH (fig. 7^a) il valor del cui lato è $\frac{f.\, S.a\, S.(a+c)}{S.a + S.(a+c)\, S.c}$, e supponendo C < 60° la retta BQ (fig. 2^a) è il lato del massimo equilatero, che le compete, la cui aja si è già trovata $= \frac{f.\, S.^2\, a}{\sqrt{3}}$, e la sua radice quadrata $= \frac{f.\, S.\, a}{\sqrt[4]{3}}$. Quindi i nostri termini di confronto sono $\frac{f.\, S.\, a}{\sqrt[4]{3}}$, $\frac{f.\, S.\, a\, S.(a+c)}{S.a + S.(a+c) S.c}$, o anche $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, $\frac{S.(a+c)}{S.a + S.\,(a+c)\, S.\, c}$, oppure $\sqrt[4]{3}$, $\frac{S.\, a + S.(a+c) S.c}{S.(a+c)}$.

Dandoci pertanto le tavole il valore di questo secondo termine in numeri, si vedrà se il cognito competente $\sqrt[4]{3}$ sia di esso minore, o maggiore. Nel primo caso il triangolo è maggior del quadrato, nel secondo è minore.

Da ultimo rimanendo B acuto, sia $C > 60^\circ$ gradi, nel qual caso il lato del massimo triangolo equilatero è CD (fig. 2ª) $= \frac{f S.a\, S.(a+c)}{S.c\, S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}$, non variando dall' ipotesi precedente il lato del quadrato. La radice quadrata dell' aja dell' anzidetto equilatero è; $\sqrt[4]{\frac{3.f S.a\, S.(a+c)}{2 S.c\, S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}}$, che sarà il primo termine di confronto, ove l' altro è come sopra, $\frac{f S.a\, S.(a+c)}{S.a+S.(a+c)\, S.c}$. Con equivalenza di confronto potremo anche scrivere questi altri due termini $\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$, $= 0{,}658037$; $\frac{S.c\, S.\left(\frac{2r}{3}+a\right)}{S.a+S.(a+c)\, S.c}$. Ridotta colle tavole a numero questa seconda espressione, se riesce minore tal numero del primo, il triangolo ha un' aja maggiore del quadrato, e al contrario, se maggiore.

Fin quì si sono prescritte le regole, che deve tenere il Geometra per venire in chiaro colle tavole trigonometriche, quale delle aje, che si confrontano sia maggiore, e ciò con tutta quella approssimazione, che più a lui piace, e che vien data dai decimali delle medesime tavole. All' artefice però, che si suppone essere solamente istrutto dei primi, e più semplici elementi della Geometria pratica, debbonsi proporre regole più facili, perchè arrivi a conoscere quale delle due aje, che si paragonano insieme, debba da esso essere preferita. Siccome gli sarà d'uopo eseguire alcune operazioni geometriche per determinare nel dato material triangolo ABC quelle rette che gli fan conoscere la prevalenza, che dar deve all' una, o all' altra delle due aje, che si confrontano; farà sopra una carta un triangolo ABC eguale e similmente posto, come quello che ha sulla materia segnato, e adoperando righe, ed altri strumenti i più perfetti, che sono in sua mano, tirerà quelle linee sulla carta medesima, le quali giusta le diverse ipotesi, che hanno luogo nel nostro problema, si verran quì sotto esponendo.

Regola 1.ª E in questa e in tutte le susseguenti l' angolo B è sempre il massimo, C il medio, A il minimo. Comincio dalla ipotesi di B ottuso, di C<60°. Col suo quadrante misuri l' artefice l' angolo minimo A, e sottragga da 60 il numero dei gradi di quest' angolo. All' angolo residuo faccia eguale l' angolo ABQ (fig. 9ª) il cui lato BQ incontra in Q la AC, sulla quale faccia cadere la normale BH, che produca sino a che sia HE=HQ. Sopra tutta la BE come diametro descriva verso A un semicerchio, la cui periferia incontri in F la AH; e questa HF sarà il lato di un quadrato eguale all' aja del triangolo equilatero di lato BQ. Dóvendo poi egli confrontare quest' aja col quadrato massimo, che si può inscrivere nell' assunta ipotesi al prenominato triangolo, per determinare il lato di questo massimo quadrato, opererà nella maniera seguente. Aggiungendo alla retta AC prodotta la CK=BH, vi unirà la retta BK, alla quale dal punto C guiderà sino ad AB la CP parallela; e la normale PS che da B guiderà sopra AC, sarà il lato del massimo quadrato, la cui posizione rispètto agli altri lati sarà quella della fig. 7ª, siccome anche la posizione del triangolo equilatero sarà BQY della fig. 2ª. Preso finalmente in mano il suo compasso, misurerà le lunghezze delle precitate rette HF, PS, e se la prima risulta maggiore della seconda, il triangolo equilatero riuscendo maggior del quadrato, questa figura in confronto dell' altra dovrà preferire, e al contrario se egli trova HF < PS. Non aggiungo la dimostrazione di questa pratica, perchè qualunque iniziato nelle matematiche la trova di per se agevolmente.

Regola 2ª. Succede alla precedente l' ipotesi di B ottuso, e di C > 60°. Deve quì l' artefice al punto C formare un angolo ACD di 60° colla retta CD, che incontra la AB in D (fig. 10ª). Essendo CD il lato del massimo triangolo equilatero, che può essere inscritto alla figura ABC, colla posizione che ha nella fig. 3ª conduca sopra AE una normale DH, e la produca sinchè HF sia eguale ad HC. Sopra tutta la DF descriva un semicircolo, che tagli la AC prolungata in qualche punto K, e consideri HK come lato di un quadrato eguale all' aja del suddetto triangolo equilatero. Essendogli poi nota per ciò che si è fatto nell' ipotesi precedente, la lunghezza del lato PS (fig. 9ª) del quadrato inscrittibile, colla misura delle due lunghezze HK, PS potrà decidere se sia preferibile l' aja del triangolo, o del quadrato, e trascurar l' una, o l' altra.

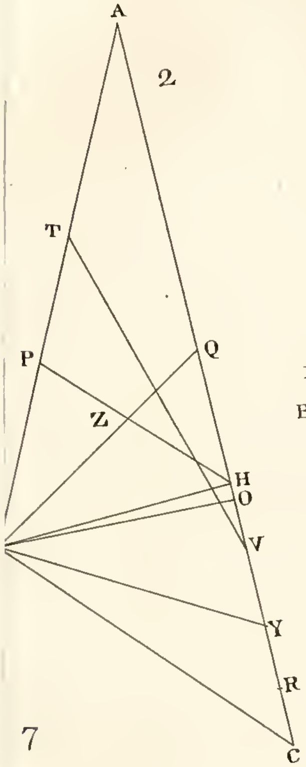
Regola 3ª. Quì si suppone che l' angolo B massimo sia acuto, e l' angolo C $< 60^\circ$; ma però sempre maggiore di A. In tal caso il lato del massimo triangolo equilatero è la retta BQ (fig. 2ª), e il quadrato massimo inscrittibile è quello della figura 7ª. Per determinare il lato di tal quadrato l' artefice opererà nella maniera seguente. Dal punto A (fig. 11ª) calerà sul lato BC la perpendicolare AE. Prodotta poi la BC sino a K, cosicchè CK $=$ AE, tirerà la retta AK, alla quale da C condurrà la parallela CF, che incontra in F la AB, e abbasserà da F sul lato BC la perpendicolare FH, che riesce il lato del ricercato quadrato. Nella figura 9ª essendosi poi determinato il lato HF del quadrato eguale al triangolo equilatero massimo di lato BQ, coll' attual misura delle due rette HF (fig. 9ª) HF (fig. 11ª) verrà in cognizione quale di queste abbia da preferire.

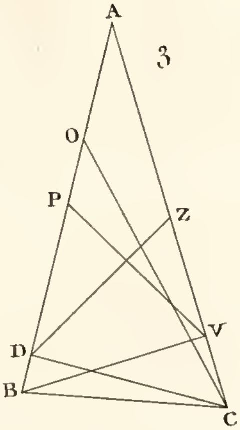
Regola 4ª. Resta anche il caso di B acuto, e C$>60^\circ$, alla quale ipotesi rimanendo lo stesso quadrato massimo inscritto della precedente, compete il lato CD (fig. 3ª) del massimo triangolo equilatero. Ma all' aja di questo è eguale quella del quadrato di lato HK (fig. 10ª), confronterà quindi l' artefice la lunghezza di HK con quella di FH (fig. 11ª) ed avrà in pronto la scelta, che far deve dell' una, o dell' altra figura.

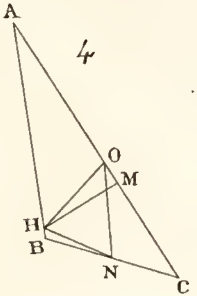
Le precedenti quattro regole fanno conoscere al pratico, quale delle due figure rettilinee, che possono restare incluse nel triangolo ABC sia dell' altra maggiore. Ma siccome oltre di queste abbiam voluto anche considerare il massimo circolo, che vi può essere inscritto, così convien guidare l' artefice nell' esame ancora che può fare sulla maggioranza, o minoranza della rettilinea di massima aja relativamente alla inscritta aja circolare. Oltre gli altri necessarj strumenti suppongasi il pratico fornito di un di quei compassi di proporzione, che comprendono anche due linee rette incise, una delle quali rappresenti il raggio 1 di un circolo, e l'altra la semicirconferenza colla più possibile approssimazione. Ciò premesso trasporterà egli sopra una carta queste due rette, che porrà tra loro a squadra, come nella figura 12ª, nella quale FO è il raggio 1; FE la semicirconferenza. Congiunta la EO, e indefinitamente prodotta, siccome nella figura 8ª, col dividere gli angoli A, B per metà, e col condurre dal punto di concorso K delle rette dividenti una normale KP sul lato AB, determinerà il raggio del circolo, che può essere inscritto, essendo tal raggio la stessa KP, farà ad essa uguale la EH (fig. 12ª) e in situazione normale alla FE cui tirerà la parallela HB, che incontra in B la EO prodotta se occorre. Calata quindi da B la perpendicolare BA, prenderà nella produzione di EA la retta AC = AB, e su tutta la CE come diametro descritto un semicircolo, prolungherà sino alla circonferenza in P la retta AB. Considerando ora AP come lato di quadrato eguale all' aja del circolo inscrittibile nella data materia; confronterà in tutte le ipotesi corrispondenti alle quattro regole sopra esposte la grandezza del lato del quadrato massimo, che compete o all' aja del triangolo equilatero, o a quella del quadrato inscritto colla grandezza di AP; e se questa gli risulta maggiore, qualora gli piaccia di estrar dalla materia un' aja massima, preferirà alle altre l' aja circolare, che dovrà essere da lui abbandonata, ove la mentovata grandezza gli riesca minore, accettando invece la massima rettilinea, che si è colla circolare confrontata.

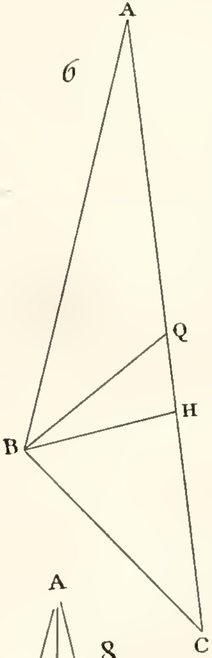
Potendo il raggio del circolo riuscir anche minore dell' unità del compasso, le linee morte che rappresenta la figura 12ª mettono sotto l' occhio la costruzione analoga, che deve l' artefice fare in tal caso, ed egli considerando attentamente tuttociò, che di pratico si è sin quì esposto, potrà agevolmente per cavarla dalla data materia, trascegliere quella figura regolare delle tre esaminate, che più al suo intento conviene.

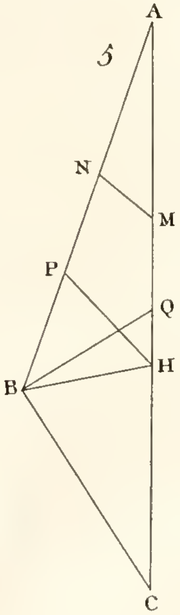
RI-


2
A
T
P
Q
Z
H
O
V
Y
R
C

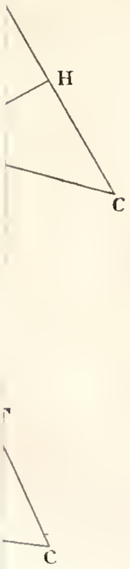

3
A
O
P
Z
V
D
B
C

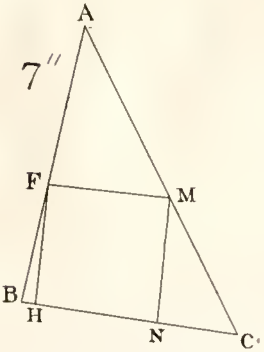

4
A
O
M
H
B
N
C

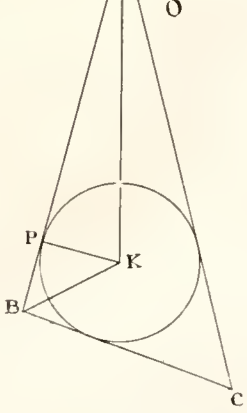

6
A
Q
H
B
C


5
A
N
M
P
Q
H
B
C

7


H
C
T
C


7″
A
F
M
B
H
N
C


8
P
K
B
C

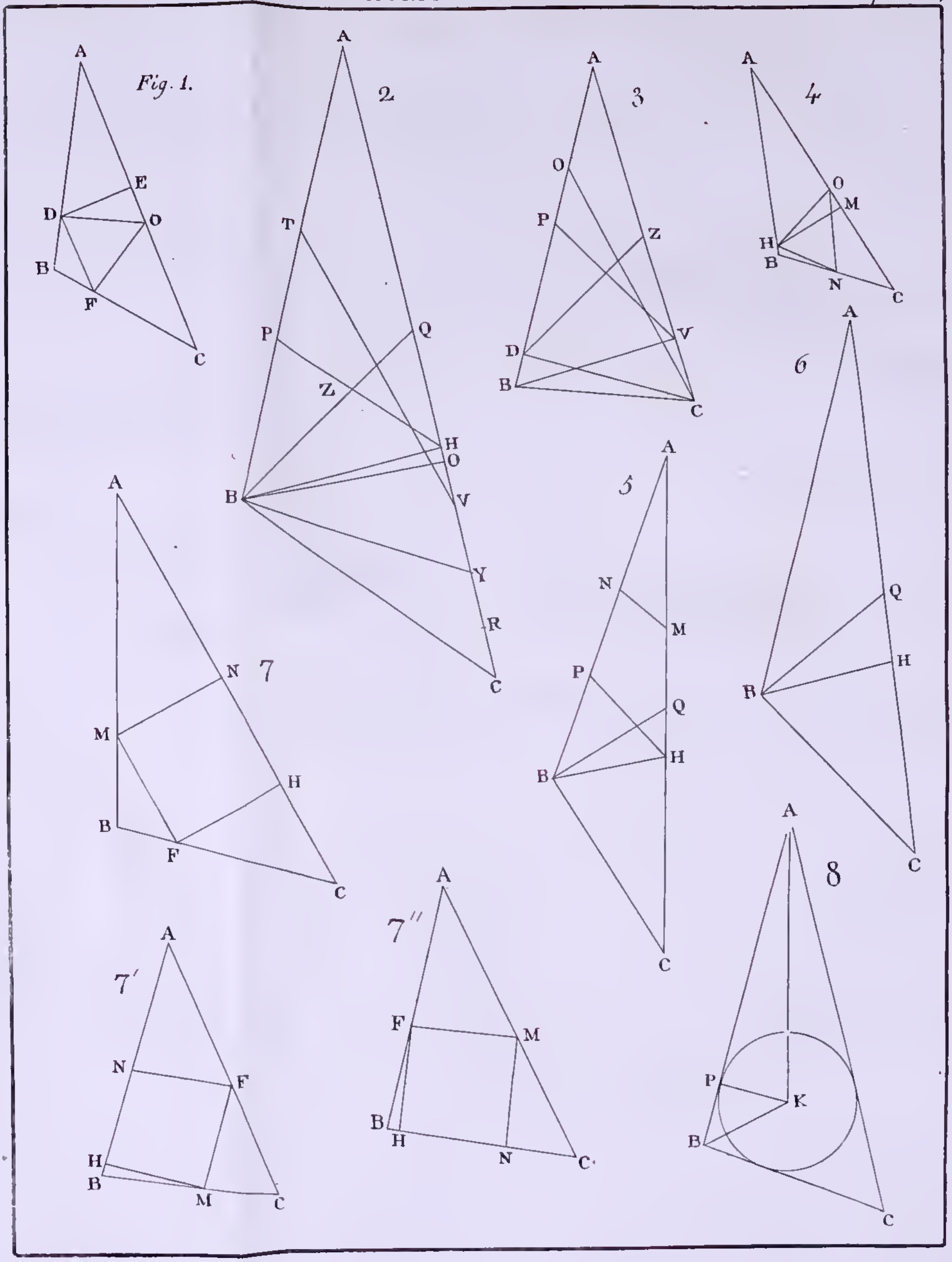
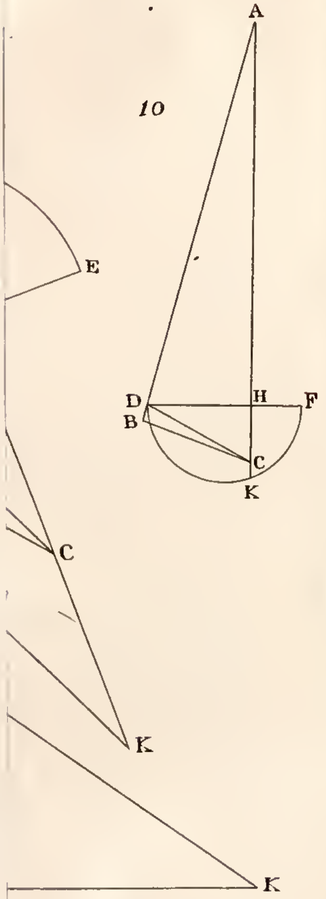
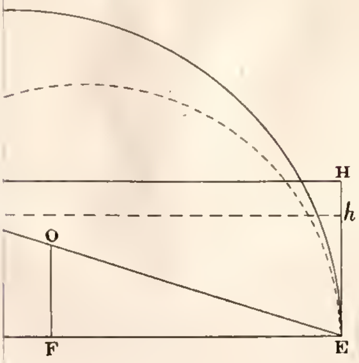


Fig. 1.
A
E
D
O
B
F
C
2
A
T
P
Q
Z
H
O
B
V
Y
R
C
3
A
O
P
Z
V
D
B
C
4
A
O
M
H
B
N
C
6
A
Q
H
B
C
5
A
N
M
P
Q
H
B
C
7
A
N
M
H
B
F
C
7′
A
N
F
H
B
M
C
7″
A
F
M
B
H
N
C
8
A
P
K
B
C

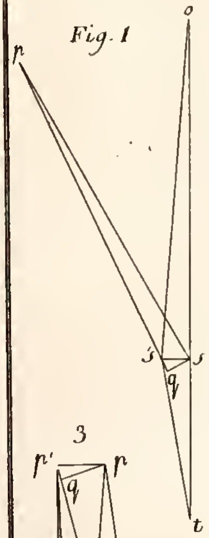
MEMORIE DI MATEMAT. *Soc. Ital. T.XIII. p. 284*


10
A
D
H
F
B
C
K
E
C
K
K

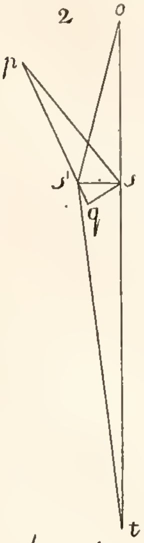


MEMORIA SLOP *p. 340*

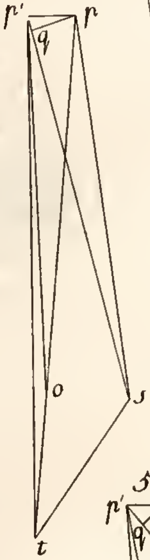
Fig. 1



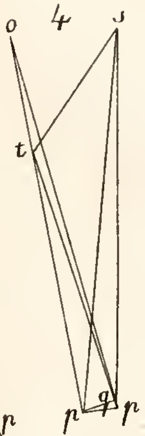
2



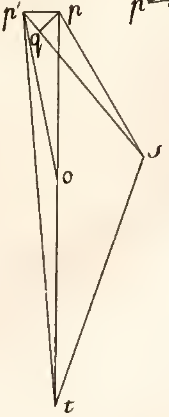
3

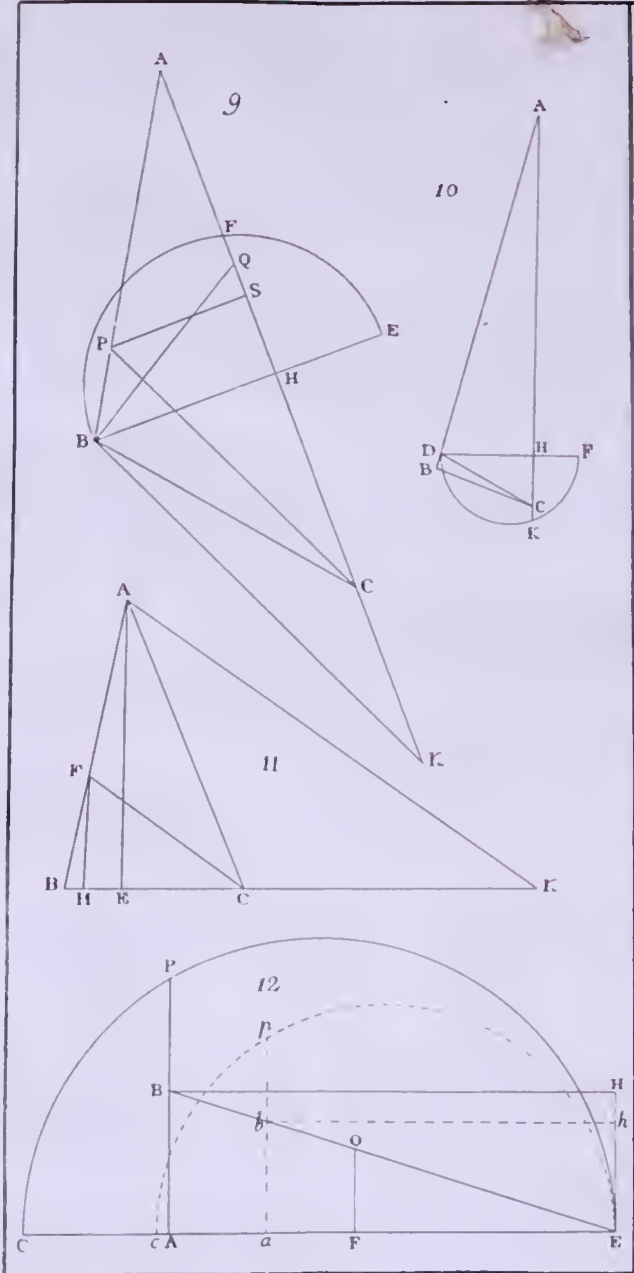


4



5




9
A
F
Q
S
P
E
H
B
C
K
10
A
D
H
F
B
C
K
11
A
F
B
H
E
C
K
12
P
p
B
H
b
h
O
C
c
A
a
F
E

MEMORIA SLOP *p* 340

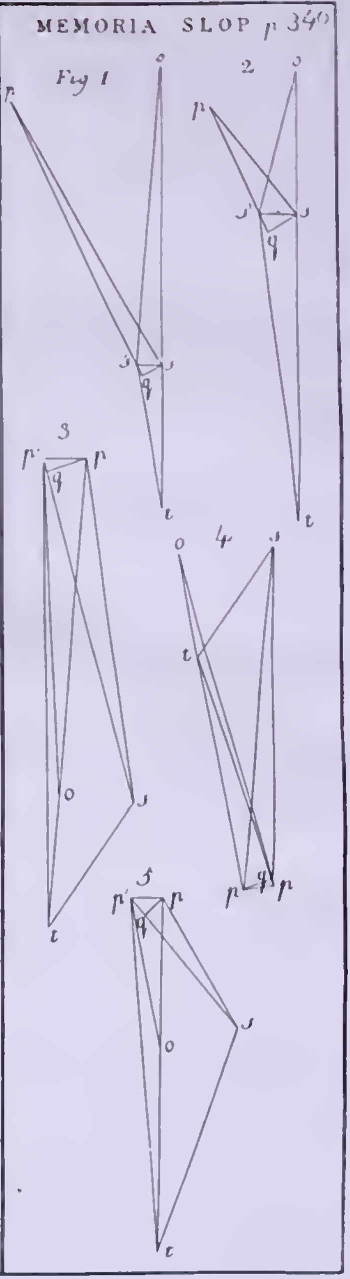


Fig 1
o
p
s'
s
q
t
2
o
p
s'
s
q
t
3
p'
p
q
o
s
t
4
o
s
t
p'
q
p
5
p'
p
q
o
s
t

RIFLESSIONI

SOPRA ALCUNE FORMULE, CHE ESPRIMONO I TRE LATI DEI TRIANGOLI RETTILINEI RETTANGOLI

Del Sig. Giuseppe Slop

Ricevute il dì 25 Giugno 1806.

Avendomi tenuto discorso il celebre P. Pagnini mio pregiatissimo Collega nella Pisana Università di più e varie serie numeriche con molto ingegno da lui ritrovate, le quali danno in numeri intieri i lati dei triangoli rettilinei rettangoli, mi si presentò l' idea di cercare, se potevansi esprimere con delle formole generali i tre lati d' ogni qualunque triangolo rettilineo rettangolo.

Per far ciò, sia uno dei due cateti $=2p+1$, il secondo $=x$, e l' ipotenusa $=x+1$, dal che noi avremo $2p^2+2p=x$, ed i tre lati del triangolo $2p+1$ . . $2p^2+2p$ . . $2p^2+2p+1$, ciascuno dei quali moltiplicato per q ci darà una formola generale $2pq+q$ . . $2p^2q+2pq$ . . $2p^2q+2pq+q$, in cui la somma dei quadrati dei due primi termini sarà sempre uguale al quadrato del terzo termine.

Se poi si faccia il 1° cateto $=2n$, il secondo $=x$, e l' ipotenusa $=x+2$, si avrà $x=n^2-1$, ed i tre lati del triangolo $2n$ . . n^2-1 . . n^2+1, che moltiplicati per m daranno una seconda formula generale $2nm$ . . n^2m-m . . n^2m+m, in cui si avrà parimente la somma dei quadrati dei primi due termini eguale al quadrato del terzo.

In questa seconda formula facendo $2nm=2xy$, è chiaro che potranno variarsi in infinito i valori d' x e di y, in modo che il loro prodotto resti sempre uguale a nm, quali valori sostituiti nella formula ad n e ad m daranno un infinito numero di triangoli rettangoli, che avranno comune il cateto $2nm$.

Facendo lo stesso nella prima formula avremo $2pq+q = 2xy+y$, $x = \frac{2pq+q-y}{2y}$, e $y = \frac{2pq+q}{2x+1}$, onde apparisce che potendosi variare in infinito i valori d' x e d' y in modo che $2x+y$ resti sempre uguale a $2pq+q$, se nella prima formula generale si sostituiscan questi ai valori dati di p e di q, si avrà come nella seconda formula un numero infinito di triangoli rettangoli, che avranno comune il cateto $2pq+q$. È inutile l' avvertire che per p e q, e per n ed m in ambedue le surriferite formule si potranno assumere numeri qualunque frazionarj ed anco radicali.

Rimane ora a considerarsi il caso in cui i valori di p e q, di n ed m volendosi in numeri intieri, si avranno espressi in numeri intieri anco i tre lati d' ogni triangolo, o almeno l' ipotenusa ed uno dei due cateti, quando questo confondendosi coll' ipotenusa, l' altro diventa $=0$, come si ha nella prima formula, nella quale posto $p=0$, i tre lati sono $q \,..\, 0 \,..\, q$, e nella seconda, in cui fatto $n=1$, si hanno i tre lati $2m \,..\, 0 \,..\, 2m$.

Se nella prima formula sia $p=1$, i tre lati d' ogni triangolo saranno 3 . . 4 . . 5, 6 . . 8 . . 10, 9 . . 12 . . 15, o sia $3q \,..\, 4q \,..\, 5q$, cioè in progressione aritmetica colla differenza $=q$.

Riguardo all' uso delle descritte formule si conoscerà chiaramente per mezzo di esempj. Dato il cateto 13 sia proposto di trovare dalla prima formula, a cui questo appartiene, i triangoli rettangoli che se ne possono dedurre, e che hanno quel numero per minor cateto. Presa l' espressione di questo $2pq+q=13$, si avrà $p = \frac{13-q}{2q}$, e $q = \frac{13}{2p+1}$, quali non possono aversi in numeri intieri, che facendo $p=6$, $q=1$ onde la formula non darà che un sol triangolo i di cui lati sono 13 . . 84 . . 85. Se sia il minor cateto $2pq+q=21$, si avrà $p = \frac{21-q}{2q}$, e $q = \frac{21}{2p+1}$, quali ci danno per p i valori 10 . . 3 . . 1, e per q, 1 . . 3 . . 7, che sostituiti nella formula a p e q danno i tre triangoli 21 . . 220 . . 221, 21 . . 72 . . 75, 21 . . 28 . . 35, così $2pq+q=15$ dà $p = \frac{15-q}{2q}$, e $q=\frac{15}{2p+1}$, cioè per p, 7 . . 2 . . 1, e per q, 1 . . 3 . . 5, ed i triangoli 15 . . 112 . . 113, 15 . . 36 . . 39, 15 . . 20 . . 25. V'è un quarto triangolo che ha l'istesso cateto cioè 15 . . 8 . . 17 quale non può aversi da $2pq+q$ che è l'espressione del minor cateto. Si dedurrà questo dalla seconda formula, facendo $2nm=8$, la quale preso $n=4$ ed $m=1$ si trasforma in quella di $2n$ . . n^2-1 . . n^2+1, che ci dimostra doversi dare simil caso, ogni volta che essendo n numero pari, si ha $2pq+q=n^2-1$.

Nella seconda formula presi per n tutti i divisori di nm, esclusane l'unità che dà i lati $2m$ . . 0 . . $2m$, e per m i quozienti, e sostituiti ad n ed m, si avranno tutti i triangoli d'un dato cateto che possono da quella dedursi: così da $2nm=4$, si avrà $nm=2$, che ha il solo divisore $2=n$, il quoziente $1=m$, ed il triangolo 4 . . 3 . . 5; da $2nm=6$, si ha $nm=3$, il divisore $3=n$, il quoziente $1=m$; ed il triangolo 6 . . 8 . . 10. Se $2nm=12$, si ha $nm=6$, i divisori o sia gli n, 6 . . 3 . . 2, i quozienti o sia gli m, 1 . . 2 . . 3, ed i triangoli 12 . . 35 . . 37, 12 . . 16 . . 20, 12 . . 9 . . 15.

Se nella prima formula sia $q=2c$, $2pc+c=nm$, si avrà $2pq+q=2mn$, cioè la prima formula prenderà la forma della seconda, alla quale dovrà esser ridotta, riserbando la prima per quando q è un numero dispari. La formula così ridotta nel caso di q numero pari sarà più semplice della prima, e conterrà rari triangoli, oltre a tutti quelli che si avevano prima della riduzione, come mostrano i seguenti esempj: sia $2pq+q=40$, si avrà $p=\frac{40-q}{20}=2$, $q=\frac{40}{2p+1}=8$, ed il solo triangolo 40 . . 96 . . 104. Ridotta la stessa formula alla forma della seconda avremo $2nm=40$, ed $nm=20$, i cui divisori 2 . . 4 . . 5 . . 10 sono altrettanti valori di n, ed i quozienti 10 . . 5 . . 4 . . 2 i valori di m, che danno i quattro triangoli 40 . . 30 . . 50, 40 . . 75 . . 85, 40 . . 96 . . 104, 40 . . 198 . . 202.

Sia $2pq+q=36$, si avrà $p=\frac{36-q}{2q}$, e $q=\frac{36}{2p+1}$, cioè i due valori di p, 1 . . 4, e di q, 12 . . 4 ed i due triangoli 36 . . 48 . . 60, 36 . . 160 . . 164.

Nella seconda formula sarà $2nm=36$, $nm=18$, i divisori 2 . . 3 . . 6 . . 9, ed i quozienti 9 . . 6 . . 3 . . 2, ed i triangoli 36 . . 27 . . 45, 36 . . 48 . . 60, 36 . . 105 . . 111, 36 . . 160 . . 164.

Per trovare se oltre ai triangoli che si hanno da quelle formule ve ne siano altri, che abbiano il dato cateto, sia questo $=r$, il secondo $=x$, ed $x+q$ l' ipotenusa, si avrà $x=\frac{r^2-q^2}{2q}$, onde il numero dei triangoli rettangoli, che avranno il cateto r, sarà determinato dal numero dei valori, che potranno assegnarsi a q per avere x in numero intiero.

Sia $r=21$, avremo $x=\frac{(21+q)(21-q)}{2q}$, i valori di q, 1 . . 3 . . 7 . . 9, quelli di x, 220 . . 72 . . 28 . . 20, ed i triangoli 21 . . 220 . . 221, 21 . . 72 . . 75, 21 . . 28 . . 35, 21 . . 20 . . 29. Notisi che quando r è un numero dispari bisognerà che lo sia anche q, perchè x sia un numero intiero.

Questi resultati sono gli stessi, che avevamo poc' anzi dedotti dalla prima formula generale, toltone il quarto che non può aversi da quella nella quale si suppone dato il cateto minore.

Fatto $2nm=20$, la seconda formula ci dà i valori di n, 2 . . 5 . . 10, quelli di m, 5 . . 2 . . 1, ed i triangoli 20 . . 15 . . 25, 20 . . 48 . . 52, 20 . . 99 . . 101, il che ci mostra che neppur questa può rappresentare il triangolo 20 . . 21 . . 29, onde cercheremo se l' istesso possa aversi da qualche altra formula.

Sia questa ms . . s^2-m . . s^2+m, la quale facendo $s=5$, ed $m=4$ ci dà quel triangolo che sfuggiva alle altre due formule; resta però a vedere, se anche variando i valori di s ed m, la stessa continui ad esprimere i tre lati d' un triangolo rettangolo; perchè ciò segua, bisognerà avere $m^2s^2=4ms^2$, equazione che non si verifica, se non quando è $m=4$, perciò la ricercata terza formula generale sarà $4s$ . . s^2-4 . . s^2+4, quale ci mostra che quando nella seconda formula sarà $2nm$ divisibile per 4, facendo il quoziente = 5, vi sarà sempre un triangolo che avrà i lati $2nm$, o sai $4^5 \,..\, 5^2-4 \,..\, 5^2+4$.

È da notarsi che se s è un numero pari, il triangolo di questa sarà compreso ancora nella seconda formula, la quale facendo allora $2n = 5$, ed $m=4$, prenderà la forma della terza.

Sia $r = 39$, si avrà $x = \frac{(39+q)(39-q)}{2q}$, i valori di q, 1 .. 3 .. 9 .. 13, quelli di x, 760 .. 252 .. 80 .. 52, ed i triangoli 39 .. 760 .. 761, 39 .. 252 .. 255, 39 .. 80 .. 89, 39 .. 52 .. 65. La prima formula ci darà gli stessi resultati per i due primi ed il quarto triangolo con i valori di p, 19 .. 6 .. 1, senza però comprendere il terzo triangolo, che avendo il 9 per valore di q non può avere nell' equazione $2pq+q=39$ un numero intiero che sia eguale a p. Questo terzo triangolo si avrà da una nuova formula $nm-1 \,..\, 2mn \,..\, 2mn+n-1$, nella quale perchè i quadrati dei due primi termini sieno uguali al quadrato del terzo, bisogna che sia $n=\frac{2m+2}{4m-m^2+1}$, equazione che dà in numeri intieri per n, 2 .. — 3 .. 10, per m, 3 .. 5 .. 4, ed i triangoli 5 .. 12 .. 13, — 16 .. — 30 .. — 34, 39 .. 80 .. 89, dei quali i primi due si hanno ancora dalle due prime formule.

Potranno però servire le prime due formule generali senza bisogno di ricorrere a delle nuove, se non esigendo espressi i valori di p e q, di m ed n ambedue in numeri intieri, ci contenteremo che p ed n siano frazionarj, restando intieri q ed m, purchè diano in numeri intieri i tre lati del triangolo; così nell' esempio di sopra $2pq+q=21$, fatto $q=9$ sarà $p=\frac{2}{3}$, che sostituiti nella prima formula danno il triangolo 21 .. 20 .. 29.

Deve osservarsi, che quando si ammette il valore di p frazionario, $2pq+q$ può essere l' espressione tanto del minore che del maggior cateto. Lo stesso si avrà nell' equazione $2pq+q=39$. Preso $q=9$, avremo $p=\frac{5}{3}$, che sostituiti nella formula prima danno come sopra il triangolo 39 .. 80 .. 89.

Lo stesso segue nella seconda formula, come apparisce dai seguenti esempj. Se si faccia $2nm=44$, si avrà $x=\frac{(44+t)(44-t)}{2t}$, dove per avere x numero intiero, bisognerà che t sia numero pari. Dai valori di t, 2..4..8..22 avremo quelli di x, 483..240..117..33, ed i triangoli 44..483..485, 44..240..244, 44..117..125, 44..33..55, i due primi ed il quarto dei quali avevamo già dedotti dalla seconda, ed il terzo dalla formula terza; quale si avrà ancora direttamente dalla seconda, facendo $m=4$ ed $n=\frac{22}{4}$. Così preso $2nm=20$, si ha $x=\frac{(20+t)(20-t)}{2t}$, i valori di t, 2..4..8..10, quelli d'x, 99..48..21..15, ed i triangoli 20..99..101, 20..48..52, 20..21..29, 20..15..25, che avevamo sopra dedotti, tre dalla seconda ed uno dalla terza formula, quale si avrà parimente dalla seconda facendo $m=4$ ed $n=\frac{5}{2}$, dal che rilevasi che essendo il minor cateto di numero dispari e l'altro pari, si avrà lo stesso triangolo da ambe le formule, il che potrà darsi ancora nel caso inverso, purchè allora il valore di n sia frazionario.

Da quanto abbiamo osservato finora risulta, che per trovare tutti i triangoli, che oltre al dato cateto hanno anche l'altro e l'ipotenusa esprimibili in numeri intieri, dedotti che siensi dalle due prime formule tutti i triangoli che ne vengono dai valori intieri di p e q, m ed n, bisognerà cercare quelli che ne derivano dai valori frazionarj di p ed m, quali se oltre al dato cateto, a cui il primo termine di ciascuna formula rimane sempre uguale, danno anche l'altro cateto in numeri intieri, daranno in numeri intieri ancora l'ipotenusa: così per il cateto $2pq+q=21$ dopo aver trovati tutti i valori di p in numeri intieri 10..3..1, quelli di q, 1..3..7, ed i tre triangoli, qualunque altro valore intiero di q dovrà dare quello di p frazionario; facendo perciò $q=9$, sarà $p=\frac{21-q}{2q}=\frac{2}{3}$, che sostituiti nell'espressione del secondo cateto, ci daranno $2p^2q+2pq=20$, e l'ipotenusa $=29$.

Si vede inoltre dalle premesse formule, che qualora un dato numero è suscettibile della forma n^2m-m, o di quella s^2-4, fra i triangoli di cui ſarà cateto vi è quello di $2nm$ .. n^2m-m .. n^2m+m se prende la prima, e quello di $4s$ .. s^2-4 .. s^2+4 se prende la seconda forma, e che se un dato numero pari può esprimersi sotto la forma $2p^2q+2pq$, fra i triangoli di cui è un cateto vi è quello di $2pq+q$ .. $2p^2q+2pq$ .. $2p^2q+2pq+q$.

È chiaro ugualmente, che se un dato numero è suscettibile d' una delle tre forme $2p^2q+2pq+q$, n^2m+m, s^2+4, sarà esso l'ipotenusa del triangolo i di cui cateti sono $2pq+q$, $2p^2q+2pq$ se ha la prima, $2nm$, n^2m-m se la seconda, $4s$, s^2-4 se prende la terza forma. Sia dato il numero 65, preso $p=2$, e $q=5$ si avrà $2p^2q+2pq+q=65$ che è l'ipotenusa del triangolo, i di cui cateti $2pq+q$, $2p^2q+pq$ sono 25 e 60. Se si fa $n=8$, $m=1$ avremo $n^2m+m=65$, cioè l' ipotenusa d' un altro triangolo, i di cui cateti $2nm$, n^2m-m saranno 16 e 63.

ALCUNE PROPRIETA' GENERALI DELLE FUNZIONI

MEMORIA

Del Sig. Paolo Ruffini

Ricevuta il dì 27 Giugno 1806.

A tutti i Matematici è noto appartenere alle radici della Unità certe affezioni, le quali annunziansi, e si dimostrano loro proprie: ora io dico, che queste affezioni medesime, queste medesime proprietà hanno un' estensione molto più generale. Se, data una quantità, si pratichi su di essa un'operazione di calcolo, qualunque siasi, algebrica o trascendentale, capace di somministrare più valori tra loro diversi, io dico, che su di questi valori paragonati fra loro, verificansi sempre certe proprietà generali analoghe affatto alle sovraindicate riguardanti le radici della Unità, di cui queste per conseguenza non sono, che un caso particolare. La determinazione di simili proprietà formerà il soggetto della presente Memoria.

Il dottissimo ed illustre Matematico Sig. Cavaliere Brunacci ha nella sua Analisi derivata mostrato, come da uno stesso principio di Derivazione vengano comprese tutte le operazioni del calcolo. Noi quivi vedremo, che una medesima legge generale regna sempre fra i risultati molteplici, i quali ottengonsi da una quantità data, qualunque siasi l' operazione, che li produce. Unendo così queste alle osservazioni del Chiarissimo Professor di Pavia, apparirà, mi lusingo, viemaggiormente quel rapporto generale, e quel legame, che esiste fra tutte le operazioni del Calcolo, e fra le quantità diverse, che da simili operazioni vengon prodotte.

SEZIONE I.

Alcune Proprietà generali delle funzioni semplici.

1. Espressa con la lettera P una quantità qualunque di valore indeterminato, supponghiamo di eseguire su di essa una sola, qualunque siasi, operazione di calcolo, e supponghiamo, che quindi se ne ottenga un risultato molteplice di grado n, il cui valore chiamerò in generale y. Indicata con la lettera Ψ da anteporsi alla P simile operazione, ed espressi con le y', y'', y''', ec. $y^{(n)}$ gli n diversi valori della y, che dipendono dalla supposta moltiplicità, e con gli apici istessi da sovrapporsi alla Ψ espressi i corrispondenti risultati, che procedono dalla operazione supposta, avremo generalmente

$$y = \Psi(P)$$

e quindi

$$y' = \Psi'(P), y'' = \Psi''(P), y''' = \Psi'''(P), \text{ ec. } y^{(n)} = \Psi^{(n)}(P) .$$

I. Se la operazione da praticarsi sulla P è l'estrazione di una radice, per esempio della 5.^{a}, onde $n = 5$; il segno Ψ corrisponderà all' altro $\sqrt[5]{\ }$, e chiamata α una delle radici 5^e immaginarie della unità, ne verrà $y = \Psi(P) = \alpha^q \sqrt[5]{P}$, esprimendosi dalla q uno dei numeri 0, 1, 2, 3, 4, onde avremo

$$y' = \Psi'(P) = \sqrt[5]{P}, y'' = \Psi''(P) = \alpha \sqrt[5]{P}, y''' = \Psi'''(P) = \alpha^2 \sqrt[5]{P},$$
$$y^{\text{iv}} = \Psi^{\text{iv}}(P) = \alpha^3 \sqrt[5]{P}, y^{\text{v}} = \Psi^{\text{v}}(P) = \alpha^4 \sqrt[5]{P} .$$

II. In un circolo, il cui raggio sia espresso dalla r, denominato π il quadrante, μ quell' arco non $> \pi$, che ha la quantità P per Coseno, e ρ quell' arco qualunque, il cui Coseno uguaglia la stessa P, venga richiesto di determinare il Coseno dell' Arco $\frac{\rho}{m}$, essendo m un dato numero intero. Poichè chiamato q un intero qualunque, abbiamo $\mathrm{Cos.}\,\mu = \mathrm{cos.}\,(4q\pi \pm \mu)$, e per conseguenza avendosi $P = \mathrm{Cos.}\,(4q\pi \pm \mu)$, e $\rho = 4q\pi \pm \mu$, risulterà in generale

$y = \Psi(P) = \mathrm{Cos.}\left(\frac{4q\pi \pm \mu}{m}\right)$, e attribuendo alla q successivamente i valori 0, 1, 2, 3, ec. $m - 1$, e dei due segni anteposti alla μ tenendo conto del solo +, avremo per la y gli m valori $y' = \Psi'(P) = \mathrm{Cos.}\,\frac{\mu}{m}$, $y'' = \Psi''(P) = \mathrm{Cos.}\left(\frac{4\pi + \mu}{m}\right)$, $y''' = \Psi'''(P) = \mathrm{Cos.}\left(\frac{8\pi + \mu}{m}\right)$, $y^{iv} = \Psi^{iv}(P) = \mathrm{Cos.}\left(\frac{12\pi + \mu}{m}\right)$, ec. $y^{(m)} = \Psi^{(m)}(P) = \mathrm{Cos.}\left(\frac{4(m-1)\pi + \mu}{m}\right)$.

III. Che se sia domandato il logaritmo della solita quantità P in un sistema, in cui il protonumero sia 1; otterremo generalmente $y = \Psi(P) = \log.P + 4q\pi\sqrt{-1}$, chiamato log.P il logaritmo reale della supposta P, e ponendo successivamente $q = 0, 1, 2, 3$, ec., ne verrà $y' = \Psi'(P) = \log.P$, $y'' = \Psi''(P) = \log.P + 4\pi\sqrt{-1}$ $y''' = \Psi'''(P) = \log.P + 8\pi\sqrt{-1}$, $y^{iv} = \Psi^{iv}(P) = \log.P + 12\pi\sqrt{-1}$, ec. avendosi quivi il numero n di valore infinito.

2. Chiamasi *Funzione semplice* della P quella espressione, nella quale non viene su di questa P indicata che una sola operazione di calcolo: saranno perciò sue funzioni semplici le espressioni P^m, $\sqrt[n]{P}$, sen.P, log.P. Che se vengono su della P accennate più operazioni, allora la funzione, che ne risulta, si denomina *Funzione composta*: quindi saranno tante sue funzioni composte tutte le espressioni $\sqrt[m]{P} + \sqrt[n]{P}$, $\sqrt[5]{P^3}$, $\frac{\log\,(\mathrm{sen.}\,P)}{\cos.\,P}$.

I. Ciascuna funzione composta è chiaro essere funzione semplice di altra, o di altre funzioni della P meno composte; così queste seconde sono esse pure funzioni semplici di altre anche meno composte, e così di seguito, finchè si giunge sempre a delle funzioni della sola P semplici. Negli esempj sovraesposti le espressioni $\sqrt[m]{P} + \sqrt[n]{P}$, $\sqrt[5]{P^3}$ sono funzioni semplici, la seconda della quantità P^3, la prima delle due $\sqrt[m]{P}$, $\sqrt[n]{P}$, e tutte queste P^3, $\sqrt[m]{P}$, $\sqrt[n]{P}$ sono poi funzioni semplici della P sola. La espressione $\frac{\log.(\text{sen}.P)}{\cos.P}$ è una funzione semplice delle quantità $\log.(\text{sen}.P)$, $\cos.P$; di queste la seconda è tosto una funzione semplice della P, e la prima è tale della sen P; finalmente la sen. P è funzione semplice della sola P.

II. Tra le funzioni della P altre ve ne hanno, le quali sono essenzialmente semplici, altre che sono composte essenzialmente, ed altre infine, le quali presentate come semplici possono divenire composte, e viceversa. L' espressione a cagion d' esempio $\sqrt[6]{P}$ è per la definizione data una funzione semplice; potendosi però ridurre all' altra $\sqrt[3]{\sqrt{P}}$, potrà con tal riduzione diventare composta: le espressioni poi $\sqrt[5]{P}$, $\sqrt[7]{P^3}$, non ammettendo ulterior riduzione, sono due funzioni della P, la prima necessariamente semplice, la seconda essenzialmente composta.

III. Tanto una funzione semplice, come una composta possono avere più valori dipendentemente dalla moltiplicità della funzione medesima; un numero 5 ne ha la funzione semplice $\sqrt[5]{P}$, ed un numero *mn* la composta $\sqrt[m]{P + \sqrt[n]{P}}$.

3. Rappresentata con la lettera Π l' operazione di calcolo inversa a quella, che nel (n.° 1) abbiam supposto di esprimere con la Ψ, vedesi, che, se abbiamo $y = \Psi(P)$, dovrà essere viceversa $\Pi(y) = P$. Ma tutti i valori y', y'', y''', ec. $y^{(n)}$ nati sono dalla medesima P in conseguenza della stessa operazione accennata dalla Ψ. Dunque dovrà essere

$$\Pi(y') = \Pi(y'') = \Pi(y''') = \text{ec.} = \Pi(y^{(n)}) = P, \text{ ossia}$$

$$\Pi(\Psi'(P)) = \Pi(\Psi''(P)) = \Pi(\Psi'''(P)) = \text{ec.} = \Pi(\Psi^{(n)}(P)) = P.$$

I. Nel primo degli esempj del (n.° 1) poichè la Ψ indica l' estrazione di una radice 5^a, la Π indicherà l' elevazione alla 5^a potenza, e sarà in questo caso

$\Pi(y) = y^5 = \Pi(\Psi(P)) = (\alpha^7 \sqrt[5]{P})^5 = P$.

II. Nell' esempio secondo, in cui si è supposto $P = \cos.\rho$, indicandosi dalla Ψ la determinazione del coseno spettante alla *mesima* parte dell' arco ρ, cosicchè $y = \Psi(P) = \cos.\frac{\rho}{m}$; fatto viceversa $\frac{\rho}{m} = \sigma$, onde $y = \Psi(P) = \cos.\sigma$, verrà dalla Π ad indicarsi la determinazione del coseno, che appartiene all' arco σ ripetuto m volte, cioè all' arco ρ; e per conseguenza avremo $\Psi(y) = \cos.m\sigma = \cos.\rho = P$.

III. In egual modo rappresentandosi nell' esempio terzo dalla Π la determinazione del numero, il cui logaritmo è y, espressa con la lettera e la base del sistema logaritmico, ne verrà $\Pi(y) = e^y = P$.

4. Dalla seconda delle linee (II) apparisce, che mentre sopra uno qualunque dei risultati $\Psi'(P)$, $\Psi''(P)$, $\Psi'''(P)$, ec. vuolsi attualmente eseguire l' operazione accennata dalla Π, non avremo, che da togliere il rispettivo segno Ψ', Ψ'', Ψ''', ec.

5. *Teor.* 1.° Uno qualunque de' valori y', y'', y''', ec. $y^{(n)}$ della $y = \Psi(P)$ (n.° 1) uguaglia sempre una funzione di un altro qualunque de' medesimi; cosicchè espressa con la lettera f la parola funzione, si avrà per esempio il valore $y'' = f(y')$.

Pel (n.° 3) abbiamo $\Pi(y'') = \Pi\, y') = P$, e pel (n.° 1) abbiamo $y'' = \Psi''(P)$: ma essendo le due quantità $\Pi(y')$, P tra loro uguali, coll' eseguirsi su dell' una e dell' altra una medesima operazione, i risultati corrispondenti, che ne vengono, deggiono essere uguali fra loro. Dunque sarà $\Psi''(P) = \Psi''(\Pi(y'))$, e per conseguenza, avendosi $y'' = \Psi''(\Pi(y'))$, se invece di effettuare, indicheremo con i rispettivi segni i risultati delle operazioni espresse dalle Π, Ψ'', ne verrà y'' uguale ad una funzione della y', e però $y'' = f(y')$. Dunque ec.

Espressi in generale con le lettere $y^{(a)}$, $y^{(b)}$ due qualsivogliono dei valori della y, cosicchè $y^{(a)} = \Psi^{(a)}(P)$, $y^{(b)} = \Psi^{(b)}(P)$ (n.° 1), con un discorso perfettamente uguale al precedente troveveremo essere $y^{(a)} = \Psi^{(a)}(\Pi(y^{(b)}))$, e per conseguenza $y^{(a)}$ uguale ad una funzione della $y^{(b)}$.

Poichè nel primo dei sovraesposti esempj l' esponente 5 corrisponde al segno Π(n.° 3), e la $\alpha\sqrt[5]{}$ al segno Ψ'' (n.° 1), ne verrà $y'' = \Psi''(\Pi(y')) = \alpha\sqrt[5]{(y')^5}$, e però $y'' = \alpha y'$. Nell' esempio terzo avendosi $\Pi(y') = e^{y'}$ (n.° 3), risulterà $y'' = \Psi''(\Pi(y')) = \log.(e^{y'}) + 4\pi\sqrt{-1} = y' + 4\pi\sqrt{-1}$. Nell'esempio secondo finalmente poichè, denominato 1.° arc. quello, il quale, mentre è non $> \pi$ (II. n.° 1), ha poi per Cosseno una quantità data, dall' Equazione $y' = \cos.\frac{\mu}{m}$ pel citato (art. II. n.° 1) ricavasi $\frac{\mu}{m} =$ 1.° Arc. Cos.y', ne verrà $\Pi(y') = \mathrm{Cos}.\mu = \mathrm{Cos}.m$ (1.° Arc. Cos.y'), ed essendo $y'' = \mathrm{Cos}.\left(\frac{4\pi+\mu}{m}\right)$, otterremo il valor di $y'' = \Psi(\Pi(y')) =$ Cos. $\left(\frac{4\pi}{m} + \right.$ 1.° Arc. Cos.$\left. y' \right)$.

6. *Teor.* 2.° Supposto ora che la f significhi, non una funzione in generale, ma bensì quella determinata funzione, da cui venendo affetto il valore y', l'altro ne risulta y'' diverso dal primo, onde si ha $y'' = f(y')$ (n.° 5); io dico, che, rappresentatosi con la $y^{(a)}$ un valore della y qualunque, dovrà ancora la $f(y^{(a)})$ esprimere un valore della y diverso da $y^{(a)}$.

Poichè abbiamo $y'' = \Psi''(\Pi(y'))$ (n.° prec.), e però $f(y') = \Psi''(\Pi(y'))$; la f non farà che denotare il risultato, che ottiensi col praticare successivamente sulla y' prima l'operazione indicata dalla Π, e poscia l'altra espressa dalla Ψ'', indipendentemente dal valore della y' medesima; dunque posto invece della y' un altro valore qualunque, per esempio il valore $y^{(a)}$, dovrà essere ancora $f(y^{(a)}) = \Psi''(\Pi(y^{(a)}))$. Chiamato ora t il valore della $f(y^{(a)})$, onde $t = \Psi''(\Pi(y^{(a)}))$, si pratichi sopra l' uno, e l' altro membro di questa Equazione l' operazione accennata dalla Π; dal membro secondo non avremo perciò, che da togliere il segno Ψ'' (n.° 4), e avremo quindi $\Pi(t)=\Pi(y^{(a)})$; ma essendo $y^{(a)}$ uno dei valori della y, abbiam $\Pi(y^{(a)}) = P$ (n.° 3). Dunque, risultando $\Pi(t) = P$; pei (n. 1 , 3) la t altro non sarà che uno dei valori della $y = \Psi(P)$; come dovea dimostrarsi.

7. I. Ritenuta la precedente supposizione di $y'' = f(y')$, facciasi $f(y') = u$, $f(u) = v$, $f(v) = z$, e così di seguito. Tutti questi risultati u, v, z, ec. saranno pel (n. prec.) non meno che y', ed y'', tanti valori della $y = \Psi(P)$.

II. Sostituiscansi nelle supposte successive funzioni il valore delle quantità y'', u, v, z, ec. espresso per la $f(y')$, ci risulterà $y''=f(y')$, $u=f(f(y'))$, $v=f(f(f(y')))$, $z=f(f(f(f(y'))))$, ec.; ma in questi risultati la f rappresenta sempre una medesima determinata funzione (n.° 6). Dunque per indicare simili risultati, invece di ripetere la f, servendoci di numeri sovrapposti a tal lettera, avremo $y''=f(y')$, $u=f^2(y')$, $v=f^3(y')$, $z=f^4(y')$, ec.; ma questa serie di funzioni può pel (prec. I) protraersi all' infinito, e i termini, che ne vengono sono sempre valori della y. Dunque formata la serie infinita

(III) $$y',\ f(y'),\ f^2(y'),\ f^3(y'),\ f^4(y'),\ f^5(y'),\ f^6(y'),\ \text{ec.}$$

ciascuno de' suoi termini sarà un valore della $\Psi(P)$, ed essi tutti verranno rappresentati dalla formola generale $f^q(y')$, esprimendosi dalla q un intero qualunque positivo.

III. Ripetuto sul valore $y^{(a)}$, e sulla $f(y^{(a)})$ il discorso, che abbiamo ora fatto sulle quantità y', $f(y')$, troveremo in egual modo, che, qualunque siasi il valore $y^{(a)}$ della y, saranno ancora valori della stessa y tutti gl' infiniti termini

(IV) $$y^{(a)},\ f(y^{(a)}),\ f^2(y^{(a)}),\ f^3(y^{(a)}),\ f^4(y^{(a)}),\ f^5(y^{(a)}),\ f^6(y^{(a)}),\ \text{ec.}$$

8. I. Supponghiamo, che il numero n dei valori y', y'', y''', ec. $y^{(n)}$ della y (n.° 1) sia finito, e non < 2, e supponghiamo, che tali n valori siano tutti fra lor disuguali. In questa ipotesi è evidente, che andando la serie (III) all' infinito; i suoi termini non potranno essere tutti disuguali fra loro, e che a cagione dei due y', $y''=f(y')$ tra lor disuguali (n.° 5) non potranno neppur essere tutti uguali fra loro.

II. Ciò dunque essendo, suppongansi tra loro uguali i due risultati $f^g(y')$, $f^{g+h}(y')$, in cui g, h siano due numeri interi, il primo non < 1, ed il secondo non < 2. Poichè in due quantità uguali effettuando operazioni uguali, i risultati corrispondenti sono uguali; ne segue, che praticando tanto sulla $f^g(y')$, come sulla $f^{g+h}(y')$ per una sola, o più volte l' operazione inversa a quella, che viene espressa dalla f, i risultati corrispondenti dovranno essere tra loro uguali: ma quando eseguisco una sola volta l' operazione indicata dalla f nella $f^g(y)$; per accennarne il risultato, non faccio che aggiugnere una f, ossia che aggiungere un' unità all' indice g (II. n.° prec.), e scrivo $f^{g+1}(y')$. Dunque per esprimere il risultato, che proviene dall' operazione inversa praticata parimenti una volta sola sopra la $f^g(y')$, dovendo dalle f, che sono di numero g toglierne una, scriverò $f^{g-1}(y')$: lo stesso si dice della $f^{g+h}(y')$. Dunque dall' Equazione $f^g(y')=f^{g+h}(y')$ ricaveremo successivamente $f^{g-1}(y')=f^{g+h-1}(y')$, $f^{g-2}(y')=f^{g+h-2}(y')$, $f^{g-3}(y')=f^{g+h-3}(y')$, ec. fino a $f^{g-g}(y')=f^{g+h-g}(y')$; ma $f^{g-g}(y')=f^0(y')=$ evidentemente y'. Dunque avremo $y'=f^h(y')$. Ho nel presente numero supposto h non < 2, perchè difatti se volendosi un tal numero intero, e positivo, si facesse $h=1$; essendo $f(y')=y''$ (n.° 5) ne verrebbe $y''=y'$, il che a cagione di n non < 2 (prec. I.) non può essere. Perciò nei soliti precedenti esempj avremo rispettivamente 1.° $y''=\alpha y'$, $y'''=\alpha y''=\alpha^2 y'$, $y^{iv}=\alpha y'''=\alpha^3 y'$, ec.; 2.° $y''=\text{Cos.}\left(\frac{4\pi}{m}+1.^\circ\ \text{Arc. Cos. } y'\right)$ $y'''=\text{Cos.}\left(\frac{4\pi}{m}+1.^\circ\ \text{Arc. Cos. } y''\right)=\text{Cos.}\left(\frac{8\pi}{m}+1.^\circ\ \text{Arc. Cos. } y'\right)$, $y^{iv}=\text{Cos.}\left(\frac{4\pi}{m}+1.^\circ\ \text{Arc. Cos. } y'''\right)=\text{Cos.}\left(\frac{12\pi}{m}+1.^\circ\ \text{Arc. Cos. } y'\right)$, ec.; 3.° $y''=y'+4\pi\sqrt{-1}$, $y'''=y''+4\pi\sqrt{-1}=y'+8\pi\sqrt{-1}$, $y^{iv}=y'''+4\pi\sqrt{-1}=y'+12\pi\sqrt{-1}$, ec.

III. Ripeto la medesima operazione inversa nella $y'=f^h(y')$, ossia nella $f^0(y')=f^h(y')$. Proseguendo ad usare della medesima maniera di scrivere, ne verrà $f^{0-1}(y')=f^{h-1}(y')$ ossia $f^{-1}(y')=f^{h-1}(y')$;

$f^{h-1}(y')$; ma essendo h non < 2 (prec. II.) la $f^{h-1}(y')$ è uno dei valori della y (II. n.°6.); dunque sarà tale eziandio la $f^{-1}(y')$. Seguito a far lo stesso nella $f^{-1}(y')=f^{h-1}(y')$; risultandone $f^{-2}(y') = f^{h-2}(y')$, ed essendo $h-1$ non < 1, anche la $f^{-2}(y')$ sarà un valore della y, poichè è tale $f^{h-2}(y')$: tale sarà ancora $f^{-3}(y')$, giacchè abbiamo $f^{-3}(y')=f^{h-3}(y')$, e la $f^{h-3}(y')$ a cagion della $h-2$ non <0 è valor della y; e così in progresso. Dunque la serie (III) potrà estendersi all' infinito eziandio alla sinistra, apponendo alla f indici negativi: lo stesso si dice della serie (IV). Dunque saranno tanti valori della y tutti i seguenti,

(V) $$\text{ec. } f^{-4}(y'), f^{-3}(y'), f^{-2}(y'), f^{-1}(y'), f^{0}(y')=y', f(y'), f^{2}(y'), f^{3}(y'), f^{4}(y'), \text{ ec.}$$
$$\text{ec. } f^{-4}(y^{(a)}), f^{-3}(y^{(a)}), f^{-2}(y^{(a)}), f^{-1}(y^{(a)}), f^{0}(y^{(a)}) = y^{(a)}, f(y^{(a)}), f^{2}(y^{(a)}), f^{3}(y^{(a)}), f^{4}(y^{(a)})$$

espressi dalle formole $f^{q}(y')$, $f^{q}(y^{(a)})$, in cui la q rappresenta un intero qualunque positivo, o negativo.

IV. Ripresa l' Equazione $f^{g}(y') = f^{g+h}(y')$ (prec. II), da questa ricavasi $f^{g-g-h}(y') = f^{0}(y')$, e però $f^{-h}(y')=y'$; ma pel cit°. (prec. II) ottiensi ancora $y'=f^{h}(y')$. Dunque avremo $y'=f^{h}(y')=f^{-h}(y')$, e per conseguenza $f(y')=f^{h+1}(y')=f^{-(h-1)}(y')$, $f^{2}(y')=f^{h+2}(y') = f^{-(h-2)}(y')$, $f^{3}(y')=f^{h+3}(y') = f^{-(h-3)}(y')$, ec., e in generale $f^{g}(y')=f^{h+g}(y')=f^{-(h-g)}(y')$.

9. *Teor.* 3.° Poichè fra i termini della serie (III) pel (II. n.° prec.) ne esiste sempre per lo meno uno, cioè il termine $f^{h}(y')$, in cui $h>1$, il quale si uguaglia ad y'; supponghiamo, che questo $f^{h}(y')$ rappresenti il primo degli accennati termini, che nella serie istessa incontrasi $=y'$, ascendendo continuamente. In tale ipotesi io dico, che i termini $f(y')$, $f^{2}(y')$, $f^{3}(y')$, ec. $f^{h-1}(y')$ dovranno essere tutti disuguali fra loro.

Se, ciò negandosi, si volesse $f^{c}(y')=f^{c+e}(y')$, essendo c, e interi positivi, e $c+e<h$, ne verrebbe $f^{c-c}(y')=f^{c+e-c}(y')$, e però

ro $y' = f^{e}(y')$; ma questo a cagione della $e < h$ è contro la supposizione. Dunque ec.

10. I. Dunque se sia $h = n$, gli n risultati y', $f(y')$, $f^{2}(y')$, $f^{3}(y')$, ec. $f^{n-1}(y')$ altro non saranno che tutti gli n valori (I) della y.

II. Non potrà giammai essere $h > n$ (n.° 1).

III. Giacchè abbiamo $y' = f^{h}(y')$, colloco nella espressione $f^{h}(y')$ invece della y' il valore $f^{h}(y')$; pel (II. n.° 7) ne verrà la $y' = f^{2h}(y')$; pongo nuovamente in quest' ultima espressione la $f^{h}(y')$ invece della y', otterremo $y' = f^{3h}(y')$. Proseguendo nella guisa medesima a sostituire, vedesi, che risulterà $y' = f^{h}(y') = f^{2h}(y') = f^{3h}(y') = f^{4h}(y') =$ ec., e in generale $y' = f^{ph}(y')$, esprimendosi dalla p un intero qualunque.

IV. Posto il numero $g < h$, e nella serie (I) il termine $y^{(g+1)} = f^{g}(y')$; colloco invece della y' la espressione $f^{ph}(y')$, e pel (prec. III.) ne verrà $y^{(g+1)} = f^{ph+g}(y')$.

V. Coll' attribuire al numero arbitrario p i successivi valori 0, 1, 2, 3, ec., e all' altro g corrispondentemente a ciascuno dei valori della p tutti parimenti i valori 0, 1, 2, 3, ec., dall' Equazione $y^{(g+1)} = f^{ph+g}(y')$ apparisce, che mentre nella serie (III) sono pel (n.° 9) risultati fra loro disuguali tutti i primi h termini y', $f(y')$, $f^{2}(y')$, $f^{3}(y')$, ec. $f^{h-1}(y')$, gli altri h, che succedono immediatamente, cioè i termini $f^{h}(y')$, $f^{h+1}(y')$, $f^{h+2}(y')$, $f^{h+3}(y')$, ec. $f^{2h-1}(y')$ sono uguali rispettivamente ai precedenti; così i terzi $f^{2h}(y')$, $f^{2h+1}(y')$, $f^{2h+2}(y')$, $f^{2h+3}(y')$, ec. $f^{3h-1}(y')$ uguagliano in corrispondenza i precedenti primi, e secondi, e così di seguito; onde sarà,

$$y' = f^{h}(y') = f^{2h}(y') = f^{3h}(y') = \text{ec.}$$

$$y'' = f(y') = f^{h+1}(y') = f^{2h+1}(y') = f^{3h+1}(y') = \text{ec.}$$

$$y''' = f^{2}(y') = f^{h+2}(y') = f^{2h+2}(y') = f^{3h+2}(y') = \text{ec.}$$

$y^{iv} =$

$$y^{iv} = f^3(y') = f^{h+3}(y') = f^{2h+3}(y') = f^{3h+3}(y') = \text{ec.}$$

$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

$$y^{(h)} = f^{h-1}(y') = f^{2h-1}(y') = f^{3h-1}(y') = f^{4h-1}(y') = \text{ec.}$$

VI. Collocando nella Equazione $f^g(y') = f^{-(h-g)}(y')$ (IV. n.° 8) invece della g i successivi valori 0, 1, 2, 3, ec., poichè si ottiene $y' = f^{-h}(y')$, $f(y') = f^{-(h-1)}(y')$, $f^2(y') = f^{-(h-2)}(y')$, $f^3(y') = f^{-(h-3)}(y')$, ec., $f^{h-1}(y') = f^{-1}(y')$; ne segue che nella prima delle serie (V) venendo alla sinistra della y' gli h risultati $f^{-1}(y')$, $f^{-2}(y')$, $f^{-3}(y')$, ec. $f^{-(h-1)}(y')$, $f^{-h}(y')$ uguagliano rispettivamente gli h valori $y^{(h)}$, $y^{(h-1)}$, $y^{(h-2)}$, ec. y'', y'.

Giacchè abbiamo $y' = f^{-h}(y')$ (IV. n.° 8.) col porre invece della y' la espressione $f^{-h}(y')$, risulterà $y' = f^{-2h}(y')$; ripeto la sostituzione medesima nella $f^{-2h}(y')$, e otterremo $y' = f^{-3h}(y')$; e così in progresso. Dunque in generale avremo ancora $y' = f^{-ph}(y')$, e posta questa espressione invece della y' nella $f^{-(h-g)}(y')$ (IV. n.° 8) otterrassi $y^{(g+1)} = f^g(y') = f^{-(p+1)h+g}(y')$, onde ripetendo le medesime precedenti supposizioni, vedesi, che nella prima delle serie (V) tutti gl' infiniti termini, che si estendono alla sinistra della y', altro non sono, che i primi h, che scorrono alla destra, cioè i primi y', $f(y')$, $f^2(y')$, $f^3(y')$, ec. $f^{h-1}(y')$ ripetuti successivamente ad h con un ordine sempre costante.

VII. Per la supposta indeterminazione della P (n.° 1.), e quindi per la corrispondente indeterminazione della $y' = \Psi'(P)$ i rapporti delle quantità $f(y')$, $f^2(y')$, $f^3(y')$ ec. con la y' devono unicamente dipendere dalla natura della funzione espressa dalla f (n.° 6). Dunque i rapporti medesimi, che hannosi da queste $f(y')$, $f^2(y')$, $f^3(y')$, ec. con la y', dovendosi rispettivamente avere ancora dalle $f(y^{(a)})$, $f^2(y^{(a)})$, $f^3(y^{(a)})$, ec. con la $y^{(a)}$; ne segue, che essendo $y' = f^{ph}(y')$ (prec. III), dovrà essere ancora $y^{(a)} = f^{ph}(y^{(a)})$, e quindi $y^{(a+g)} = f^{ph+g}(y^{(a)})$ (prec. IV).

VIII. Ritenuta la supposizione del (n.° 9), supposizione, che quando non avvertasi il contrario, riterremo costantemente in avvenire, anche nella serie (IV) tutti i primi h termini $y^{(a)}$, $f(y^{(a)})$, $f^2(y^{(a)})$, $f^3(y^{(a)})$, ec. $f^{h-1}(y^{(a)})$ dovranno essere tra loro disuguali.

IX. In conseguenza de' (prec. VII, VIII.) vedesi, che ancora sopra la serie (IV.), e sopra la seconda delle (V) si dovrà verificare quanto nei (prec. I, II, ec. VI) abbiam detto della serie (III), e della prima delle (V) .

X. Se si ha la quantità $y^{(a)}$ uguale ad uno, qualunque siasi, dei termini della prima delle due serie (V), tutti i termini di queste due serie si uguaglieranno a due a due fra di loro. Imperocchè supppsto $y^{(a)} = f^g(y')$; avremo ancora $f^c(y^{(a)}) = f^{c+g}(y')$, qualunque siasi il numero intero c. Ora coll'attribuire a questa c successivamente i valori 0, 1, 2, 3, ec. — 1, — 2, — 3, ec., dalla $f^c(y^{(a)})$ tutti si ottengono i risultati della seconda serie, e tutti quelli della prima ottengonsi dalla $f^{c+g}(y')$. Dunque ec.

XI. Che se $y^{(a)}$ è disuguale da ciascuno dei valori della prima serie (V), qualunque valore abbiansi gl' interi c, g, non potrà giammai essere $f^c(y^{(a)}) = f^{c+g}(y')$; perchè se ciò fosse, ne verrebbe $y^{(a)} = f^g(y')$ contro la supposizione.

XII. Dai (prec. V, ec.) apparisce, che le espressioni $f^q(y')$, $f^q(y^{(a)})$, qualunque valore intero attribuiscasi alla q, sia esso positivo, o negativo, non potranno mai di valori tra loro diversi somministrarci che rispettivamente gli h.

y', $f(y')$, $f^2(y')$, $f^3(y')$, ec. $f^{h-1}(y')$,
$y^{(a)}$, $f(y^{(a)})$, $f^2(y^{(a)})$, $f^3(y^{(a)})$, ec. $f^{h-1}(y^{(a)})$.

Che se, dato alla q un determinato valore non intero, che dirò h', vogliasi, che risulti ancora $f^{h'}(y') = y'$. Poichè rinnovati quivi i discorsi precedenti ottienesi $y' = f^{ph'}(y')$, $y^{(g+1)} = f^{ph'+g}(y')$, e cane cangiato il valore y' nell' altro $y^{(a)}$ si ha $y^{(a)} = f^{ph}(y^{(a)})$, $y^{(g+a)} = f^{ph+g}(y^{(a)})$, ne segue, che anche i termini, i quali nascono da queste formole, col dare alle p, g dei valori interi, qualsivogliano, altro rispettivamente non sono, che gli h delle due precedenti serie.

11. *Teor.* 4.° Se il numero n (n.° 1.) dei valori tra lor disuguali y', y'', y''', ec. $y^{(n-1)}$ della y sia finito, e sia un numero primo, dovrà essere h (n.° 9) $= n$.

Se ciò si nega; poiche non può essere $h > n$ (II. n.° 10.) supponghiamo, se è possibile, $h < n$, onde oltre gli h valori tra loro diversi (V. n.° 10.)

$$y',\ y''=f(y'),\ y'''=f^2(y'),\ y^{\mathrm{iv}}=f^3(y'),\ \text{ec. } y^{(h)}=f^{h-1}(y'), \tag{VI}$$

un altro se ne abbia per lo meno da' loro disuguale, che denominerò $y^{(h+1)}$, e formisi con esso la serie

$$y^{(h+1)},\ f(y^{(h+1)}),\ f^2(y^{(h+1)}),\ f^3(y^{(h+1)}),\ \text{ec. } f^{h-1}(y^{(h+1)}). \tag{VII}$$

Queste serie (VI), (VII) pei (II, III. n.° 7 ° n.° 9, VIII, XI. n. prec.), somministreranno un numero $2h$ di valori della y tutti fra loro differenti; ma, a cagion di h non <2 (II. n.° 8), e di n numero primo, non può essere $2h = n$. Dunque oltre gli accennati (VI), (VII) dovendo esistere per lo meno un altro valore della y da loro diverso; denomino questo y^{2h+1}, e ne formo la serie

$$y^{(2h+1)},\ f(y^{(2h+1)}),\ f^2(y^{(2h+1)}),\ f^3(y^{(2h+1)}),\ \text{ec. } f^{h-1}(y^{(2h+1)}). \tag{VIII}$$

Dovendo ancora tutti i termini (VIII) esprimere pei citati (III. n.° 7., VIII, XI n.° prec.) tanti valori della y tutti disuguali fra loro, e disuguali dai precedenti (VI), (VII), avremo nelle tre serie ora trovate un numero $3h$ di valori della y tutti fra loro diversi; ma il numero n, per essere primo, e pel (II. n. 8), non può neppure uguagliare $3h$. Dunque esistendo necessariamente per lo meno un altro valore della y differente da tutti gli accennati (VI), (VII), (VIII), chiamo esso $y^{(3h+1)}$, e ne faccio la serie

$$y^{(3h+1)},\ f(y^{(3h+1)}),\ f^2(y^{(3h+1)}),\ f^3(y^{(3h+1)}),\ \text{ec. } f^{h-1}(y^{(3h+1)}). \tag{IX}$$

Per le stesse ragioni, che sonosi esposte relativamente alle (VII), (VIII)

(VIII) avendosi nella (IX) altri h valori tutti diversi fra loro, e dai precedenti; tutte e quattro le serie (VI), (VII), (VIII), (IX) daranno $4h$ valori differenti della y, e non potendo nemmeno essere $n = 4h$; dovrà esistere per lo meno un altro valore. Col proseguire lo stesso raziocinio, vedesi agevolmente, che quindi risulterebbero necessariamente per la y infiniti valori tutti disuguali fra loro; ma essendo l'intero lor numero n finito, ciò non può essere. Dunque non potrà neppur essere, che abbiasi $h < n$, e però ec.

12. I. Nella supposizione del (n.° prec.), determinato uno qualunque dei valori della $y=\Psi(P)$, e determinato qual sia la funzione espressa dalla f (n.° 6), potremo adunque agevolmente ritrovar tutti gli altri, col semplice replicare successivamente $n-1$ volte la stessa operazione, che è indicata dalla f sopra i successivi risultati, che se ne ottengono.

II. Se n sia numero composto; allora è facile a vedersi, che non potrà non verificarsi il discorso del (n. prec.), e quindi che potrà non essere $h=n$. In tal caso però dovrà essere h summultiplo di n. Imperciocchè se si volesse n nè uguale, nè multiplo di h, trovato un numero q delle precedenti serie (VI), (VII), (VIII), ec., essendo $g>1$ (il che potrà sempre farsi, giacchè per la ipotesi, e pel (II. n.° 10) deve essere $h< n$) si avrebbe in tali serie un numero gh di valori della y tutti disuguali fra loro (n.° 9. VIII, XI. n.° 10); ma qualunque siasi questo g, non può giammai risultare $gh=n$, perchè allora n sarebbe multiplo di h, contro la supposizione. Dunque proseguendo il discorso del (n.° prec.), troverebbesi quì pure il numero dei valori della y infinito, il che non può essere.

13. I. Volendo addurre alcuni esempj di quanto si è detto in generale dal (n.° 6) fin quì; suppongasi in primo luogo, che la Ψ (n.° 1) indichi l'estrazione di una radice *mesima*, essendo m numero primo, e posto $y'=\Psi'(P)=\sqrt[m]{(P)}$, si esprima con la α una qualunque delle radici *mesime* immaginarie dell'unità. Dicendosi quivi del numero m ciocchè nel (I. n.° 1) si è detto del

5, otterremo, come nel primo esempio del (n.° 5) $y''=f(y')=\alpha y'$, e quindi indicandosi per f la moltiplicazione con la lettera α ne verrà $f^2(y')=\alpha^2(y')$, $f^3(y')=\alpha^3 y'$, ec.; onde pel (II. n.° 7) tutti gl' infiniti termini y', $\alpha y'$, $\alpha^2 y'$, $\alpha^3 y'$, ec. saranno tanti valori della y, e però tante radici *mesime* della quantità P, e verranno questi tutti rappresentati dalla $\alpha^q y'$, potendo il numero q pel (III. n. 8) essere un intero qualunque tanto positivo, come negativo. Dal (n.° 11) poi si vede, che i primi m termini, che ottengonsi dalla $\alpha^q y'$, col supporre successsivamente $q=0, 1, 2, 3,$ ec., $m-1$, sono, a cagione di m numero primo, tutte esattamente le m radici della equazione $y^m=\mathrm{P}$; e queste, allorchè si progredisca a supporre $q=m$, $m+1$, $m+2$, $m+3$, ec., ed allorchè si ponga successivamente $q=-1, -2, -3, -4$, ec. non fanno pei (V, VI. n.° 10) che ripetersi ad m ad m continuamente.

II. Prendiamo in secondo luogo l' esempio del (II. n.° 1); in cui si ha $y'=\Psi'(\mathrm{P})=\mathrm{Cos.}\frac{\mu}{m}$, ed in cui pel (n.° 5) avendosi $y''=\mathrm{Cos.}\left(\frac{4\pi}{m}+\frac{\mu}{m}\right)=\mathrm{Cos.}\left(\frac{4\pi}{m}+1.^\circ\ \mathrm{Arc.\ Cos.}y'\right)$, la lettera f indica l' addizione alla quantità $\frac{\mu}{m}=1.^\circ\ \mathrm{Arc.\ Cos.}\ y'$ dell' altra $\frac{4\pi}{m}$. In conseguenza di ciò la serie infinita $\mathrm{Cos.}\frac{\mu}{m}$, $\mathrm{Cos.}\left(\frac{4\pi+\mu}{m}\right)$, $\mathrm{Cos.}\left(\frac{8\pi+\mu}{m}\right)$, ec. il cui termine generale è $\mathrm{Cos.}\left(\frac{4q\pi+\mu}{m}\right)$, somministrerà in tutti i suoi termini tanti valori della y (II. n.° 7), potendo l' intero q essere tanto positivo, che negativo (III. n.° 8), ed avuti dalle prime supposizioni della $q=0, 1, 2, 3$, ec. $m-1$ tutti gli m valori fra lor differenti della y (n.° 11), gli altri non saranno, che questi stessi successivamente ripetuti (V, VI. n.° 10).

Dalle proprietà delle quantità circolari sappiamo essere $\mathrm{Cos.}\left(\frac{4q\pi-\mu}{m}\right)=\mathrm{Cos.}\left(\frac{-4q\pi+\mu}{m}\right)$; ma per quanto si è detto nel (VI. n.° 10) gli stessi valori della y, che risultano dalla espressione $\mathrm{Cos.}\left(\frac{-4q\pi+\mu}{m}\right)$, risultano ancora dalla $\mathrm{Cos.}\left(\frac{4q\pi+\mu}{m}\right)$; dunque i va-

valori medesimi si otterranno eziandio dalla Cos. $\left(\frac{4q\pi-\mu}{m}\right)$; ed ecco il perchè nella Cos. $\left(\frac{4q\pi\pm\mu}{m}\right)$ ottenuta nel (II. n.° 1.) può trascurarsi, come abbiam fatto in realtà il segno inferiore.

III. Nel terzo degli esempj (III. n.° 1), ove la Ψ indica logaritmo, ed ove pel (n.° 5) si ha $y''=f(y')=y'+4\pi\sqrt{-1}$, essendo $y'=\Psi'(\text{P})=\log.\text{P}$, la f esprimerà l'addizione della quantità $4\pi\sqrt{-1}$ all' altra y', e per conseguenza gl' infiniti termini, che producónsi dalla espressione $y'+4q\pi\sqrt{-1}$ ci esprimeranno ancor quivi tanti valori della y (II. n.° 7., III. n.° 8). In questo caso però non può aver luogo quanto si è detto nel (n.° 11), e nei (V. VI. n.° 10), perchè il numero dei valori tra loro diversi della y è infinito.

Tutte queste proprietà, che sonosi accennate nei (prec. I, II, III), e che sono già note ai Matematici vedesi, che infine dipendono da un principio medesimo, principio il quale, come apparisce da quanto abbiam detto, è comune a tutte le funzioni semplici (n.° 2) di una data quantità P.

IV. Data l' Equazione $x^3-3b^2x-2c=0$, nella quale abbiasi b^3 non $<c$, con un raggio, il cui valore sia b^3 descrivasi un circolo, e in questo chiamato come nel (II. n.° 1) π il valore del quadrante, e μ il valore di quell' arco, il quale essendo non $>\pi$, ha per coseno la quantità c, vogliasi $\text{P}=\text{Cos.}\mu+\text{Sen.}\mu\sqrt{-1}$, ed $y=\Psi'(\text{P})=\text{Cos.}\frac{\mu}{3}+\text{Sen.}\frac{\mu}{3}\sqrt{-1}$.

Cercando primieramente di determinare qual funzione delle x', x'', x''' (così chiamate le tre radici della Equazione data) sia nella ipotesi presente la quantità data P, e quale la y; osservo, che per le supposizioni fatte abbiamo $\text{Cos.}\mu=c=\frac{x'x''x'''}{2}$; $\text{Sen.}\mu=\sqrt{(b^6-c^2)}=\sqrt{\left(-\frac{(x'x''+x'x'''+x''x''')^3}{27}-\frac{(x'x''x''')^2}{4}\right)}$; ma per la mancanza del secondo termine nella data Equazione si ha $x'=-x''-x'''$. Dunque con la sostituzione risultando

$\text{Cos}.\,\mu = -\frac{x''^2 x''' - x'' x'''^2}{2}$, $\text{Sen}.\,\mu = \sqrt{\left(\frac{(x''^2 + x''x''' + x'''^2)^3}{27} - \frac{(x''^2x''' + x''x'''^2)}{4}\right)}$, e quindi eseguite le accennate elevazioni a potenza, e la susseguente estrazione della radice 2.ª, ottenendosi $\text{Sen}.\,\mu = \frac{2x''^3 + 3x''^2 x''' - 3x''x'''^2 - 2x'''^3}{2.\,3\sqrt{3}}$, ne verrà

$$P = \text{Cos}\,\mu + \text{Sen}.\,\mu\sqrt{-1} = \frac{-x''^2x''' - x''x'''^2}{2} + \frac{(2x''^3 + 3x''^2x''' - 3x''x'''^2 - 2x'''^3)\sqrt{-3}}{2\,.\,9}$$

$$= \frac{3\sqrt{-3}}{27}x''^3 - 3\left(\frac{9 - 3\sqrt{-3}}{2\,.\,27}\right)x''^2x''' - 3\left(\frac{9 + 3\sqrt{-3}}{2\,.\,27}\right)x''x'''^2 - \frac{3\sqrt{-3}}{27}x'''^3$$

$$= \frac{1}{27}\left(\frac{-3+\sqrt{-3}}{2}x'' + \frac{-3-\sqrt{-3}}{2}x'''\right)^3 = \frac{1}{27}\left(-x'' - x''' + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\,x'' + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\,x'''\right)^3 = \frac{1}{27}\left(x' + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}x'' + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}x'''\right)^3,$$

e supposto $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \beta$, onde $\beta^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $\beta^3 = 1$, avremo

$$P = \text{Cos}.\,\mu + \text{Sen}\,\mu\sqrt{-1} = \frac{1}{27}(x' + \beta\,x'' + \beta^2\,x''')^3;$$

ma essendo b^3 il raggio, abbiamo

$$\left(\text{Cos}.\tfrac{\mu}{3} + \text{Sen}.\tfrac{\mu}{3}\sqrt{-1}\right)^3 = b^6\left(\text{Cos}.\,\mu + \text{Sen}.\,\mu\sqrt{-1}\right),$$ e però

$$\text{Cos}.\,\tfrac{\mu}{3} + \text{Sen}.\tfrac{\mu}{3}\sqrt{-1} = b^2\left(\text{Cos}.\mu + \text{Sen}.\mu\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = b^2\sqrt[3]{P}$$

Dunque uno dei valori della supposta $y = \text{Cos}.\frac{\mu}{3} + \text{Sen}.\frac{\mu}{3}\sqrt{-1}$ sarà $= \frac{b^2}{3}(x' + \beta x'' + \beta^2 x''')$. Chiamato pertanto y' un tal valore, sarà $y' = \Psi'(P) = \frac{b^2}{3}(x' + \beta x'' + \beta^2 x''') = b^2\sqrt[3]{P}$; e per conseguenza nella ipotesi presente corrispondendo la Ψ' all' estrazione di una radice cubica dalla P, ed alla moltiplicazione di questa per la quantità cognita b^2, saranno pel (prec. I) valori della y ancora le quantità $\beta y'$, $\beta^2 y'$, che quindi chiamerò y'', y''' (n.° 1), e tali non saranno che queste sole y', y'', y''', risultando

$y'=\frac{b^2}{3}(x'+\beta x''+\beta^2 x'''), y''=\frac{b^2}{3}(x'''+\beta x'+\beta^2 x'')$,

$y'''=\frac{b^2}{3}(x''+\beta x''+\beta^2 x')$.

Ciò posto, poichè abbiamo

$y''=\beta\, y'=\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) y', y'''=\beta^2\, y'=\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) y'$, e poichè nel circolo avente il raggio b^3 abbiamo $-\frac{b^3}{2}=\text{Cos.}\frac{4\pi}{3}=\text{Cos.}\frac{8\pi}{3}$, e Sen. $\frac{4\pi}{3}=\frac{b^3\sqrt{3}}{2}$, Sen. $\frac{8\pi}{3}=-\frac{b^3\sqrt{3}}{2}$, ne verrà

$y''=\frac{1}{b^3}\left(\text{Cos.}\frac{4\pi}{3}+\text{Sen}\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}\right)y', y'''=\frac{1}{b^3}\left(\text{Cos.}\frac{8\pi}{3}+\text{Sen.}\frac{8\pi}{3}\sqrt{-1}\right)y'$;

ma essendo $\beta=\frac{1}{b^3}\left(\text{Cos.}\frac{4\pi}{3}+\text{Sen.}\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}\right)$, ne viene

$\beta^q=\frac{1}{b^{3q}}\left(\text{Cos.}\frac{4\pi}{3}+\text{Sen}\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}\right)^q=\frac{b^{3(q-1)}}{b^{3q}}\left(\text{Cos.}\frac{4q\pi}{3}+\text{Sen.}\frac{4q\pi}{3}\sqrt{-1}\right)$.

Dunque ancora l' espressione $\frac{1}{b^3}\left(\text{Cos.}\frac{4q\pi}{3}+\text{Sen.}\frac{4q\pi}{3}\sqrt{-1}\right)y'$; siccome l'altra $\beta^q y'$ (prec. I) coll' attribuirsi alla q i successivi valori 0, 1, 2, 3, ec. $-$ 1, $-$ 2, $-$ 3, ec., tutti e solamente ci somministrerà i tre valori y', y'', y''', esprimendosi quivi dalla f (n. 6) la moltiplicazione per $\frac{1}{b^3}\left(\text{Cos.}\frac{4\pi}{3}+\text{Sen.}\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}\right)$.

Collocando ora invece della y' il suo valore Cos. $\frac{\mu}{3}$ + Sen. $\frac{\mu}{3}\sqrt{-1}$, ci risulta $y=\frac{1}{b^3}\left(\text{Cos.}\frac{4q\pi}{3}+\text{Sen.}\frac{4q\pi}{3}\sqrt{-1}\right)\left(\text{Cos.}\frac{\mu}{3}+\text{Sen.}\frac{\mu}{3}\sqrt{-1}\right)$, e però

$$y=\frac{1}{b^3}\Big[\left(\text{Cos.}\frac{4q\pi}{3}\text{Cos.}\frac{\mu}{3}-\text{Sen.}\frac{4q\pi}{3}\text{Sen.}\frac{\mu}{3}\right)+\left(\text{Cos.}\frac{4q\pi}{3}\text{Sen.}\frac{\mu}{3}+\text{Sen.}\frac{4q\pi}{3}\text{Cos.}\frac{\mu}{3}\right)\sqrt{-1}\Big].$$

Dunque sarà ancora $y=\text{Cos.}\frac{4q\pi+\mu}{3}+\text{Sen.}\frac{4q\pi+\mu}{3}\sqrt{-1}$ espressione, dalla quale, facendo successivamente $q=3p$, $3p+1$, $3p+2$, rappresentato con la p un intero qualunque, si avrà

y'

$$y' = \text{Cos.}\,\frac{4.3p\pi+\mu}{3} + \text{Sen.}\,\frac{4.3p\pi+\mu}{3}\sqrt{-1}\,,$$

$$y'' = \text{Cos.}\,\frac{4(3p+1)\pi+\mu}{3} + \text{Sen.}\,\frac{4(3p+1)\pi+\mu}{3}\sqrt{-1}\,,$$

$$y''' = \text{Cos.}\,\frac{4(3p+2)\pi+\mu}{3} + \text{Sen.}\,\frac{4(3p+2)\pi+\mu}{3}\sqrt{-1}\,.$$

Se invece di porre $P = \text{Cos.}\mu + \text{Sen.}\mu\sqrt{-1}$, fatto si fosse $P = \text{Cos.}\mu - \text{Sen.}\mu\sqrt{-1}$, e la corrispondente quantità $\text{Cos.}\,\frac{\mu}{3} - \text{Sen.}\,\frac{\mu}{3}\sqrt{-1}$ si fosse chiamata u: con lo stesso precedente discorso, sarebbesi ritrovato

$$u' = \frac{b^2}{3}(x' + \beta x''' + \beta^2 x'') = \text{Cos.}\,\frac{4.3p\pi+\mu}{3} - \text{Sen.}\,\frac{4.3p\pi+\mu}{3}\sqrt{-1}\,,$$

$$u'' = \beta^2 u' = \frac{b^2}{3}(x''' + \beta x'' + \beta^2 x') = \text{Cos.}\,\frac{4(3p+1)\pi+\mu}{3} - \text{Sen.}\,\frac{4(3p+1)\pi+\mu}{3}\sqrt{-}$$

$$u''' = \beta u' = \frac{b^2}{3}(x'' + \beta x' + \beta^2 x''') = \text{Cos.}\,\frac{4(3p+2)\pi+\mu}{3} - \text{Sen.}\,\frac{4(3p+2)\pi+\mu}{3}\sqrt{-}$$

Mediante poi i precedenti valori delle y, u potremo agevolmente determinare le note espressioni circolari prive d' immaginarii, a cui eguagliansi le radici x', x'', x''', che a cagione di b^3 non $< c$ sappiamo essere tutte e tre reali. Imperocchè avendosi

$$x' + \beta x'' + \beta^2 x''' = \frac{3y'}{b^2},\; x''' + \beta x' + \beta^2 x'' = \frac{3y''}{b^2},\; x'' + \beta x''' + \beta^2 x' = \frac{3y'''}{b^2}\,,$$

$$x' + \beta^2 x'' + \beta x''' = \frac{3u'}{b^2},\; x''' + \beta^2 x' + \beta x'' = \frac{3u''}{b^2},\; x'' + \beta^2 x''' + \beta x' = \frac{3u'''}{b^2}\,,$$

col sommare queste Equazioni prese corrispondentemente a due a due con la medesima $x' + x'' + x''' = 0$, otterremo

$x' = \frac{y'+u'}{b^2}$, $x''' = \frac{y''+u''}{b^2}$, $x'' = \frac{y'''+u'''}{b^2}$, e però

$$x' = \frac{2}{b^2}\,\text{Cos.}\,\frac{4.3p\pi+\mu}{3}$$

$$x''' = \frac{2}{b^2}\,\text{Cos.}\,\frac{4(3p+1)\pi+\mu}{3}$$

$$x'' = \frac{2}{b^2}\,\text{Cos.}\,\frac{4(3p+2)\pi+\mu}{3}$$

e in generale

$$x = \frac{2}{b^2}\,\text{Cos.}\,\frac{4q\pi+\mu}{3}\,.$$

SE-

SEZIONE II.

Alcune Proprietà generali delle Funzioni composte .

14. I. Supponghiamo il numero n dei valori tutti fra lor disuguali della y (n.° 1) finito, e composto; e ritengasi costantemente la supposizione del (n.° 9) onde dipendentemente dalla funzione rappresentata dalla f (n. 6), ripetuta quanto si vuole, abbiansi pei (V, VI. n.° 10) i soli h valori della serie (VI). In conseguenza di ciò dovendo il numero n essere uguale o multiplo di h, suppongasi multiplo, e sia $n=hb$, avendosi tanto l' intero h, come l' altro $b>1$. A cagion di quest' ipotesi il termine $y^{(h+1)}$ della serie (VII) (n.° 11), essendo disuguale da tutti i valori (VI), non può pel (V. n.° 10) uguagliare alcuno dei termini della prima delle serie (V); ma questo $y^{(h+1)}$ deve essere funzione della y' (n.° 5). Dunque essendone una funzione diversa da quella, che abbiamo indicata con la f (n.° 6) replicata quante volte esatte si vuole; supporrò $y^{(h+1)}=\varphi(y')$.

II. Siano di numero $g>1$ tutti i risultati fra loro diversi, che producunsi dalla y', col ripetere su di essa quanto si vuole l' operazione rappresentata dalla φ (V, VI. n.° 10), ed abbiasi perciò $\varphi^g(y')=y'$. Si scrivano quì sotto tali risultati in una colonna verticale, e replicando su ciascuno di essi l' operazione espressa dalla f, si formi la tavola (X).

$$
\text{(X)}\quad
\begin{array}{llllll}
y', & f(y'), & f^2(y'), & f^3(y'), & \text{ec.} & \\
 & f^\epsilon(y'), & f^{\epsilon+1}(y'), & f^{\epsilon+2}(y'), & \text{ec.} & f^{h-1}(y'), \\
\varphi(y'), & f\varphi(y'), & f^2\varphi(y'), & f^3\varphi(y'), & \text{ec.} & \\
 & f^\epsilon\varphi(y'), & f^{\epsilon+1}\varphi(y'), & f^{\epsilon+2}\varphi(y'), & \text{ec.} & f^{h-1}\varphi(y'), \\
\varphi^2(y'), & f\varphi^2(y'), & f^2\varphi^2(y'), & f^3\varphi^2(y'), & \text{ec.} & \\
 & f^\epsilon\varphi^2(y'), & f^{\epsilon+1}\varphi^2(y'), & f^{\epsilon+2}\varphi^2(y'), & \text{ec.} & f^{h-1}\varphi^2(y'), \\
\varphi^3(y'), & f\varphi^3(y'), & f^2\varphi^3(y'), & f^3\varphi^3(y'), & \text{ec.} & \\
 & f^\epsilon\varphi^3(y), & f^{\epsilon+1}\varphi^3(y'), & f^{\epsilon+2}\varphi^3(y'), & \text{ec.} & f^{h-1}\varphi^3(y'), \\
 & & \text{ec.} & & &
\end{array}
$$

φ^ϵ

$$
\begin{array}{ll}
 & \varphi^{k}(y'), f\varphi^{k}(y'), f^{2}\varphi^{k}(y'), f^{3}\varphi^{k}(y'), \text{ ec.} \\
 & \quad f^{e}\varphi^{k}(y'), f^{e+1}\varphi^{k}(y'), f^{e+2}\varphi^{k}(y'), \text{ ec.} \qquad f^{h-1}\varphi^{k}(y'), \\
 & \varphi^{k+1}(y'), f\varphi^{k+1}(y'), f^{2}\varphi^{k+1}(y'), f^{3}\varphi^{k+1}(y'), \text{ ec.} \\
 & \quad f^{e}\varphi^{k+1}(y'), f^{e+1}\varphi^{k+1}(y'), f^{e+2}\varphi^{k+1}(y'), \text{ ec.} \quad f^{h-1}\varphi^{k+1}(y'), \\
(\mathrm{X}) & \varphi^{k+2}(y'), f\varphi^{k+2}(y'), f^{2}\varphi^{k+2}(y'), f^{3}\varphi^{k+2}(y'), \text{ ec.} \\
 & \quad f^{e}\varphi^{k+2}(y'), f^{e+1}\varphi^{k+2}(y'), f^{e+2}\varphi^{k+2}(y'), \text{ ec.} \quad f^{h-1}\varphi^{k+2}(y'), \\
 & \qquad\qquad\qquad \text{ec.} \\
 & \varphi^{g-1}(y'), f\varphi^{g-1}(y'), f^{2}\varphi^{g-1}(y'), f^{3}\varphi^{g-1}(y'), \text{ ec.} \\
 & \quad f^{e}\varphi^{g-1}(y'), f^{e+1}\varphi^{g-1}(y'), f^{e+2}\varphi^{g-1}(y'), \text{ ec.} \quad f^{h-1}\varphi^{g-1}(y') .
\end{array}
$$

15. I. Osservando questa tavola, veggo in primo luogo, che tutti i suoi termini, eccettuatine quelli della prima fila orizzontale, e quelli della prima colonna verticale, rappresentano tante funzioni della y' composte (n.° 2).

II. Essendo tutti fra lor disuguali i termini della prima fila orizzontale, e così disuguali fra loro tutti quelli della prima colonna verticale (n.° 9), tali per lo (VIII. n.° 10) saranno fra loro ancora tutti i termini di ciascheduna riga, e tali fra loro tutti quelli di ciascuna colonna. Non potendo però dirsi lo stesso fra i termini posti in file, ed in colonne diverse, suppongansi uguali fra loro i due termini $f^{c}\varphi^{i}(y'), f^{d}\varphi^{l}(y')$, ne' quali siano c, $d<h$; i, $l<g$: in questi non potrà essere $c=d$, mentre i sia disuguale da l, nè potrà essere $i=l$, mentre c sia disuguale da d.

III. Dalla precedente Equazione $f^{c}\varphi^{i}(y')=f^{d}\varphi^{l}(y')$ ritraendosi $f^{c}\varphi^{i}(y')=f^{d}\varphi^{l-i}\varphi^{i}(y')$, osservo, che essendo tanto y' come $\varphi^{i}(y')$ valori della y, potrò per la ragione addotta nel (VII. n.° 10) porre y' invece di $\varphi^{i}(y')$, e ne verrà $f^{c}(y')=f^{d}\varphi^{l-i}(y')$; ma da quest' ultima ottienesi pur anche $f^{c-d}(y')=\varphi^{l-i}(y')$. Dunque rappresentandosi dalla $f^{c-d}(y')$ un termine della prima riga, e dalla $\varphi^{l-i}(y')$ uno della prima colonna; ne segue, che, se due qualsivogliono dei termini (X) uguagliansi fra di loro; dovranno dipendentemente da ciò uguagliarsi fra loro un termine della prima fila con uno della colonna prima.

IV. Se nella $f^{c-d}(y') = \varphi^{l-i}(y')$ (prec. III) gl' indici $c-d$, $l-i$ sono positivi, chiamo il primo di essi e, il secondo k; che se uno di loro, od amendue voglionsi negativi, chiamo rispettivamente e, k gl' indici di que' termini, che sono in corrispondenza uguali ai due $f^{c-d}(y')$, $\varphi^{l-i}(y')$, e che pel (VI. n.° 10) deggiono esistere in (X) nelle prime due linee orizzontale, e verticale. Il numero k poi deve essere > 1, perchè se fosse $k = 0$, oppure $= 1$, ne verrebbe nel primo caso $y' = f^{e}(y')$, e nel secondo $\varphi(y') = y^{(h+1)} = f^{e}(y')$, il che per le supposizioni fatte (n.° 14, prec. II, III) non può essere.

V. Ponendo invece della y' nel primo membro della $f^{e}(y')=\varphi^{k}(y')$ la quantità $f^{e}(y')$, e nel secondo la $\varphi^{k}(y')$, ne verrà $f^{2e}(y')=\varphi^{2k}(y')$; ripeto in quest' ultima Equazione la sostituzione medesima, e otterremo $f^{3e}(y') = \varphi^{3k}(y')$; proseguo l'operazione istessa, e ci risulterà successivamente $f^{4e}(y')=\varphi^{4k}(y')$, $f^{5e}(y') = \varphi^{5k}(y')$, ec. Dunque in generale avremo $f^{re}(y') = \varphi^{rk}(y')$, essendo r un intero qualunque. Ora per la ragione stessa, che si è addotta nel (I. n.° 8), tra i risultati y', $\varphi^{k}(y')$, $\varphi^{2k}(y')$, $\varphi^{3k}(y')$, ec. ne deggiono esistere degli uguali fra loro; supposto adunque $\varphi^{rk}(y') = \varphi^{(r+s)k}(y')$, ne verrà $\varphi^{sk}(y') = y'$; e per conseguenza la serie y', $\varphi^{k}(y')$, $\varphi^{2k}(y')$, $\varphi^{3k}(y')$, ec. è tale che dovrà in essa proseguendo riprodursi il primo termine y'. Supposto pertanto, che $\varphi^{sk}(y')$ sia il primo termine della serie, che ritorna $= y'$, onde tutti i termini

$$\text{XI)} \qquad y',\ \varphi^{k}(y'),\ \varphi^{2k}(y'),\ \varphi^{3k}(y'),\ \text{ec.}\ \varphi^{(s-1)k}(y')$$

siano pel (n.° 9) disuguali fra loro; gli altri termini, che si otterrebbero successivamente, altro non sarebbero, che questi stessi continuatamente replicati (V, VI. n.° 10.). Lo stesso si dice dei termini y', $f^{e}(y')$, $f^{2e}(y')$, $f^{3e}(y')$, ec. Dunque a cagione di $f^{se}(y') = \varphi^{sk}(y')$, e di $\varphi^{sk}(y') = y'$, avremo ancor l'altra serie

$$\text{XII)} \qquad y',\ f^{e}(y'),\ f^{2e}(y'),\ f^{3e}(y'),\ \text{ec.}\ f^{(s-1)e}(y'),$$

la quale sarà dotata delle proprietà medesime dell' altra (XI), e i termini sì dell' una, che dell'altra saranno di numero s, ed in corrispondenza uguali fra loro.

VI Poichè si è supposto $k < g$ (prec. II, III, IV.); sia $\varphi^k(y')$ il primo termine, che nella prima colonna verticale della (X) incontrasi uguale ad uno dei termini della prima fila orizzontale, e sia $= f^e(y')$. In tale ipotesi io dico che $\varphi^{2k}(y')$ dovrà nella prima colonna verticale essere il termine secondo, che trovasi uguale ad un altro della prima riga. Imperciocchè se, ciò negandosi, si volesse $\varphi^{k+i}(y') = f^l(y')$, in cui $i < k$; risultandone $\varphi^i\,\varphi^k(y') = f^{l-e} f^e(y')$, e quindi $\varphi^i\,\varphi^k(y') = f^{l-e}\,\varphi^k(y')$; posta la y' invece della $\varphi^k(y')$, ne verrebbe $\varphi^i(y') = f^{l-e}(y')$, e però a cagione di $i < k$, $\varphi^i(y')$ non sarebbe più il primo termine, che nella prima colonna trovasi uguale ad uno di quelli della linea prima, contro la supposizione. Avendosi poi $\varphi^{2k}(y') = f^{2e}(y')$, $\varphi^{3k}(y') = f^{3e}(y')$, ec. (prec. V.), con lo stesso precedente discorso, troveremo, che $\varphi^{3k}(y')$, $\varphi^{4k}(y')$, ec. sono i successivi termini terzo, quarto, ec. che nella prima colonna incontransi uguali a dei termini della prima linea orizzontale. Dunque nella ipotesi del (prec. IV.) dovranno esistere nella prima colonna della tavola (X) gli s termini della serie (XI) uguali agli s della (XII); ma i termini di quest' ultima serie esistono tutti nella prima riga. Dunque pel (X. n.°10) nella tavola (X) esisteranno $s - 1$ linee orizzontali oltre la prima, cioè le linee $k + 1$ *esima*, $2k + 1$ *esima*, $3k + 1$ *esima* ec., ciascuna delle quali avrà i suoi termini uguali ai termini della prima.

VII. In egual modo si vede, che le $e + 1$ *esima*, $2e + 1$ *esima*, $3e + 1$ *esima* ec. colonne verticali della (X) hanno i suoi termini uguali a quelli della colonna prima. Siccome poi a cagione di $s(k-1) < g$ (prec. VI), di $s(e-1) < h$, e di $\varphi^{sk}(y') = y' = f^{se}(y')$ (prec. V.), il numero sk non può essere nè maggiore nè minore di g (II. n.° 14), nè l' altro se di h; ne segue che sarà $sk = g$, $se = h$, e per conseguenza che nella ipotesi del (prec. II), cioè allorquando esistono nella (X) due termini fra loro uguali, i due numeri g, h dovranno essere necessariamente composti fra loro, ed avranno per comun divisore il numero s. Se adunque g, h sono primi fra loro, i termini della tavola (X) saranno tutti fra lor disuguali.

VIII. Giacchè ciascun termine della serie (XI) uguaglia ciascuno della (XII) (prec. V.), ponendo $\varphi(y')$ invece della y', sarà $\varphi^{k+1}(y') = f^{e}\varphi(y')$, $\varphi^{2k+1}(y') = f^{2e}\varphi(y')$, $\varphi^{3k+1}(y') = f^{3e}\varphi(y')$, ec. $\varphi^{(s-1)k+1}(y') = f^{(s-1)e}\varphi(y')$; ma i secondi membri di queste Equazioni non sono che tanti termini della seconda fila orizzontale nella (X) e i membri primi tanti termini della prima colonna verticale, i quali non solamente sono tutti disuguali fra loro, perchè nati con una medesima sostituzione da' termini, cioè dagli (XI), già tra lor differenti (prec. V); ma son disuguali eziandio da tutti gli (XI) medesimi, perchè se si volesse $\varphi^{rk+1}(y') = \varphi^{tk}(y')$, ne verrebbe $\varphi^{(r-t)k+1}(y') = y'$, e quindi a cagione di $\varphi^{sk}(y') = y'$ (prec. V.) dovendo essere $(r-t)k+1 = psk$ (III. n.° 10), ne verrebbe $k = \frac{1}{ps-r+t}$, e per conseguenza k non maggiore dell' unità contro del (prec. IV). Dunque a cagion delle precedenti Equazioni $\varphi^{k+1}(y') = f^{e}\varphi(y')$, $\varphi^{2k+1}(y') = f^{2e}\varphi(y')$, $\varphi^{3k+1}(y') = f^{3e}\varphi(y')$, ec. dovranno pel (X. n.° 10) esistere nella tavola (X) altre $s-1$ righe oltre le s accennate nel (prec. VI), ed oltre la seconda, in ciascheduna delle quali i termini si uguaglieranno ai termini della seconda medesima.

IX. Sia $k > 2$: per l' uguaglianza delle serie (XI), (XII), col porre $\varphi^{2}(y')$ in vece della y', otterrassi $\varphi^{k+2}(y') = f^{e}\varphi^{2}(y')$, $\varphi^{2k+2}(y') = f^{2e}\varphi^{2}(y')$, $\varphi^{3k+2}(y') = f^{3e}\varphi^{2}(y')$, ec.; ma tutti i termini $\varphi^{k+2}(y')$, $\varphi^{2k+2}(y')$, $\varphi^{3k+2}(y')$, ec. sono disuguali fra loro, e disuguali tanto dai termini (XI), come dai precedenti $\varphi^{k+1}(y')$, $\varphi^{2k+1}(y')$, $\varphi^{3k+1}(y')$, ec., il che si dimostra, come nel (prec. VIII). Dunque rinnovato to il discorso del citato (prec. VIII.) vedremo esistere nella (X) oltre le accennate nei (prec. VI , VII), ed oltre la terza, altre $s - 1$ file, ciascuna delle quali uguagliasi alla terza .

Posto $k > 3$, poichè dalle (XI), (XII) si ha $\varphi^{k+3}(y') = f^{e}\varphi^{3}(y')$, $\varphi^{2k+3}(y') = f^{2e}\varphi^{3}(y')$, $\varphi^{3k+3}(y') = f^{3e}\varphi^{3}(y')$, ec. ; replicato il precedente discorso, si troverà dover esistere nella (X) oltre le sovraccennate altre s righe , compresavi la quarta , ciascheduna delle quali è uguale ne' suoi termini alla quarta medesima. Ora lo stesso proseguesi sempre a dire , finchè si formano le Equazioni $\varphi^{2k-1}(y') = f^{e}\varphi^{k-1}(y')$, $\varphi^{3k-1}(y') = f^{2e}\varphi^{k-1}(y')$, $\varphi^{4k-1}(y') = f^{3e}\varphi^{k-1}(y')$, ec. . Dunque nella ipotesi de' (prec. II, IV) le prime k linee orizzontali della tavola (X) uguaglieranno corrispondentemente le seconde k, le terze k, ec. sino alle $s - 1$ *esima* k .

16. *Teor.* 5.° Se abbiasi l' Equazione $f^{\alpha}(y') = \varphi^{\beta}(y')$, in cui α, e β siano due numeri interi qualsivogliono ; io dico , che deve esistere sempre un intero p , ed un determinato numero h' (XII. n.° 10) tale, che abbiasi $\varphi(y') = f^{\frac{ph'+\alpha}{\beta}}(y')$, essendo pel citato (XII. n.° 10) $f^{h'}(y') = y'$.

Pongasi $\varphi(y') = f^{x}(y')$. Collocando in questa Equazione invece della y' nel primo membro la $\varphi(y')$, e nel secondo la $f^{x}(y')$, ne verrà $\varphi^{2}(y') = f^{2x}(y')$; replico questa sostituzione, ed avremo $\varphi^{3}(y') = f^{3x}(y')$; proseguo ad eseguirla, finchè l' indice della φ divenga β, e per ultimo risultato otterremo $\varphi^{\beta}(y') = f^{\beta x}(y')$; ma per la ipotesi si ha $\varphi^{\beta}(y') = f^{\alpha}(y')$; dunque sarà ancora $f^{\beta x}(y') = f^{\alpha}(y')$. Ora tutte le espressioni aventi la forma $f^{\gamma}(y')$, e di valore $= f^{\alpha}(y')$ dipendono dalla espression generale $f^{ph'+\alpha}(y')$ (XII. n.° 10), mentre all' intero p , ed alla h' si attribuiscono gli opportuni valori. Dunque dalla stessa $f^{ph'+\alpha}(y')$ dipendendo ancora la $f^{\beta x}(y')$, dovrà potersi dare tanto alla h' , come all' intero p dei valori tali , che rendano $\beta x = ph' + \alpha$, e quindi $x = \frac{ph'+\alpha}{\beta}$. Dunque ec.

Cangiato il valore y' nell'altro $y^{(a)}$, dall'Equazione $f^{\alpha}(y^{(a)}) = \varphi^{\beta}(y^{(a)})$, che ne viene, ritrarremo egualmente $\varphi(y^{(a)}) = f^{\frac{ph'+\alpha}{\beta}}(y^{(a)})$.

17. *Teor.* 6.° Qualunque siansi i numeri interi α, β, e qualunque il valore $y^{(a)}$ della y dovrà essere $f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y^{(a)}) = \varphi^{\beta}f^{\alpha}(y^{(a)})$.

Avendosi $\varphi^{g}(y^{(a)}) = y^{(a)} = f^{h}(y^{(a)})$ (I, II. n.° 14), ne verrà $\varphi(y^{(a)}) = f^{\frac{ph'+h}{g}}(y^{(a)})$ (n.° prec.), e però $\varphi^{\beta}(y^{(a)}) = f^{\frac{(ph'+h)\beta}{g}}(y^{(a)})$, e quindi $f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y^{(a)}) = f^{\alpha} f^{\frac{(ph'+h)\beta}{g}} = f^{\frac{g\alpha+(ph'+h)\beta}{g}}(y^{(a)})$; ma dalla stessa $\varphi^{\beta}(y^{(a)}) = f^{\frac{(ph'+h)\beta}{g}}(y^{(a)})$, col porre invece di $y^{(a)}$ la $f^{\alpha}(y^{(a)})$, ritraesi ancora $\varphi^{\beta} f^{\alpha}(y^{(a)}) = f^{\frac{(ph'+h)\beta+g\alpha}{g}}(y^{(a)})$. Dunque sarà $f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y^{(a)}) = \varphi^{\beta} f^{\alpha}(y^{(a)})$.

18. I. Sopra uno dei valori della y diverso da y', sopra $y^{(a)}$, eseguiscansi quelle operazioni, per cui dalla quantità y' sonosi prodotti tutti i termini della tavola (X), e i risultati, che ne vengono, suppongansi scritti con la stessa regola in un' altra tavola. Questa seconda altro non sarà che la prima (X) cambiata la y' nella $y^{(a)}$; e per conseguenza verificandosi su di essa le proprietà, che abbiam veduto nel (n.° 15) appartenere all' altra; ne viene che ancora in questa, se i numeri g, h sono primi fra loro, tutti i gh termini, che la compongono, saranno diversi fra loro.

II. Se uno qualsivoglia dei termini della seconda ora indicata tavola si uguaglia ad uno di quelli della tavola (X); io dico, che ancora tutti gli altri termini di quella dovranno in corrispondenza essere uguali con tutti i termini di questa. Diffatti supposti tra loro uguali i due termini $f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y')$, $f^{\gamma}\varphi^{\delta}(y^{(a)})$; osservo, che per una tale uguaglianza tutti i termini della $\beta + 1$ *esima* fila orizzontale della (X) sono già pel (X. n.° 10.) uguali rispettivamente a tutti i termini della $\delta + 1$ *esima* fila orizzontale della tavola se-

seconda. Ora pel (n.° 17.) abbiamo $f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y') = \varphi^{\beta}f^{\alpha}(y')$, $f^{\gamma}\varphi^{\delta}(y^{(a)}) = \varphi^{\delta}f^{\gamma}(y^{(a)})$; dunque sarà $\varphi^{\beta}f^{\alpha}(y) = \varphi^{\delta}f^{\gamma}(y^{(a)})$, e però $\varphi^{\beta+1}f^{\alpha}(y') = \varphi^{\delta+1}f^{\gamma}(y^{(a)})$, $\varphi^{\beta+2}f^{\alpha}(y') = \varphi^{\delta+2}f^{\gamma}(y^{(a)})$, $\varphi^{\beta+3}f^{\alpha}(y') = \varphi^{\delta+3}f^{\gamma}(y^{(a)})$ ec., onde pel citato (n.° 17.) avendosi $f^{\alpha}\varphi^{\beta+1}(y') = f^{\gamma}\varphi^{\delta+1}(y^{(a)})$, $f^{\alpha}\varphi^{\beta+2}(y') = f^{\gamma}\varphi^{\delta+2}(y^{(a)})$, $f^{\alpha}\varphi^{\beta+3}(y') = f^{\gamma}\varphi^{\delta+3}(y^{(a)})$, ec. tutti i termini nella tavola (X) delle righe $\beta + 2$ *esima*, $\beta + 3$ *esima*, $\beta+4$ *esima*, ec. saranno in corrispondenza uguali ai termini nella tavola seconda delle righe $\delta + 2$ *esima*, $\delta + 3$ *esima*, $\delta + 4$ *esima*, ec. Dunque tutte le linee orizzontali di una delle due tavole risultando nella correspettività ora accennata uguali alle linee dell' altra, ne segue, che ec.

III. Dunque se il valore $y^{(a)}$ è diverso da tutti i termini (X), niuno dei termini della seconda tavola potrà uguagliarsi ad alcuno di quelli della tavola prima.

19. *Teor.* 7.° Supposto il numero n dei valori tutti fra loro diversi della y, come nel (I. n.° 14), $= hb$; se sia b numero primo, io dico, che nella tavola (X) dovrà essere $g = b$.

I. Cominciam dal supporre, che tutti i gh valori della (X) siano disuguali fra loro, non potrà essere $g > b$. Se dunque si nega, che sia $g = b$, pongasi, se è possibile, $g < b$. Esistendo in questa supposizione degli altri valori della y, oltre i gh contenuti nella tavola (X), sia $y^{(gh+1)}$ uno di tali valori, e con esso si formi, come si è indicato nel (I. n.° 18), un' altra tavola simile alla precedente. Poichè $y^{(gh+1)}$ è un valore diverso da tutti gli esistenti nella (X); tutti i gh termini della tavola seconda saranno pei (II, III. n.° 18) disuguali da tutti i termini della prima, e disuguali fra loro: dunque unendo gli uni con gli altri, avremo così $2gh$ valori della y tutti tra lor disuguali. Ora essendo $g > 1$ (II. n.° 14), non può essere $2gh = bh$, poichè ne verrebbe $2g = b$, e quindi b non sarebbe più numero primo, contro la supposizione. Dunque oltre gli accennati $2gh$ valori qualche altro ne dovrà esistere da lor differente: chiamato pertanto $y^{(2gh+1)}$ uno di questi ultimi, formimisi con esso una terza tavola simile alle due precedenti. Dovendo pei citati (I, III. n.° 18) contenersi anche in questa terza gh valori della y disuguali tra loro, e diversi da tutti quelli, che li precedono, abbiamo così $3gh$ valori differenti tra loro; ma per la stessa sovraccennata ragione non può neppur essere $3gh=bh$. Dunque dovranno nuovamente esistere dei valori ulteriori, onde con uno di essi, che dirò $y^{(3gh+1)}$, potrò formare una quarta tavola, ed avere in tal modo $4gh$ valori della y tutti fra lor disuguali; ma non potendo, per quanto si è detto di sopra, nemmeno essere $4gh = bh$, nè essere $5gh$, $6gh$, $7gh$, ec. $= bh$; deggiono esistere ancora altri valori della y, con cui si può costruire una quinta tavola, una sesta, una settima, ec. all' infinito. Dunque mentre si voglia $g < b$, il numero dei valori tra loro diversi della y risulta infinito; ma avendosi $n = hb$ numero finito, ciò non può essere. Dunque ec.

II. Vogliasi in secondo luogo che due dei valori della tavola (X) siano uguali fra loro, e però che si abbia $f^{e}(y') = \varphi^{k}(y')$ (II, ec. V. n.° 15.). In questa ipotesi i valori tra loro diversi della y nella tavola (X) riduconsi ai soli hk delle prime k file orizzontali (VIII, IX. n.° 15); nella stessa maniera si riducono a soli hk i valori tra loro diversi della tavola seconda, così quelli della terza, della quarta, ec., e frattanto pel (IV. n.° 15.) esser deve $k > 1$. Dunque replicandosi quivi col numero hk il discorso stesso, che si è fatto precedentemente con l' altro gh, verremo alla medesima conseguenza, e però ec.

III. È facile a vedersi, che, come nel (II. n.° 12.) il teorema medesimo si verifica eziandio, allorquando sia b numero composto, purchè questo b non sia multiplo di g (prec. I), o di k (prec. II); onde b dovrà essere sempre uguale, o multiplo rispettivamente di g, o di k, e però il numero $n = hb$ sarà sempre uguale, o multiplo di hg, o di hk.

20. *Teor.* 8. Siano nella tavola (X) i due numeri g, h primi tra loro, e preso in essa un termine $f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y')$, che dirò $y^{(b)}$ diverso da tutti quelli della prima linea orizzontale, e da quelli

della prima colonna verticale, onde i numeri α, β siano amendue > 0, ed il primo di essi $< h$, il secondo $< g$, sia in conseguenza del (n.° 5) $y^{(b)} = F(y')$. Ciò fatto, io dico che dalla espressione $F^q(y')$, coll' attribuire alla q i successivi valori 0, 1, 2, 3, ec. $gh - 1$, tutti si ottengono i gh valori della (X); e questi valori col porre ulteriormente $q = gh$, $gh + 1$, $gh + 2$, ec. non fanno, che successivamente, e continuatamente ripetersi.

Poichè essendo tanto $F(y')$ come $f^{\alpha} \varphi^{\beta}(y') = y^{(b)}$, abbiamo $F(y') = f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y')$, posto invece della y' nel primo membro di questa Equazione la $F(y')$, e nel secondo la $f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y')$, ne verrà $F^2(y') = f^{\alpha}\varphi^{\beta}f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y')$; ma supposto $\varphi^{\beta}(y') = y^{(a)}$, pel (n.° 17.) abbiamo $\varphi^{\beta}f^{\alpha}(y^{(a)}) = f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y^{(a)})$; dunque collocato nuovamente invece della $y^{(a)}$ il suo valore $\varphi^{\beta}(y')$, ci verrà $\varphi^{\beta} f^{\alpha}\varphi^{\beta}(y') = f^{\alpha}\varphi^{2\beta}(y')$, e però $F^2(y') = f^{2\alpha}\varphi^{2\beta}(y')$; nella stessa maniera si truova essere $F^3(y') = f^{3\alpha}\varphi^{3\beta}(y')$; $F^4(y') = f^{4\alpha}\varphi^{4\beta}(y')$, ec., e in generale $F^q(y') = f^{q\alpha}\varphi^{q\beta}(y')$. Ora supponghiamo, che di numero l siano i valori fra loro diversi, che provengono dalla $F^q(y')$, e sia $F^i(y')$ uno di questi. Pel (V. n.° 10) $F^{l+i}(y')$ sarà fra i termini della serie y', $F(y')$, $F^2(y')$, $F^3(y')$, ec. il primo che ritorna $= F^i(y')$, e tale per conseguenza sarà il termine $f^{\alpha(l+i)}\varphi^{\beta(l+i)}(y')$; ma essendo i due numeri g, h per la ipotesi primi fra loro, i termini della tavola (X) sono tutti fra loro disuguali (VII. n.° 15); e però il numero intero da aggiungersi nella $f^{\alpha i}\varphi^{\beta i}(y')$ all'indice αi, e l'altro da aggiungersi all'indice βi, onde ottenere un altro termine $= f^{\alpha i}\varphi^{\beta i}(y')$, deggiono essere, il primo multiplo di h, ed il secondo di g (IV, V, n.° 10, I, II, n.° 14); e frattanto per le condizioni supposte l'indice della f deve essere sempre multiplo di α, e quello della φ sempre multiplo di β. Dunque, dovendo il precedente termine $F^{l+i}(y') = f^{\alpha(l+i)}\varphi^{\beta(l+i)}(y')$ uguagliarne uno della forma $f^{\alpha(ph+i)}\varphi^{\beta(rg+i)}(y')$, ove p, r siano due numeri interi opportuni all' intento, avremo $\alpha(l+i)$

=

$= \alpha(ph+i)$, $\beta(l+i) = \beta(rg+i)$, e però $l = ph = rg$, e quindi $\frac{p}{r} = \frac{g}{h}$. Ora essendo g, h numeri primi tra loro, l' Equazione $\frac{p}{r} = \frac{g}{h}$ ci dice che i due p, r non possono essere, che uguali, o equimultipli degli stessi g, h; ma essendo per la ipotesi $F^{l+i}(y')$ il primo termine, che nella serie proveniente dalla $F^q(y')$ ottienesi, ascendendo, $= F^i(y')$; alle due lettere p, r deve attribuirsi il valore intero minimo capace di rendere $\frac{p}{r} = \frac{g}{h}$: dunque dovrà essere $p = g$, $r = h$, e per conseguenza avremo $l = gh$. Dunque tutti i valori, che risultano dalla $F^q(y')$ col porre successivamente $q = i, i+1, i+2, i+3$, ec. $i+gh-1$ sono fra loro disuguali; ma essi sono di numero gh, sono tutti valori della y, ed i può essere a piacimento $= 0, 1, 2, 3, 4$, ec. Dunque ec.

21. Sia nella tavola (X) il numero g composto con h, e sia come precedentemente $g = ks$, $h = es$, essendo s il loro massimo comun divisore, ed essendo s primo con k. Preso in questa supposizione il termine $\varphi^s(y')$ nella prima colonna della (X), faccio $\varphi^s = \pi$; ne verrà $\varphi^s(y') = \pi(y')$, $\varphi^{2s}(y') = \pi^2(y')$, $\varphi^{3s}(y') = \pi^3(y')$, ec. $\varphi^{(k-1)s}(y') = \pi^{k-1}(y')$, $\varphi^{ks}(y') = \pi^k(y')$, ma tutti i primi membri di queste Equazioni sono disuguali fra loro (II. n.° 14), ed avendosi $\varphi^{ks}(y') = \varphi^g(y') = y'$, risulta $\pi^k(y') = y'$. Dunque essendo $\pi(y')$ un valore della y tale, che col ripetersi, quanto si vuole, della funzione espressa dalla π, ottengonsi solamente i k valori tra loro diversi

XIII) $\quad y'$, $\pi(y')$, $\pi^2(y')$, $\pi^3(y')$, ec. $\pi^{k-1}(y')$,

ed a cagione di s primo con k, e massimo divisor comune dei due h, g, essendo k primo con h; ne segue pel (n.° prec.) che se prenderò un termine $f^\alpha \pi^\beta(y')$, in cui abbiasi $\alpha > 0$, e $< h$; $\beta > 0$; e $< k$, e lo farò $= F(y')$, ne segue, dissi, che l'espressione $F^q(y)$, coll' attribuire successivamente alla q i valori 0, 1, 2, 3, ec. $hk - 1$, tutti ci darà gli hk valori tra loro diversi (VII. n.° 15) della y, che ottengonsi combinando, come nella tavola (X), tutti i valori dipendenti dalla $f^q(y')$ con quei tutti, che dipendono dalla $\pi^q(y')$.

22. *Teor.* 9.° Supposto n, ossia il numero totale dei valori della y fra loro diversi $= abcde \ldots$, in cui a, b c, d, e, ec. siano tanti numeri maggiori dell' unità, primi, e fra lor disuguali, io dico, che esiste sempre un valore della y funzione della y', che esprimerò per $F(y')$, dipendentemente dal quale tutti si otterranno i valori della y coll' attribuire nella $F^q(y')$ all' indice q successivamente i valori 0, 1, 2, 3, ec. $n - 1$.

I. Preso uno qualunque dei valori della y diverso da y', per esempio y'', pel (n.° 6) $= f(y')$, osservo, se il numero h (n.° 9, V, VI. n.° 10) dei risultati (VI) è, o non è $= n$. Se lo è, allora pel (I. n.° 10) la $f^q(y')$ ci somministrerà nell' indicata maniera tutti i diversi valori della y, e quindi essa $f^q(y')$ altro non sarà in questo caso, che la precedente $F^q(y')$.

II. Che se non abbiamo $h = n$; dovendo inallora il numero h pel (II. n.° 12) essere summultiplo dell' altro n, e dovendo perciò essere uguale ad uno, o al prodotto di due, ovvero di tre, o di più de' fattori a, b, c, d, e, ec., porrò $h = ab$. In questa supposizione poichè risulta $h < n$, prendasi un altro valore della y diverso da quei tutti, che dipendono dalla $f^q(y')$, per esempio il valore $y^{(h+1)} = \varphi(y')$ (I. n.° 14), e determinato il numero g (II n.° 14) de' valori provenienti dalla $\varphi^q(y')$, osservo se sia $g =$, oppure $< n$. Se trovasi $g = n$, allora questa $\varphi^q(y')$, coincidendo con la $F^q(y')$, farà verificare l' accennato Teorema.

III. Se poi abbiamo $g < n$, osservo, se alcuno dei valori provenienti dalla $\varphi^q(y')$, mentre q sia > 1, e $< g$, uguagliasi ad alcuno dei valori provenienti dalla $f^q(y')$, in cui abbiasi $q > 0$, e $< h$, o non si uguaglia. Nel caso, in cui succeda una tale uguaglianza, posto per esempio $f^e(y') = \varphi^k(y')$, in cui il numero e superi lo zero, e sia $< h$, e l' altro k superi l' unità, e sia $< g$; pel (VII. n.° 15) dovranno i due numeri h g avere un divisor comune, e chiamato questo s (V. n.° 15), dovrà essere $h = es$, $g = ks$. Ora per le ipotesi fatte, abbiamo $h = ab$, ed a, b sono numeri primi; dunque dovendo risultare $s = a$, oppure $= b$, oppure $= ab$, e dovendo pel (III. n.° 19.) essere k un divisore esatto del quoto $\frac{n}{h} = cde \ldots$, dovrà esso k uguagliare uno, o il prodotto di due, o più dei fattori c, d, e, ec. Supposto pertanto $k = c$, e però $g = cs$, facciasi $\varphi^s = \pi$; risultando da ciò $\varphi^s(y') = \pi(y')$, $\varphi^{2s}(y') = \pi^2(y')$, $\varphi^{3s}(y') = \pi^3(y')$, ec. $\varphi^{cs}(y') = y' = \pi^c(y')$, la funzione $\pi^q(y')$, col dare a q i successivi valori 0, 1, 2, 3, ec. ci somministrerà c valori diversi. Prendo ora un termine $f^\alpha \pi^\beta(y')$, in cui $\alpha > 0$, $e < h$; $\beta > 0$, $e < c$, e pongo $f^\alpha \pi^\beta = \psi$, onde $f^\alpha \pi^\beta(y') = \psi(y')$. Essendo h, ossia ab, ed il numero c primi, per la ipotesi, fra di loro, la $\psi^q(y')$ pel (n.° 20) ci darà un numero $hc = abc$ di valori tutti fra lor differenti, mentre facciasi successivamente $q = 0$, 1, 2, 3, ec. $abc - 1$.

IV. Suppongasi ora, che non accada la uguaglianza precedentemente supposta tra i due valori provenienti dalle $f^q(y')$, $\varphi^q(y')$. In questa ipotesi dovendo pel (III. n.° 19.) essere g un divisore esatto di $\frac{n}{h} = cde \ldots$, porrò esso $g = c$; e fatto quindi, come poc' anzi, $f^\alpha \varphi^\beta = \psi$, onde $f^\alpha \varphi^\beta(y') = \psi(y')$; come poc' anzi vedremo, che anche nel caso presente la $\psi^q(y')$ ci somministra un numero $hc = abc$ di valori della y fra loro diversi.

V. Se nel caso del (prec. III) k, e nell' altro del (prec. IV.) g in vece di essere $= c$ fossero stati $= d$, oppure $= cd$, oppure $= cde$, oppure, ec., la $\psi^q(y')$ ci avrebbe in corrispondenza somministrati abd, ovvero $abcd$, ovvero $abcde$, ec. valori della y; ma per quanto abbiam detto nel primo caso k, e nel secondo g devono necessariamente uguagliare uno, o il prodotto di due, o più dei fattori c, d, e, ec. Dunque il numero, nel caso primo hk, nel secondo hg de' valori provenienti dalla $\psi^q(y')$ supererà, e sarà multiplo del numero h dei valori provenienti dalla $f^q(y')$, e sarà insieme uguale, o summultiplo del numero totale n.

VI. Ritenuto, che $hc = abc$ (prec. IV) sia il numero dei risultati, che provengono dalla $\psi^q(y')$, poichè avendosi

$abc < n$, esistono degli ulteriori valori della y, prendasene uno di questi ultimi, che chiamerò $y^{(hc+1)}$, e pel (n° 5) porrò $= \rho(y')$, denotandosi dalla ρ la funzione corrispondente, e sia i il numero dei risultati diversi, che nascono dalla $\rho^q(y')$. Come nei (prec. III, IV) g relativamente ad $\frac{n}{h}$, così in questo luogo il numero i vedremo, che deve sempre essere o divisore esatto di $\frac{n}{hc} = de \ldots$, od avere con questo prodotto $de \ldots$ un fattor comune > 1. Supposto pertanto nel primo di questi due casi $i=d$, e nel secondo $i=td$, faccio in questo secondo $\rho^t = \sigma$, e poscia, supposto al solito $\alpha > 0, < hc$, $\beta > 0, < d$, pongo nel caso primo $\psi^\alpha \rho^\beta$, e nel secondo $\psi^\alpha \sigma^\beta = \tau$, e la funzione $\tau^q(y')$ pel (n.° 20) ci somministrerà $hcd = abcd$ valori diversi della y.

Ora rifletto, che potremo sempre, finchè rimangono dei valori ulteriori della y, proseguire il precedente discorso, e le operazioni accennate: ma i numeri ab, abc, $abcd$, ec. dei valori, che ottengonsi dalle corrispondenti funzioni $f^q(y')$, $\psi^q(y')$, $\tau^q(y')$, ec. vanno sempre crescendo, e sono sempre divisori esatti di n (prec. V). Dunque dovremo sempre giungere finalmente ad una di tali funzioni, la quale, coll'attribuire alla q i successivi valori 0, 1, 2, 3, ec. $n - 1$ tutti somministrandoci gli n valori della y, altro non sarà che la sovraccennata $F^q(y')$. Dunque ec.

23. I. Ritenuto $n = abcde \ldots$ (n.° 22.), e trovata la precedente $F^q(y')$, i risultati

$$y',\ F(y'),\ F^2(y'),\ F^3(y'),\ \text{ec. } F^{n-1}(y')$$

altro non saranno che tutti gli n valori della y. Chiamato ora i uno dei divisori esatti di n, e supposto perciò $n = il$, essendo i, ed l numeri interi, facciasi $F^i = \pi$. Risultando da questa ipotesi $F^i(y') = \pi(y')$, $F^{2i}(y') = \pi^2(y')$, $F^{3i}(y') = \pi^3(y')$, ec. $F^{il}(y') = (y') = \pi^l(y') = y'$; la funzione $\pi^q(y')$ somministrerà un numero l di valori della y.

II. Supponghiamo $i = bcde\ldots$, ne verrà $l = a$; se si fosse supposto $i = acde\ldots$, oppure $= abde\ldots$, oppure ec., sarebbesi in corrispondenza ottenuto $l = b$, c, ec. Dunque corrispondentemente a ciascuno dei fattori dell'indice n è sempre determinabile una funzione della y', la quale ci somministri esattamente tanti valori tra loro diversi, quante unità si contengono nel fattore medesimo.

III. Vogliasi per esempio $y = \sqrt[30]{P}$. Essendo in quest'esempio $n = 30 = 2.3.5$, e però $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$; chiamata α una delle radici quinte, β una delle radici terze, e γ una delle seconde della unità diverse dall' unità medesima, le espressioni $\alpha^q y'$, $\beta^q y'$, $\gamma^q y'$ ci daranno la prima cinque, la seconda tre, e la terza due valori della y. Preso poi nella $\alpha^q y'$ per q un valore > 0, e < 5 per esempio il valore 3, nella $\beta^q y'$ preso un valore > 0, e < 2, per esempio il valore 1, e supposto il prodotto $\alpha^3 \beta = \varepsilon$, la funzione $\varepsilon^q y'$ ci darà pel (n.° 20) $5.3 = 15$ valori tra lor disuguali della y. Preso finalmente nella $\gamma^q y'$ per q un valore > 0, e < 2, cioè 1, e nella $\varepsilon^q y'$ un valore > 0, e < 15, per esempio 10, e fatto $\varepsilon^{10}\gamma = \zeta$, la $\zeta^q(y')$ tutti somministrerà i 30 valori della $y = \sqrt[30]{P}$ (n.° prec.), tali essendo i seguenti, y', $\zeta y'$, $\zeta^2 y'$, $\zeta^3 y'$ ec. $\zeta^{29} y'$.

IV. Nell' esempio del (II. n.° 1) vogliasi $m = ab$, essendo a, b numeri primi (prec. n.°). Saranno evidentemente valori della y ivi determinata tanto gli a che provengono dalla espressione $\text{Cos.}\left(\frac{4q\pi}{a} + \frac{\mu}{ab}\right)$, come i b, che nascono dalla $\text{Cos.}\left(\frac{4q\pi}{b} + \frac{\mu}{ab}\right)$. Dato poi nella prima di queste espressioni alla q un valore > 0, e $< a$, che chiamerò i, e nella seconda dato alla q un valore > 0, e $< b$, che chiamerò l, formo la funzione $\text{Cos.}\left[\left(\frac{4i\pi}{a} + \frac{4l\pi}{b}\right) q + \frac{\mu}{ab}\right]$, e questa esibirà, col dare alla q i successivi valori 0, 1, 2, 3, ec. $ab - 1$ tutti gli ab valori della y (n.° 20, prec.). Per meglio ciò riconoscere riducasi tale espressione alla $\text{Cos.}\left[4q\pi\left(\frac{bi + al}{ab}\right)\right.$

$+$

$+\frac{\mu}{ab}\Big]$. Ora il numeratore $bi+al$ io dico essere primo col denominatore ab: perchè se non fosse tale, non potrebbe avere con lui altro divisor comune, che la quantità a, o l'altra b, o tutto l'intero prodotto ab; ma a dividendo al, e non già bi, e b dividendo bi, e non già al, non ponno nè l' uno, nè l'altro esattamente dividere $bi+al$: dunque questo numeratore non potrebbe essere divisibile che per ab. Supposto pertanto $bi+al=abr$, riduco questa Equazione alla $bi=a(br-l)$; ma da essa io veggo, che bi dovrebbe contenere esattamente a. Dunque non potendo ciò essere, non potrà neppur essere ab divisore esatto di $bi+al$. In conseguenza di ciò tutti gli ab valori, che acquista la espressione Cos. $\left(\frac{4(bi+al)q\pi+\mu}{ab}\right)$, mentre si faccia $q=0, 1, 2, 3,$ ec. $ab-1$ saranno disuguali fra loro. Dunque tutti pei (V, VI. n.° 10) uguagliando gli ab valori della Cos. $\left(\frac{4q\pi+\mu}{ab}\right)$ saranno appunto tutti gli $ab=n$ valori della y.

24. I. Chiamato $F^{p}(y')$ uno qualunque degli n valori della y (n.° 5), avremo $F^{pn}(y')=y'$. Scritta questa Equazione, come segue $(F^{p})^{n}(y')=y'$, pongo $F^{p}=Z$, ne verrà $(Z)^{n}(y')=y'$. Ora qualunque dei risultati, che vengono espressi dalla F^{p}, si collochi in luogo della Z, la $(Z)^{n}(y')=y'$ si verifica sempre. Dunque chiamato *radice* di una Equazione tutto ciò, sia valore, o sia indice di operazione, che posto invece della incognita la fa verificare, gli esposti risultati saranno tante radici della Equazione in Z ora trovata.

II. Abbiasi $n=abcde\ldots$, e si supponga, che la funzione $\pi^{q}(y')$ somministri un numero a di valori della y diversi fra loro, che la $\psi^{q}(y')$ ne somministri un numero b, la $\rho^{q}(y')$ un numero c, e così di seguito, onde sia $\pi^{a}(y')=y'$, $\psi^{b}(y')=y'$, $\rho^{c}(y')=y'$, ec. Chiamati p', p'', p''', ec. degl' interi qualsivogliono, avendosi $\pi^{p'a}(y')=y'$, $\psi^{p''b}(y')=y'$, $\rho^{p'''c}(y')=y'$, ec., ritenuta la precedente maniera di scrivere, e supposto $\pi^{p'}=t$, $\psi^{p''}=u$, $\rho^{p'''}=v$, ec., ec. , otterremo $(t)^a(y') = y'$, $(u)^b(y') = y'$, $(v)^c(y') = y'$, ec. Equazioni, la prima delle quali avrà per radici le π, π^2, π^3, ec. π^{a-1}, π^a, la seconda ψ, ψ^2, ψ^3, ec ψ^{b-1}, ψ^b, la terza le ρ, ρ^2, ρ^3, ec. ρ^{c-1}, ρ^c, ec.

Se sia $y = \sqrt[30]{P}$, conservate le supposizioni fatte nel (III. n.° 23) rapporto al valore delle α , β , γ , pongo $\alpha^q = t$, $\beta^q = u$, $\gamma^q = v$, e chiamata Z una delle radici trentesime della unità , corrispondentemente alle precedenti si otterranno le Equazioni $Z^{30}y' = y'$, $t^5 y' = y'$, $u^3 y' = y'$, $v^2 y' = y'$, la prima delle quali avrà per radici tutte le trentesime radici della unità , la seconda avrà per radici le α, α^2, α^3, α^4, $\alpha^5 = 1$, la terza le β, β^2, $\beta^3 = 1$, e l' ultima le γ, $\gamma^2 = 1$.

Che se si abbia $y' = \text{Cos.}\, \frac{\mu}{abc}$, e però $y = \text{Cos}\left(\frac{4q\pi + \mu}{abc}\right)$ (II. n.° 1), faccio $\frac{4q\pi}{abc} = Z$, e nelle quantità $\text{Cos}\left(\frac{4q\pi}{a} + \frac{\mu}{abc}\right)$, $\text{Cos.}\left(\frac{4q\pi}{b} + \frac{\mu}{abc}\right)$, $\text{Cos.}\left(\frac{4q\pi}{c} + \frac{\mu}{abc}\right)$ (IV. n.° 23) faccio $\frac{4q\pi}{a} = t$, $\frac{4q\pi}{b} = u$, $\frac{4q\pi}{c} = v$, e le espressioni precedenti $(Z)^n$, $(t)^a$, $(u)^b$, $(v)^c$ equivalendo nel caso presente alle $abcZ$, at, bu, cv, ec. verranno le Equazioni $\text{Cos.}\left(abcZ + \frac{\mu}{abc}\right) = y'$, $\text{Cos}\left(at + \frac{\mu}{abc}\right) = y'$, $\text{Cos.}\left(bu + \frac{\mu}{abc}\right) = y'$, $\text{Cos.}\left(cv + \frac{\mu}{abc}\right) = y'$, la prima delle quali ha per radici gli abc risultati $\frac{4\pi}{abc}$, $\frac{8\pi}{abc}$, $\frac{12\pi}{abc}$, ec. $\frac{4abc\pi}{abc} = 4\pi$, la seconda i risultati $\frac{4\pi}{a}$, $\frac{8\pi}{a}$, $\frac{12\pi}{a}$, ec. $\frac{4(a-1)\pi}{a}$, $\frac{4a\pi}{a} = 4\pi$, la terza gli altri $\frac{4\pi}{b}$, $\frac{8\pi}{b}$, $\frac{12\pi}{b}$, ec. $\frac{4(b-1)\pi}{b}$, $\frac{4b\pi}{b} = 4\pi$, e così la quarta i $\frac{4\pi}{c}$, $\frac{8\pi}{c}$, $\frac{12\pi}{c}$, ec. $\frac{4(c-1)\pi}{c}$, $\frac{4c\pi}{c} = 4\pi$.

III. Per quanto si è osservato nel (VII. n.° 10) l' Equazione

ne $(\mathrm{Z})^n(y') = y'$ deve verificarsi qualunque sia il valore della y. Posto adunque in vece di questa y' la quantità $\mathrm{P} = \Pi(y')$ (n.° 3), avremo $(\mathrm{Z})^n(\Pi(y')) = \mathrm{P}$; ma abbiamo ancora $\Pi(\mathrm{Z}(y')) = \mathrm{P}$. Dunque risultando $\Pi(\mathrm{Z}(y')) = (\mathrm{Z})^n(\Pi(y'))$, ne viene che l' eseguire l' operazione indicata dalla Π sulla $\mathrm{Z}(y')$ equivale all' eseguire l'operazione medesima sulla y', ed al ripetere insieme le volte n la funzione rappresentata dalla Z. Nel secondo dei precedenti esempj, avendosi $\Pi(y') = \mathrm{Cos.}\,\mu = \mathrm{P}$ (II. n.° 1), preso uno qualunque dei valori della $\mathrm{Z} = \frac{4q\pi}{abc}$, per esempio il valore $\frac{8\pi}{abc}$, e ripetuta la somma di questo le volte abc avremo $\Pi\Big(\mathrm{Cos.}\Big(\frac{8\pi+\mu}{abc}\Big)\Big) = \mathrm{Cos.}\Big(\frac{8abc\pi}{abc}$
$= \mathrm{Cos.}\,(8\pi + \mu) = \mathrm{Cos.}\,\mu = \mathrm{P}$.

IV. Pongasi invece della y' la unità; le Equazioni de' (prec. I, II.) diverranno $(\mathrm{Z})^n(1) = 1$, $(t)^a(1) = 1$, $(u)^b(1) = 1$, $(v)^c(1) = 1$, ec., e nel primo degli esempj apposti avremo $\mathrm{Z}^{30} = 1$, $t^5 = 1$, $u^3 = 1$, $v^2 = 1$, e nell'esempio secondo risultando $\mu = 0$; ne verrà $\mathrm{Cos.}\,abc\mathrm{Z} = 1$, $\mathrm{Cos.}\,at = 1$, $\mathrm{Cos.}\,bu = 1$, $\mathrm{Cos.}\,cv = 1$. Quindi apparisce, come quelle proprietà, le quali dai Matematici si dimostrano appartenenti alle radici della unità non sono già particolari di queste radici, ma appartengono, generalmente parlando, a tutti i risultati molteplici, che, come si è detto nel (n.° 1), producонsi in conseguenza di una sola qualunque siasi operazione di calcolo algebraica, o trascendentale, e però non riguardano le indicate radici, se non come uno dei molti casi, ne' quali esse si verificano. Ho detto generalmente parlando, perchè mentre l' operazione Ψ produce un numero infinito di valori tra loro diversi, come nell' esempio (III. n.° 1), allora non possono evidentemente aver luogo quelle proprietà, le quali esigono, che l' indicato numero sia finito.

V. Dalle stesse $(\mathrm{Z})^n(1) = 1$, $(t)^a(1) = 1$, $(u)^b(1) = 1$, $(v)^c(1) = 1$, ec. si vede ancora che determinato il valore $y' = \Psi'(\mathrm{P})$ gli altri valori tutti della $y = \Psi(\mathrm{P})$ possonsi dedurre dalla soluzione della $(\mathrm{Z})^n(1) = 1$, perchè conoscendosi da questa tutti i risultati, che so-

sono espressi dalla $Z = F^p$ (prec. I), avremo quindi tutti i valori della $F^p(y')$. Per tal modo negli esempj del (n.° 1) possonsi dipendentemente dalla unità determinare attualmente i valori della y'. Imperciocchè nel (I. n.° 1) avendosi $P = 1^q \times P$ sarà $y = \Psi(P) = \sqrt[5]{(1^q \times P)} = \sqrt[5]{1^q} \times \sqrt[5]{P} = \left(\sqrt[5]{1}\right)^q \times \sqrt[5]{P} = \alpha^q \sqrt[5]{P}$, essendo α una delle radici 5^e immaginarie dell' unità. Nel (II. n.° 1) poichè si à $\text{Cos.}\,\mu = 1^q \times \text{Cos.}\,\mu$, e $\frac{\text{Cos.}\,4q\pi}{r} = 1$, $\frac{\text{Sen.}\,4q\pi}{r} = 0$, ne verrà $\text{Cos.}\,\mu = \frac{\text{Cos.}\,4q\pi\,\text{Cos.}\,\mu \mp \text{Sen.}\,4q\pi\,\text{Sen.}\,\mu}{r} = \text{Cos.}(4q\pi \pm \mu)$. Finalmente nel (III. n.° 1) essendo $P = 1^q \times P$, e $\log.\,1^q = 4q\pi\sqrt{-1}$, sarà $\Psi(P) = \log.\,P + 4q\pi\sqrt{-1}$. Mentre poi gl' indici a, b, c, ec. siano disuguali fra loro, e primi; pel (n.° 20) potremo ottenere $a + b + c$ + ec. valori della Z dipendentemente dalla soluzione della $(t)^a(1) = 1$, $(u)^b(1) = 1$, $(v)^c(1) = 1$, ec., e tutti in seguito gli n valori, combinando, come nel (n.° 22) gli a valori della t con i b della v, gli ab così risultati con i c della v, e così di seguito: lo stesso si dice se invece della unità esista nelle precedenti Equazioni la y'.

25. *Teor.* 10.° Oltre la solita supposizione di $f^h(y') = y'$, conservata anche l'altra di $\varphi^g(y') = y'$ (I, II. n.° 14.), se sia $g = h$, io dico, che gli h valori, che provengono dalla $f^q(y')$, uguagliansi agli h, che nascono dalla $\varphi^q(y')$.

I. Presa l' espression generale del (XII. n.° 10.) $f^{h'}(y') = y'$, sia primieramente h' numero intero, e però $h' = rh$, essendo r un numero intero. Dall' Equazione $f^\alpha(y') = \varphi^\beta(y')$ del (n.° 16) ricavatasi l' altra $\varphi(y') = f^{\frac{ph'+\alpha}{\beta}}(y')$, poichè per la ipotesi abbiamo $\varphi^g(y') = \varphi^h(y') = y' = f^0(y')$, colloco invece della α, β, h' i valori rispettivi 0, h, rh, e ne verrà $\varphi(y') = f^{pr}(y')$, e per conseguenza $\varphi(y') = f^{pr}(y')$, $\varphi^2(y') = f^{2pr}(y')$, $\varphi^3(y') = f^{3pr}(y')$, ec. $\varphi^{h-1}(y') = f^{(h-1)pr}(y')$, $\varphi^h(y') = f^{hpr}(y') = y'$.

Ora a cagione di $g = h$ i primi membri di queste Equazioni sono tutti disuguali fra loro, tali dunque dovranno essere fra loro anche i secondi; ma questi secondi membri essendo di numero h, non ponno essere che gli h valori diversi, che nascono dalla $f^q(y')$ (V, VI. n.° 10). Dunque in questo primo caso sarà vero, che ec.

II. Vogliasi il numero h' (XII. n.° 10) uguale ad un rotto, e sia perciò $h' = \frac{s}{t}$, in cui s, t siano due numeri interi primi fra loro. Pel citato (XII. n.° 10) avendosi ancora $f^{th'}(y') = y'$, sarà $f^s(y') = y'$: ma essendo s numero intero, non può risultare $f^s(y') = y'$, quando non sia s uguale, o multiplo di h: posto adunque $s = rh$, sarà $h' = \frac{rh}{t}$, e però $f^{h'}(y') = y'$, diverrà $f^{\frac{rh}{t}}(y') = y'$. Abbiasi ora, come nel (prec. I) $g = h$, $\alpha = 0$, $\beta = h$, la $\varphi(y') = f^{\frac{ph' + \alpha}{\beta}}(y')$ del (n.° 16) si cangerà perciò nella $\varphi(y') = f^{\frac{pr}{t}}(y')$, e quindi avendosi $\varphi^t(y') = f^{pr}(y')$, sarà $\varphi^t(y') = f^{pr}(y')$, $\varphi^{2t}(y') = f^{2pr}(y')$, $\varphi^{3t}(y') = f^{3pr}(y')$, ec. $\varphi^{(h-1)t}(y') = f^{(h-1)pr}(y')$, $\varphi^{ht}(y') = f^{hpr}(y') = y'$.

Essendo il numero t primo con s, è necessariamente primo anche con h. Dunque a cagione di $\varphi^h(y') = y'$, tutti i termini $\varphi^t(y')$, $\varphi^{2t}(y')$, $\varphi^{3t}(y')$, ec. $\varphi^{(h-1)t}(y')$ saranno diversi da $y' = \varphi^h(y')$, e però essendo diversi fra loro, potrò proseguire sopra i membri delle Equazioni ottenute il discorso medesimo, che si è fatto sul fine del (prec. I), e giungendosi quindi ad una medesima conseguenza, ne viene, che ancora in questo secondo caso ec.

III. Che se si voglia h' di valore non razionale. Qualunque esso siasi, avendo un valore determinato, potrà sempre trovarsi una serie di termini razionali, che dirò A, B, C, ec., i quali abbiano la supposta quantità h' come limite. Ora essendo ciascuno di questi termini A, B, C, ec. intero, o fratto, pei (prec. I, II) rifletto, che, se invece di $f^{h'}(y') = y'$, si avesse $f^{A}(y') = y'$, oppupure $f^{B}(y')=y'$, oppure $f^{C}(y')=y'$, oppure ec.; sempre nella ipotesi di $h=g$, i valori provenienti dalla $\varphi^{q}(y')$ risulterebbero uguali a quelli, che nascono dalla $f^{q}(y')$: ma se in una serie A, B, C, ec. una proprietà è comune a ciascuno de' suoi termini, la stessa proprietà deve appartenere ancora al loro limite. Dunque essendo per la ipotesi h' limite dei termini A, B, C, ec., ed essendo attualmente $f^{h'}(y')=y'$, ne viene che anche mentre si voglia h' non razionale, vera sarà la esposta proposizione. Dunque ec.

26. I. Suppongasi nelle $f^{h}(y')=y'$, $\varphi^{g}(y')=y'$ (I, II. n.° 14) $h=se$, $g=sk$, essendo e, k, $s>1$, e facciamo $f^{e}=\pi'$, $\varphi^{k}=\pi''$; le $f^{h}(y')=y'$, $\varphi^{g}(y')=y'$ perciò divenendo $\pi'^{s}(y')=y'$, $\pi''^{s}(y')=y'$ (I. n.° 23), i valori $\pi'(y')$, $\pi'^{2}(y')$, $\pi'^{3}(y')$, ec. $\pi'^{s}(y)$ dipendenti dalla $\pi'^{q}(y')$ saranno pel (n.° 25) uguali ai valori $\pi''(y)$, $\pi''^{2}(y')$, $\pi''^{3}(y')$ ec., $\pi''^{s}(y')$ provenienti dalla $\pi''^{q}(y')$; onde supposto $\pi'(y')=\pi''^{p}(y')$, in cui p sia un intero >0, $<s$, poichè risulta $f^{e}(y')=\varphi^{pk}(y')$, ne viene, che ogniqualvolta i numeri g, h siano fra loro composti, e non sia l' uno multiplo dell' altro, sopra i risultati della tavola (X) si verificherà sempre quanto è stato dimostrato nei (V, VI, VIII, IX. n.° 15) in conseguenza della ipotesi di $f^{e}(y')=\varphi^{k}(y')$.

II. Se sia il precedente numero $s=a$, tanto i valori dipendenti dalla $\pi'^{q}(y')$, come i dipendenti dalla $\pi''^{q}(y')$ si uguaglieranno a quelli, che provengono dalla $\pi^{q}(y')$ (II. n.° 24).

III. Pongasi $k=1$, onde $g=s$, e $\varphi=\pi''$. In questa ipotesi risultando $f^{e}(y')=\varphi^{p}(y')$ (prec. I.), ne segue, che gli $s=g$ valori che nascono dalla $\varphi^{q}(y')$ uguagliansi ai valori $f^{e}(y')$, $f^{2e}(y')$, $f^{3e}(y')$, ec. $f^{se}(y')$; e per conseguenza ogni volta che nelle $f^{h}(y')=y'$, $\varphi^{g}(y')=y'$ uno degl' indici, per esempio l' indice g sia summultiplo, od uguale all' altro h, i valori provenienti dalla $\varphi^{q}(y')$ sono tutti compresi tra i valori, che dipendono dalla $f^{q}(y')$.

27. *Teor.* 11.° Ritenuti i numeri interi a, b, c, d, e, ec. (n.° 22) maggiori dell' unità, primi, e disuguali fra loro, ec.

chiamati α, β, γ, δ, ϵ ec. degl' interi quali sivogliono positivi, io dico, che anche, allorquando abbiasi $n = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} e^{\epsilon} \ldots$, dovrà esistere, come nel (n.° 22) una funzione $F(y')$ tale, che i successivi risultati $F(y')$, $F^2(y')$, $F^3(y')$, ec. $F^{n-1}(y')$, $F^n(y') = y'$ altro non siano, che tutti gli n valori tra loro diversi della y.

Prendasi il valore $y'' = f(y')$ (n.° 6), e si voglia il numero h dei valori $f^q(y')$ diverso da n, poichè se gli fosse uguale, avrebbesi tosto $f(y') = F(y')$, e il teorema sarebbe già dimostrato. Posto pertanto $h < n$, ed $= a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} d^{\delta'} e^{\epsilon'} \ldots$, prendasi il valore $y^{(h+1)} = \varphi(y')$ (I. n.° 14) diverso da tutti i precedenti $f^q(y')$, e sia g (II. n.° 14) $< n$, ed $= a^{\alpha''} b^{\beta''} c^{\gamma''} d^{\delta''} e^{\epsilon''} \ldots$, avendosi ciascuno degli esponenti α', β', γ', δ', ϵ', ed α'', β'', γ'', δ'', ϵ'', ec. non < 0, ed intero; pel (III. n.° 26) non potrà essere questo g nè uguale, nè summultiplo di h: potendo però essere con lui composto, e potendo quindi gli esponenti α', β', γ', δ', ϵ', ec. essere uguali in parte, in parte maggiori, e minori de' corrispondenti α'', β'', γ'', δ'', ϵ'', ec. suppongo per esempio $\alpha' = \alpha''$, $\beta' < \beta''$, $\gamma' < \gamma''$, $\delta'' < \delta'$, $\epsilon'' < \epsilon'$, ec., presi tanto in h, come in g i fattori, che hanno gli esponenti più piccoli, e presi rapporto ad uno solo degl' indici, per esempio rapporto al solo g i fattori, che hanno gli esponenti uguali, pongo $f^{b^{\beta} c^{\gamma'} \cdots} = \pi$, $\varphi^{a^{\alpha''} d^{\delta''} e^{\epsilon''} \cdots} = \psi$. Avendosi quindi $f^{a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} d^{\delta'} e^{\epsilon'}}(y') = \pi^{a^{\alpha'} d^{\delta'} e^{\epsilon'} \cdots}(y')$, $\varphi^{a^{\alpha''} b^{\beta''} c^{\gamma''} d^{\delta''} e^{\epsilon''} \cdots}(y') = \psi^{b^{\beta''} c^{\gamma''}}(y')$ le due funzioni $\pi^q(y')$, $\psi^q(y')$ somministreranno un numero, la prima $a^{\alpha'} d^{\delta'} e^{\epsilon'} \ldots$, e la seconda $b^{\beta''} c^{\gamma''} \ldots$ di valori della y fra loro diversi, e saranno questi due numeri primi fra loro. Ciò dunque essendo faccio $\pi\psi = \rho$, e la $\rho^q(y')$ ci somministrerà pel (n.° 20) un numero $a^{\alpha'} b^{\beta''} c^{\gamma''} d^{\delta'} e^{\epsilon'} \ldots$, che dirò i, di valori tra lor differenti della y; ed a cagione di $\alpha' = \alpha''$, $\beta'' > \beta'$, $\gamma'' > \gamma'$, $\delta' > \delta''$, $\epsilon' > \epsilon''$, sarà questo i maggiore tanto di h, come di g. Ora o vuolsi $i = n$, oppure $i < n$: se $i = n$, sarà $\rho(y') = F(y')$, e rimarrà così dimostrata la proposizione: che se $i < n$, preso un altro valore re della y, che dirò $y^{(i+1)} = \sigma(y')$, diverso da tutti i $\rho^q(y')$, proseguo il precedente discorso, e troverò così una nuova funzione, che denominerò $\rho'^q(y')$, la quale somministrerà un numero, che dirò l, $> i$ di valori della y tra lor disuguali. Se questo l si trova $= n$, avremo $\rho'(y') = F(y')$; che se $l < n$, seguitando innanzi, e ripetendo, quanto occorre, lo stesso precedente raziocinio, poichè gl' indici i, l, ec. vanno necessariamente crescendo sempre di valore, vedesi, che sempre dovremo infine giungere ad una funzione della y', cioè alla $F^q(y')$, la quale, al supporsi $q = 0, 1, 2, 3$, ec. $n - 1$, tutti successivamente ci somministri i valori della y. Dunque ec.

28. I. Poichè in tutti i discorsi fatti finora la y' ha sempre rappresentato uno qualunque dei valori della y; ne segue, che qualunque siasi quello fra tali valori, che venga proposto, e qualunque l' intero n esprimente il numero de' valori medesimi (n.° 5), potremo sempre pei (n. 11, 20, 22, 27) determinare una funzione F tale, che y', $F(y')$, $F^2(y')$, $F^3(y')$, ec. $F^{n-1}(y')$ tutti esprimano gli n valori della y, e ciò qualunque siasi l'operazione indicata dalla Ψ (n.° 1).

II. Formata col risultato $y = \Psi(P)$ (n.° 1), ed una nuova quantità Q una funzione razionale qualunque, che dirò $f(y, Q)$, e porrò $= P'$, si pratichi su questa quantità P' un'altra qualsivoglia operazione di calcolo, che indicherò con $\Psi 1$, e sia $\Psi 1(P) = u$. Supposto che n' esprima il numero dei valori diversi, che dipendentemente dalla operazione $\Psi 1$ può ricevere la u, e che u' sia uno di questi valori, qualunque, pel dimostrato precedentemente, sarà sempre determinabile una funzione, che dirò F' tale che la serie u', $F'(u')$, $F'^2(u')$, $F'^3(u')$, ec. $F'^{(n-1)}(u')$ tutti contenga gli n' valori della $\Psi 1(P')$. In seguito se con una quantità nuova R, e le precedenti y, u si formi un'altra funzione razionale $f'(y, u, R)$, e chiamata questa P'', eseguiscasi su di essa una terza operazione $\Psi 2$ capace di dare n'' risultati tra loro diversi; posto $\Psi 2(P'') = z$, uno qualunque dei risultati della z chiamato z', qui pure mediante una opportuna funzione F'' sarà determinabile sempre la serie

z',

z', $F''(z')$, $F'''(z')$, $F''^{3}(z')$, ec. $F''^{n''-1}(z')$, in cui tutti si contengono i valori della $\Psi 2(P'')$. Potendosi così proseguire quanto si vuole, vedesi, che quando su di una data quantità P (n.° 5.) si faccia una sola operazione Ψ, tutti gli n valori, che ne dipendono, possonsi ottenere dipendentemente da una sola funzione F, e da una sola espressione $F^{q}(y') = F^{q}(\Psi'(P))$. Allorchè debbonsi eseguire due operazioni successive Ψ, $\Psi 1$, la prima sopra P, la seconda sopra $P' = f(y, Q)$ basteranno due funzioni F, F' ad ottenere tutti i risultati, che ne dipendono; ed essendo questi di numero nn', verranno tutti compresi nella espressione
$F'^{q'}(u) = F'^{q'}[\Psi' 1(f(Q, F^{q}(\Psi(P))))]$. In egual modo saranno sufficienti tre funzioni F, F', F'', onde avere tutti i valori, che nascono da tre successive operazioni $\Psi, \Psi 1, \Psi 2$ praticate la prima sopra P, la seconda sopra $f(y, Q)$, e la terza sopra $f'(y, u, R)$, ed essi di numéro $nn'n''$ saranno somministrati tutti dalla
$F''^{q''}(z') = F''^{q''}[\Psi' 2(f'(R, F^{q}(\Psi'(P)), F'^{q'}(\Psi' 1(f(Q, F^{q}(\Psi'(P)))))))]$.
Così in progresso.

III. Allorchè n è numero primo, volendosi esprimere i valori della $\Psi(P)$ col mezzo di una funzione della y'; essi saranno tutti necessariamente compresi nella sola $F^{q}(y')$ (n.° 11.), e questa sarà sempre una funzione necessariamente semplice (n.° 2). Che se n è numero composto, potranno bensì ottenersi tutti gl' indicati valori della $\Psi(P)$ dipendentemente da una sola funzione $F^{q}(y')$ (prec. I), ma potranno anche ottenersi in tutto, o in parte col mezzo di funzioni diverse (I, II. n.° 23). Se sia $n = abcde\ldots$, essendo questi fattori, come nel (n.° 26), dal (n.° 19, IV. n.° 24) è facile a vedersi, che tutti si potranno avere gli n valori col mezzo di tante funzioni tra loro diverse, e che queste funzioni saranno semplici in parte, e in parte composte (n.° 2). Che se sia $a = b = c = d = e$ ec., onde $n = a^{\alpha}$, esprimendosi dalla α il numero delle volte che vien ripetuta la a; allora dai (n. 25, 26) può agevolmente vedersi, che col mezzo di funzioni diverse composte fra di loro, come si voglia, potremo bensì ottenere alcuni dei valori della $\Psi(P)$; ma tutti non si potranno avere, che dalla

$F^{q}(y')$.

$F'(y')$. Allorchè dunque n è numero composto le funzioni della y', che somministrano i valori della $\Psi(P)$ potranno essere, e semplici, e composte (II. n.° 2). Nella ipotesi finalmente di operazioni replicate (prec. II), si dirà su ciascuna delle funzioni corrispondenti quanto abbiam detto finora su quella, o quelle funzioni della y' che somministrano i valori della $\Psi(P)$; e tali funzioni saranno il più delle volte necessariamente composte (II. n.° 2).

DEL-

DELLE VARIAZIONI NELLA LONGITUDINE ELIOCENTRICA D' UN PIANETA, CHE DERIVANO DALLA DI LUI ABERRAZIONE E NUTAZIONE, DALL' ABERRAZIONE DEL SOLE, E DALLE PERTURBAZIONI CAGIONATE NELLO STESSO PER L'AZIONE DEI PIANETI E DELLA LUNA SULLA TERRA.

MEMORIA

Del Sig. Giuseppe Slop de Cademberg

Ricevuta il dì 24 Luglio 1806.

Le tavole del sole ci danno la di lui longitudine affetta dall' aberrazione, cioè 20″ minor della vera, e ciò basta per avere con esattezza la longitudine apparente; se poi si cerca dalle tavole planetarie la longitudine d' un pianeta, bisogna che quella del Sole non sia l' apparente, ma la longitudine vera.

Per dimostrarlo, sia (*Fig.* 1) s il luogo apparente del Sole, che è quello che si ha dalle tavole, t il luogo della terra, e p quello d' un pianeta superiore. Fatto in t l' angolo $sts' = 20''$, e tirata da s a ts la perpendicolare ss', si avrà in s' il luogo vero del Sole, che è quello non affetto dall' aberrazione. Se si prolunghi la ts finchè sia $so = sp$, e si tiri da o ad s' la retta os', si avrà l'angolo $sos' = \frac{ts\times20''}{os} = \frac{ts\times20''}{sp}$. Dal punto p si tirino ad s ed s' le rette ps, ps', e da s la perpendicolare sq alla ps' prolungata. L'angolo sps' sarà la differenza fra le due longitudini eliocentriche del pianeta viste da s ed s', che nel caso della figura dovrà sottrarsi da quella vista in s per avere la longitudine eliocentrica vera in s'. Il valor di quest' angolo si troverà facendo $R : \cos. qss' :: ss' : sq :: sos' \left(\frac{ts\times20''}{sp}\right) : sps' = \frac{ts\times20''}{sp} \times \cos. qss'$.

Per la piccolezza dell' angolo sps' si potrà senza error sensibile considerar psq come retto, e prendere $s'sq = pso$, ed allora essendo $\cos. pso = \cos. (360^\circ - pso) = \cos. (\textit{long. del sole} - \textit{long. elioc. del pianeta}) = \cos. \textit{commut. del pianeta}$, si avrà $sps' = \frac{ts \times 20''}{sp} \times \cos. \textit{commut. del pianeta}$.

Se il pianeta è inferiore (*Fig.* 2) si avrà come sopra $sos' = \frac{ts \times 20''}{sp}$, ed $sps' = \frac{ts \times 20''}{sp} \times \cos. s'sq = \frac{ts \times 20''}{sp} \times \cos. osp$, e siccome osp è uguale alla longitudine eliocentrica del pianeta meno la longitudine del sole, che per i pianeti inferiori ne è la commutazione, sarà anche per i pianeti inferiori $sps' = \frac{ts \times 20''}{sp} \times \cos. \textit{commut.}$, che nel caso della *Fig.* 2 dovrà sottrarsi dalla longitudine eliocentrica vista in s per avere la longitudine eliocentrica vera del pianeta vista in s'.

La longitudine apparente del sole che è quella che osserviamo dalla terra, e che ci mostrano le tavole, comprende le sei piccole equazioni che non derivano dalla forza centrale primaria del sole sopra la terra, ma dalle alterazioni cagionate alla stessa per le azioni della Luna, di Giove, di Venere, e di Marte. Qust'equazioni facendo variare il luogo del sole, faranno variare ancora la longitudine eliocentrica del pianeta, quale se si vuole avere libera anche dagli effetti di queste piccole equazioni, di modo che la longitudine eliocentrica del pianeta sia quella che si avrebbe, se la terra non fosse animata che dalla sola forza centrale derivante dal sole, si otterrà ciò facilmente collo stesso calcolo, di cui ci siamo poc'anzi serviti per l' aberrazione.

Per far ciò, bisognerà prendere ciascuna delle sei equazioni col segno contrario a quello che avrà nelle tavole, ed aggiungerne la somma all' aberrazione nella formula dimostrata, onde facendo la somma eguale ad m, si avrà allora $sps' = \frac{ts \times (20 + m)}{sp} \times \cos. \textit{commut.}$ Quest' equazione è generale per ogni posizione dei pianeti tanto superiori che inferiori, come ognuno potrà rilevare dalla figura, colla quale rappresenterà la posizione del pianeta.

Risulta da quest'equazione, che quando m è quantità positiva, o essendo negativa sia minore di $20''$, il piccolo angolo sps' dovrà sottrarsi dalla longitudine eliocentrica vista in s nei tre primi e tre ultimi segni della commutazione, ed aggiungersi nei sei segni di mezzo per avere la longitudine eliocentrica vista in s', ed al contrario dovrà aggiungersi nei tre primi e tre ultimi segni, e sottrarsi nei sei segni di mezzo, se m essendo quantità negativa, sarà maggiore di $20''$. Risulta ancora, che l' angolo sps' è il massimo a zero ed a sei segni, e nullo a tre e a nove segni della commutazione, ai quali l'istesso angolo cangerà di segno, onde si vede che ai tre ed ai nove segni nonostante l' aberrazione del sole, e qualunque sia la quantità m, la longitudine vista da s sarà sempre la stessa di quella vista da s'.

L' aberrazione e la nutazione del pianeta producono anch' esse dei cangiamenti nella di lui longitudine eliocentrica. Per determinarne il valore e la direzione (*Fig.* 3) sia s il luogo del sole, t quello della terra, e p il luogo apparente d' un pianeta superiore. Si faccia in t l'angolo ptp' eguale alla somma o alla differenza dell'aberrazione e nutazione secondo che i loro segni sono gli stessi o contrarj, prendendolo verso p' se detta somma o differenza deve aggiungersi, o verso la parte opposta, se dovrà sottrarsi dal luogo apparente per averne il vero. Dal punto p si descriva la perpendicolare alla pt che terminata alla retta tp' dà in p' il luogo vero del pianeta. Da s tirate a p e p' le rette sp, sp' l'angolo psp' sarà la differenza fra la long. elioc. apparente e la vera del pianeta da aggiungersi nel caso della figura all'apparente in p per avere la longitudine eliocentrica vera in p'. Sulla retta pt si prenda $po = ps$, e si uniscano i punti p' ed o colla retta $p'o$. Ciò posto, si avrà l'angolo $pop' = \frac{tp \times ptp'}{sp}$. Dal punto p abbassata sulla retta $p's$ la perpendicolare pq, avremo $R : \cos . p'pq :: p'p : pq :: \frac{tp \times ptp'}{sp} : psp'$, e $psp' = \frac{tp \times ptp}{sp} \times \cos . p'pq$. L'angolo psp' essendo sempre piccolissimo, può senza errore sensibile riguardarsi spq come retto, e prender perciò $p'pq = spt$, che è la parallasse annua del pianeta, ossia la sua longitudi dine eliocentrica meno la longitudine geocentrica, onde si avrà $\frac{tp\times ptp'}{sp}\times$ cos. (*long. elioc.* — *long. geoc. del pianeta*) .

Sieno come sopra (*Fig.* 4) s, t, p, i luoghi del sole, della terra, ed il luogo apparente del pianeta superiore , e da t si faccia l'angolo ptp' che rappresenti l'aberrazione e la nutazione del pianeta . La perpendicolare a pt tirata da p determinerà nel punto p', dove incontra la retta tp', il luogo vero del pianeta . Si prolunghi pt in modo che sia $po=ps$, e da o descritta la retta op', sarà l'angolo $pop'=\frac{tp\times ptp'}{sp}$. Da s tirate le rette sp, sp', l'angolo psp' che è la differenza fra le due longitudini eliocentriche, vera ed apparente , bisognerà, come sopra , aggiungerlo alla longitudine apparente in p per avere la vera in p' .

Tirata da p ad op' la perpendicolare pq si avrà $psp'=\frac{tp\times ptp}{sp}\times$ cos. $spt=\frac{tp\times ptp'}{sp}\times$ cos. (*long. geoc.* — *long. elioc.*) , espressione che ha luogo dalla congiunzione del pianeta all' opposizione, servendo la prima dall' opposizione sino alla congiunzione .

Se però si rifletta che si ha cos. $spt=$ cos. ($360^\circ - spt$) , e $360^\circ - spt =$ long. elioc. — long. geoc. , è chiaro che non v' è bisogno di cangiare l' espressione della formula , e che in tutte le posizioni del pianeta superiore si avrà sempre $psp'=\frac{tp\times ptp'}{sp}\times$ cos. (*long. elioc.* — *long. geoc.*)

Si vede inoltre che nei pianeti superiori la parallasse annua spt non può mai arrivare a tre segni , perchè allora al triangolo parallattico la distanza della terra al sole ne sarebbe l'ipotenusa, ed il pianeta non potrebbe più esser pianeta superiore ; dal che risulta che la long. elioc. — long. geoc. cioè l' argomento di psp' dall' opposizione alla congiunzione sarà tutto compreso in una parte dei tre primi segni principiando a segno 0, e dalla congiunzione all'opposizione in una parte dei tre ultimi, terminando a segno 0. In tutti questi segni il coseno è sempre positivo, e perciò il valore di psp' seguirà nell' intiera rivoluzione sinodica del pianeta la denominazione di ptp', onde quando la somma o la differenza dell' aberrazione e nutazione del pianeta dovrà aggiungersi o sottrarsi dalla longitudine geocentrica apparente per avere la vera, bisognerà aggiungere parimente o sottrarre l' angolo psp' dall' eliocentrica apparente, per avere la longitudine eliocentrica vera del pianeta. Quest' angolo sarà il massimo nella congiunzione e nella opposizione, ed il minimo nelle quadrature; diminuirà dalla congiunzione e dall' opposizione alle quadrature, e crescerà dalle quadrature alle sizigie.

Siano (*Fig.* 5) s e t i luoghi del sole e della terra, e p il il luogo apparente d' un pianeta inferiore. Tirata la retta pt si faccia in t l'angolo ptp' uguale alla somma o alla differenza dell' aberrazione e nutazione del pianeta, e da p innalzata la pp' perpendicolare a pt, si tirino da s le rette sp, sp' le quali ci daranno l' angolo psp' da aggiungersi nel caso della figura alla longitudine apparente per avere la longitudine vera eliocentrica. Da p sulla retta pt presa $po = ps$, tirata da o la retta op', e da p ad sp' la perpendicolare pq, sarà, come sopra, l' angolo $pop' = \frac{tp \times ptp'}{sp}$, e l'angolo $psp' = \frac{tp \times ptp'}{sp} \times \cos. spt = \frac{tp \times ptp'}{sp} \times \cos. (\textit{long. elioc.} - \textit{long. geoc.})$

Dalla semplice inspezione della figura si conosce che l'angolo al pianeta spt, o sia la longitudine eliocentrica meno la longitudine geocentrica dalla congiunzione superiore, in cui è eguale a 0 gradi, crescendo sempre, diviene nella congiunzione inferiore di gradi 180, e da questa continuando sempre a crescere diventa di 360 o sia di 0 gradi nel suo ritorno alla congiunzione superiore, dal che apparisce che l' angolo psp' sarà il massimo a 0 e VI segni dell' argomento *long. elioc.* — *long. geoc.*, e nullo ai III e IX segni, ai quali la longitudine eliocentrica apparente sarà la stessa dell' eliocentrica vera, e che nei tre ultimi e tre primi sei segni l'angolo psp' conserverà il segno dell' angolo ptp', e lo avrà contrario nei sei segni di mezzo.

La teoria d' un pianeta essendo fondata sul calcolo delle forze ze centrali, cioè della primaria residente nel sole, e delle piccole perturbatrici derivanti da ciascuno degli altri pianeti, le tavole che se ne ricavano, devono dare la di lui longitudine eliocentrica vera, cioè non affetta dalla sua aberrazione e nutazione, nè dall' aberrazione del sole e piccole di lui ineguaglianze, che nascono dalle azioni degli altri pianeti e della luna sulla terra. Se a questa longitudine si applicano in senso contrario le due equazioni da noi dimostrate, è chiaro che se ne avrà la di lui longitudine eliocentrica apparente, la di cui corrispondente geocentrica sarà ancor essa apparente. Questa, supposte giuste le tavole, ed esatta l' osservazione, non potrà differire dalla longitudine del pianeta, che si sarà osservata di su la terra, onde ogni differenza, se l' osservazione è esatta, sarà il vero error delle tavole.

NUOVI TEOREMI

SULLA POSSIBILITA' DELL' EQUAZIONE $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, E RICERCA DEL NUMERO DE' TERMINI DEL PERIODO DELLA RADICE QUADRA DI UN NUMERO NON QUADRATO, SVILUPPATA IN FRAZIONE CONTINUA

MEMORIA

Del Sig. Francesco Pezzi

Ricevuta il dì 7 *Agosto* 1806.

La risoluzione dell'equazione $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, A non essendo un numero quadrato, dipende come è noto, dallo sviluppo di $\sqrt{A}$ in Frazione continua. *Eulero* e la *Grange* si sono più volte occupati di questa materia, e *le Gendre* l'ha trattata con molta sagacità nell' eccellente sua opera, intitolata *Essai sur la théorie des nombres*. In virtù de' lavori di questi grandi Geometri, m' è sembrato che questa dottrina potesse ancora essere portata ad un maggiore grado di perfezione; ho trovato delle formole generali e semplici, da cui per via di soli artifizj analitici, ho dedotte tutte le proprietà di tale sviluppo. *Le Gendre* assegna la legge per cui essendo dato un quoto completo qualunque, viene ad essere determinato il quoto completo seguente; io ho ottenuta l' espressione generale di simile quoto sotto la forma la più semplice ed indipendentemente da quoti antecedenti, ed una formola che fornisce tutti i termini della frazione continua e periodica, senza che altri sia obbligato di eseguire successivamente lo sviluppo della radice dimandata. Un problema poi difficile in questa parte interessante dell' Algebra, e che a mia cognizione non è mai stato proposto da alcuno Geometra, è quello in cui si cercasse generalmente il numero de' termini del periodo simmetrico, che ripetuto all' infinito, rappresenta la mentovata radice:

ce : ne ho affrontata la soluzione con determinare primieramente la forma pari o dispari di questo numero in tutti i casi , meno tre che sin ora mi sono rimasti dubbj , ed ho dato in secondo luogo una regola , la quale col soccorso di quattro teoremi , da me dimostrati intorno alla possibilità della mentovata equazione , fa trovare questo numero , senz' essere costretto di calcolare più quoti , di quelli che si avrebbero a calcolare , se ne fosse noto il valore preventivamente .

I. Premetterò brevemente alcune formole relative allo sviluppo di una quantità x , razionale o irrazionale , in frazione continua : si ha

$$x=a+\frac{1}{x1}=a+\frac{1}{a1+\frac{1}{x2}}=a+\frac{1}{a1+\frac{1}{a2+\frac{1}{x3}}}=\text{ec.}\qquad(1)$$

$x1$, $x2$, $x3$, ec. sono i quoti completi della frazione continua , e a , $a1$, $a2$, $a3$, ec. ne sono i termini , ossia semplicemente i quoti , e sono i più grandi intieri contenuti rispettivamente in x , $x1$, $x2$, $x3$, ec.

$$x(n)=a(n)+\frac{1}{x(n+1)}\qquad(2)$$

Si faccia

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{M0}{N0}=\dfrac{1}{0}\\[2ex] \dfrac{M1}{N1}=\dfrac{a}{1}\\[2ex] \dfrac{M2}{N2}=a+\dfrac{1}{a1}\\ \vdots\\ \dfrac{M(n+1)}{N(n+1)}=a+\dfrac{1}{a1+\dfrac{1}{a2+\dfrac{\vdots}{+\dfrac{1}{a(n)}}}}\end{array}\right\}\qquad(3)$$

Si ha

$$\begin{array}{l}M(n+1)=a(n)M(n)+M(n-1)\\ N(n+1)=a(n)N(n)+N(n-1)\end{array}\qquad(4)\ .$$

Ponendo nell' espressione della frazione convergente $\frac{M(n+1)}{N(n+1)}$ in-

invece di n il quoto completo $x(n)$, si avrà il valore esatto di x; cioè

$$x = \frac{x(n)M(n) + M(n-1)}{x(n)N(n) + N(n-1)} \qquad (5)$$

D' onde

$$x(n) = \frac{M(n-1) - xN(n-1)}{xN(n) - M(n)} \qquad (6)$$

$$x - \frac{M(n)}{N(n)} = \frac{-(-1)^n}{N(n)(N(n)x(n) + N(n-1))} \qquad (7)$$

Essendo

$$M(n)N(n-1) - N(n)M(n-1) = (-1)^n \qquad (8)$$

II. Ciò posto, si debba ora convertire $\sqrt{A}$ in frazione continua; sia a^2 il più grande quadrato contenuto in A; si farà

$$x = \sqrt{A} = a + \frac{\sqrt{A} - a}{1}$$

$$x1 = \frac{1}{\sqrt{A} - a} = \frac{\sqrt{A} + a}{A - a^2} = a1 + \frac{\sqrt{A} + a - a1(A - a^2)}{A - a^2}$$

$$x2 = \frac{A - a^2}{\sqrt{A} + a - a1(A - a^2)} = \frac{\sqrt{A} - a + a1(A - a^2)}{1 + 2a\,a1 - a1^2(A - a^2)} = a2 + \text{ec.}$$

Ma continuando questo calcolo, non si verrebbe in cognizione, che molto difficilmente della legge generale, che regna ne' quoti completi $x1$, $x2$, ec. per il gran numero de' termini, cui presto si arriva, i quali compongono il numeratore ed il denominatore delle Frazioni eguali a tali quoti; perciò mi valgo dell' espressione (6) del quoto qualunque $x(n)$; si avrà dunque in questo caso

$$x(n) = \frac{M(n-1) - N(n-1)\sqrt{A}}{N(n)\sqrt{A} - M(n)} = \frac{\sqrt{A} + (-1)^n(AN(n-1)N(n) - M(n-1)M(n))}{(-1)^n(M(n)^2 - AN(n)^2)} \qquad (9)$$

$M(n)$ e $N(n)$ sono dati immediatamente in a, $a1$, $a2$, … $a(n-1)$. Vedi M. della Soc. It. Tom. XI pag. 410.

III. Sia per abbreviare

$$b(n) = (-1)^n[AN(n)N(n-1) - M(n)M(n-1)] \qquad (10)$$

$$c(n) = (-1)^n[M(n)^2 - AN(n)^2] \qquad (11)$$

Egli è evidente che $b(n)$ e $c(n)$ sono necessariamente numeri intieri, poichè son Funzioni intiere di $M(n)$, $N(n)$, $M(n-1)$, $N(n-1)$ che sono tali

Si avrà

$$x(n)=\frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)} \qquad (12)$$

D' onde

$$x(n+1)=\frac{\sqrt{A}+b(n+1)}{c(n+1)} \qquad (13)$$

Sostituito questo valore nella formola (2), si avrà

$$x(n)=a(n)+\frac{c(n+1)}{\sqrt{A}+b(n+1)} \qquad (14)$$

Ma in seguito del calcolo del N° II, si avrebbe

$$x(n)=\frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}=a(n)+\frac{\sqrt{A}+b(n)-a(n)c(n)}{c(n)} \qquad (15)$$

Dunque

$$\frac{c(n+1)}{\sqrt{A}+b(n+1)}=\frac{\sqrt{A}+b(n)-a(n)c(n)}{c(n)} \qquad (16)$$

Riducendo allo stesso denominatore, ed eguagliando le quantità razionali alle razionali, e le irrazionali alle irrazionali, si ha

$$c(n)c(n+1)=A+b(n+1)[b(n)-a(n)c(n)]$$

$$b(n+1)=a(n)c(n)-b(n) \qquad (17)$$

D' onde segue, che

$$c(n)c(n+1)=A-b(n+1)^2$$

ovvero

$$c(n-1)c(n)=A-b(n)^2 \qquad (18)$$

Fatta la stessa sostituzione nell' equazione (15) si ha

$$x(n)=a(n)+\frac{\sqrt{A}-b(n+1)}{c(n)} \qquad (19)$$

Dunque

$$x(n+1)=\frac{c(n)}{\sqrt{A}-b(n+1)},$$

ovvero ponendovi $n-1$ invece di n

$$x(n)=\frac{c(n-1)}{\sqrt{A}-b(n)} \qquad (20)$$

Quindi raccogliendo le diverse espressioni (12), (19) e (20) di $x(n)$, si ha finalmente

$$x(n)=\frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}=a(n)+\frac{\sqrt{A}-b(n+1)}{c(n)}=\frac{c(n-1)}{\sqrt{A}-b(n)} \qquad (21)$$

IV. I numeri $b(n)$ e $c(n)$ sono sempre positivi: in fatti $b(n)$

lo sarà, se nell' equazione (10), n essendo pari, si avrà $\mathrm{AN}(n-1)\mathrm{N}(n)>\mathrm{M}(n-1)\mathrm{M}(n)$, ovvero $\mathrm{A}>\frac{\mathrm{M}(n-1)}{\mathrm{N}(n-1)}\cdot\frac{\mathrm{M}(n)}{\mathrm{N}(n)}$; invece se n è dispari, dovrà essere $\frac{\mathrm{M}(n-1)}{\mathrm{N}(n-1)}\cdot\frac{\mathrm{M}(n)}{\mathrm{N}(n)}>\mathrm{A}$.

In fatti pongasi per abbreviare P per $\mathrm{N}(n)[\mathrm{N}(n)x(n)+\mathrm{N}(n-1)]$ nell' equazione (7), si avrà $x-\frac{\mathrm{M}(n)}{\mathrm{N}(n)}=-\frac{(-1)^n}{\mathrm{P}}$, ovvero $\frac{\mathrm{M}(n)}{\mathrm{N}(n)}=\sqrt{\mathrm{A}}+\frac{(-1)^n}{\mathrm{P}}$, d' onde $\frac{\mathrm{M}(n-1)}{\mathrm{N}(n-1)}=\sqrt{\mathrm{A}}-\frac{(-1)^n}{\mathrm{Q}}$, Q essendo ciò che diventa P, n cangiandosi in $n-1$; e si ha $\mathrm{P}>\mathrm{Q}$, cioè $\mathrm{N}(n)^2x(n)+\mathrm{N}(n)\mathrm{N}(n-1)>\mathrm{N}(n-1)^2x(n-1)+\mathrm{N}(n-1)\mathrm{N}(n-2)$; si sostituisca a $x(n-1)$ il suo valore $a(n-1)+\frac{1}{x(n)}$, dico che $\mathrm{N}(n)^2x(n)+\mathrm{N}(n)\mathrm{N}(n-1)>(a(n-1)\mathrm{N}(n-1)+\mathrm{N}(n-2))\mathrm{N}(n-1)+\frac{\mathrm{N}(n-1)^2}{x(n)}$, ovvero per la 2ª delle equazioni (4) $\mathrm{N}(n)^2x(n)+\mathrm{N}(n)\mathrm{N}(n-1)>\mathrm{N}(n)\mathrm{N}(n-1)+\frac{\mathrm{N}(n-1)^2}{x(n)}$, cioè $\mathrm{N}(n)x(n)>\mathrm{N}(n-1)$; ciò ch' è evidente: dunque $\mathrm{P}>\mathrm{Q}$.

Ora $\frac{\mathrm{M}(n)}{\mathrm{N}(n)}\cdot\frac{\mathrm{M}(n-1)}{\mathrm{N}(n-1)}=\mathrm{A}+(-1)^n\sqrt{\mathrm{A}}\left(\frac{1}{\mathrm{P}}-\frac{1}{\mathrm{Q}}\right)-\frac{1}{\mathrm{PQ}}$

Sia in primo luogo n pari; egli è evidente che $\frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{\mathrm{Q}}+\frac{1}{\mathrm{PQ}}>\frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{\mathrm{P}}$; dunque in questo caso $\mathrm{A}>\frac{\mathrm{M}(n)}{\mathrm{N}(n)}\cdot\frac{\mathrm{M}(n-1)}{\mathrm{N}(n-1)}$. Sia n dispari; si avrà $\frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{\mathrm{P}}+\frac{1}{\mathrm{PQ}}<\frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{\mathrm{Q}}$, ovvero $1<(\mathrm{P}-\mathrm{Q})\sqrt{\mathrm{A}}$, ciò ch' è chiaro, e che si potrebbe anche dimostrare molto facilmente, ma ne sopprimo il calcolo per brevità; dunque $\mathrm{A}<\frac{\mathrm{M}(n)}{\mathrm{N}(n)}\cdot\frac{\mathrm{M}(n-1)}{\mathrm{N}(n-1)}$. $c(n)$ sarà similmente un numero sempre positivo, perchè si avrà nell' equazione (11) $\mathrm{M}(n)^2>$ ovvero $<\mathrm{AN}(n)^2$, cioè $\frac{\mathrm{M}(n)}{\mathrm{N}(n)}>$ ovvero $<\sqrt{\mathrm{A}}$, secondo che n sarà pari ovvero dispari, conformemente alla dottrina delle Frazioni continue.

V. Le equazioni (17) e (18) ci faranno conoscere i valori, che $b(n)$ e $c(n)$ non potranno eccedere; dalla seconda si ha $b(n)$

$<$

$< \sqrt{A}$, e quindi la prima $a(n)c(n) = b(n) + b(n+1)$ ci dimostra, che tanto $a(n)$, quanto $c(n)$, non potranno mai eccedere in particolare $2a$.

VI. Ora poichè $b(n)$ e $c(n)$ hanno de' valori determinati, che non possono mai sorpassare, e che la Frazione continua, rappresentando una quantità irrazionale, deve andare all' infinito, egli è chiaro che lo stesso valore di $b(n)$ s' incontrerà un' infinità di volte, collo stesso valore di $c(n)$; allora i quoti o termini seguenti della Frazione continua, devon essere gli stessi, e nello stesso ordine disposti, che quelli già trovati; dunque la Frazione continua, ch' esprime $\sqrt{A}$, sarà composta, almeno dopo alcuni termini, di un periodo costante il quale si ripeterà all' infinito.

VII. Per trovare il primo termine del periodo, suppongo per esempio, che tale primo termine segua immediatamente il termine $a(n)$, e quindi ch' Egli sia $a(n+1)$, e l' ultimo per es. $a(n+m)$, dopo il quale, il primo $a(n+1)$ ritornerà. Rappresento, come segue, la serie de' termini della Frazione continua, delle frazioni convergenti e de' quoti completi

Quoti	a,	$a1$,	$a2$,	..	$a(n)$;	$a(n+1)$,	$a(n+2)$,	...	$a(n+m)$;	$a(n+m+1)$,	ec.
Frazioni convergenti	$\frac{M0}{N0}$,	$\frac{M1}{N1}$,	$\frac{M2}{N2}$,	..	$\frac{M(n)}{N(n)}$;	$\frac{M(n+1)}{N(n+1)}$,	$\frac{M(n+2)}{N(n+2)}$,	...	$\frac{M(n+m)}{N(n+m)}$;	$\frac{M(n+m+1)}{N(n+m+1)}$	ec.
Quoti completi	$\frac{\sqrt{A}}{1}$,	$\frac{\sqrt{A}+b1}{c1}$,	$\frac{\sqrt{A}+b2}{c2}$,	..	$\frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}$;	$\frac{\sqrt{A}+b(n+1)}{c(n+1)}$,	$\frac{\sqrt{A}+b(n+2)}{c(n+2)}$,	..	$\frac{\sqrt{A}+b(n+m)}{c(n+m)}$;	$\frac{\sqrt{A}+b(n+m+1)}{c(n+m+1)}$	ec.

Si avrà per l' ipotesi $b(n+m+1) = b(n+1)$, $c(n+m+1) = c(n+1)$, ovvero $b(n+m) = b(n)$, e $c(n+m) = c(m)$; d' onde segue $\frac{\sqrt{A}+b(n+m)}{c(n+m)} = \frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}$; dunque anche $a(n+m) = a(n)$, e $a(m+1) = a1$; ora cangiando n in m, nulla si cangia ne' termini delle tre serie precedenti, dunque anche $a(n+1) = a1$; dunque $a1$ è il quoto che incomincia il periodo, e che ritorna sempre per il primo, ed in conseguenza il quoto a è fuori del periodo.

Ciò posto le tre serie precedenti divengono

Quoti	$a,$	$a1,$	$a2,$	.	$a(n)$;	$a(n+1)\ (=a1),$	ec.
Frazioni convergenti	$\frac{Mo}{No}$,	$\frac{M1}{N1}$;	$\frac{M2}{N2}$	$\ldots$	$\frac{M(n)}{N(n)}$;	$\frac{M(n+1)}{N(n+1)}$,	ec.
Quoti completi	$\frac{\sqrt{A}}{1}$,	$\frac{\sqrt{A}+b1}{c1}$,	$\frac{\sqrt{A}+b2}{c2}$	$\ldots$	$\frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}$;	$\frac{\sqrt{A}+b(n+1)}{c(n+1)}\left(=\frac{\sqrt{A}+b1}{c1}\right)$,	ec.
Ovvero	$x,$	$x1,$	$x2,$	$\ldots$	$x(n)$;	$x(n+1)\ (=x1),$	ec.

Ma $x(n) = a(n) + \frac{1}{x(n+1)} = a(n) + \frac{1}{x1} = a(n) + \frac{\sqrt{A}-b1}{co}$ in virtù dell' ultima delle espressioni (20); dalle equazioni (10) e (11) si ha, $b1=a$, $co=1$, dunque $x(n) = a(n) + \frac{\sqrt{A}-a}{1}$, ma anche $x(n) = \frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}$; dunque $b(n) = a(n) - a$, $c(n) = 1$; le stesse equazioni danno

$$\left.\begin{aligned} N(n)b(n) + N(n-1)c(n) &= M(n) \\ M(n)b(n) + M(n-1)c(n) &= AN(n) \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Sostituendo nella prima di queste due equazioni a $b(n)$ e $c(n)$, i valori di sopra trovati, si ha $N(n)(a(n)-a) + N(n-1) = M(n)$, ovvero $a(n) - a + \frac{N(n-1)}{N(n)} = \frac{M(n)}{N(n)}$; ma $\frac{N(n-1)}{M(n-1)} < 1$; dunque $a(n) - a$ è eguale al più grande intiero contenuto in $\frac{M(n)}{N(n)}$; ma tale intiero è $= a$ (3): dunque $a(n) - a = a$; dunque i valori di $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, che appartengono all' ultimo quoto sono,

$$a(n) = 2a \qquad (23)$$

$$b(n) = a \qquad (24)$$

$$c(n) = 1 \qquad (25)$$

Dunque $x(n) = \frac{\sqrt{A}+a(n)-a}{1} = \frac{\sqrt{A}+a}{1} = \frac{\sqrt{A}+b1}{co}$ (26)

Inoltre l' equazione (18) dà nel caso di $c(n) = 1$

$$c(n-1) = A - a^2 \qquad (27)$$

Osservo che i numeratori de' rotti appartenenti al penultimo ed ultimo quoto del periodo, sono eguali, perchè dalle equazioni (21) e (17), si ha

$$x(n) = a(n) + \frac{\sqrt{A}-b(n+1)}{c(n)} = 2a + \frac{\sqrt{A}-b(n+1)}{1} = 2a + \frac{\sqrt{A}-a}{1}$$

Dunque $b(n+1)=a$; ora $x(n-1)'=a(n-1)+\frac{\sqrt{A}-b(n)}{c(n-1)}$; dunque $b(n)=b(n+1)=a=b1$.

VIII. Dalle ultime delle equazioni (3) e (4) si ha

$$\frac{M(n)}{N(n)}-a=\cfrac{1}{a1+\cfrac{1}{a2+\cfrac{1}{a3+\vdots+\cfrac{1}{a(n-1)}}}}$$

$$\frac{N(n-1)}{N(n)}=\frac{N(n-1)}{a(n-1)N(n-1)+N(n-2)}=\cfrac{1}{a(n-1)+\cfrac{N(n-2)}{N(n-1)}}$$

Si ponga in questa equazione per $\frac{N(n-2)}{N(n-1)}$ il suo valore tratto da essa stessa, e si continui tale sviluppo, n diventando $n-1$, $n-2$, $n-3$, . . . 2, si avrà

$$\frac{N(n-1)}{N(n)}=\cfrac{1}{a(n-1)+\cfrac{1}{a(n-2)+\cfrac{1}{a(n-3)+\vdots+\cfrac{1}{a1}}}}$$

Dunque se si ha $\cfrac{1}{a1+\cfrac{1}{a2+\vdots+\cfrac{1}{a(n-1)}}}=\cfrac{1}{a(n-1)+\cfrac{1}{a(n-2)+\vdots+\cfrac{1}{a1}}}$,

vale a dire se $\frac{M(n)}{N(n)}-a=\frac{N(n-1)}{N(n)}$, ovvero $M(n)=aN(n)+N(n-1)$ ch' è appunto la 2^a delle equazioni (22), ove a $b(n)$ e $c(n)$ siansi sostituiti i loro valori (24) e (25), la serie è simmetrica, ed il periodo, $a1, a2, \ldots a(n-1)$ dovrà essere identico col suo inverso $a(n-1)$, $a(n-2), \ldots a1$, e perciò i quoti procedenti dallo sviluppo di $\sqrt{A}$ in Frazione continua, andranno secondo questa legge,

$$\begin{array}{lllllll} a: & a1, & a2, & a3, & a(n-2), & a(n-1); & a(n). \end{array}$$

$$\text{O}\left(\begin{array}{lllllll} a: & a(n-1), & a(n-2,) & a(n-3), & \ldots a2, & a1; & 2a. \\ a: & a1, & a2, & a3, & \ldots\ldots a2, & a1; & 2a. \end{array}\right.$$

$$\frac{\sqrt{A}}{1},\ \frac{\sqrt{A}+b1}{c1},\ \frac{\sqrt{A}+b2}{c2},\ \frac{\sqrt{A}+b3}{c3},\ldots\ \frac{\sqrt{A}+b(n-2)}{c(n-2)},\ \frac{\sqrt{A}+b(n-1)}{c(n-1)},\ \frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}.$$

Il primo quoto a è fuori del periodo ; gli altri dall'ultimo infuori ne formano uno simmetrico .

IX. Si ha finalmente $x(n-1) = a(n-1) + \frac{1}{x(n)} = a(n-1) + \frac{c0}{\sqrt{a+b1}} = a(n-1) + \frac{c0(\sqrt{A}-b1)}{c0c1} = a(n-1) + \frac{\sqrt{a}-b1}{c1} = \frac{\sqrt{A}+b2}{c1}$; Ma $x(n-1) = \frac{\sqrt{(A+b(n-1)}}{c(n-1)}$; dunque $b(n-1) = b2$, $c(n-1) = c1$; E $x(n-2) = a(n-2) + \frac{1}{x(n-1)} = a(n-2) + \frac{c1}{\sqrt{A}+b2} = a(n-2) + \frac{c1(\sqrt{A}-b2)}{c1c2} = \frac{\sqrt{A}+a(n-2)c2-b2}{c2} = \frac{\sqrt{A}-b3}{c2}$; Ma $x(n-2) = \frac{\sqrt{A}+b(n-2)}{c(n-2)}$; dunque $b(n-2) = b3$, $c(n-2) = c2$, ed in generale

$$b(n-m) = b(m+1) \qquad (28)$$

$$c(n-m) = c(m) \qquad (29)$$

X. Dopo di avere dimostrate le proprietà dello sviluppo di $\sqrt{A}$ in frazione continua, non mi resta per terminare la prima parte della presente Memoria, che a trovare una formola, in virtù della quale si possano determinare immediatamente tutti i quoti, ossia termini $a1$, $a2$, $a3$, ec. A tale fine, osservo che il 2° de' valori (21), c' indica $a(n)$ essere il più grande intiero contenuto in $\frac{\sqrt{A}+b(n)}{c(n)}$; ora il più grande intiero contenuto in $\sqrt{A}$ è a; quindi un termine o quoto qualunque è

$$a(n) = \frac{a+b(n)}{c(n)} \qquad (30)$$

essendo successivamente $n = 1, 2, 3$, ec.

Cioè $a(n)$ è eguale al più grande intiero contenuto in $\frac{a+b(n)}{c(n)}$; ed è sempre in questo senso che si deve interpretare la formola precedente; $b(n)$ e $c(n)$ sono dati dalle formole (10) e (11), le quali non sono funzioni del quoto attualmente cercato, ma soltanto de' quoti antecedenti $a(n-1)$, $a(n-2)$, ec.: ne faremo a suo luogo qualche applicazione.

XI. In virtù della simmetria del periodo, non farebbe d'uopo di calcolarne li $n-1$ termini incogniti, se si potesse conoscere preventivamente il loro numero, poichè non si avrebbero a calcolare che $\frac{n}{2}$, ovvero $\frac{n-1}{2}$ termini, secondo che n è pari, ovvero ro dispari; ora n non influisce nelle formole trovate, che come un esponente di forma indeterminata , la quale lascia l' ambiguità de' segni ± ; quindi ho tentato un modo di trovare generalmente questo numero, servendosi de' calcoli fatti nella ricerca de' quoti successivi , cioè non calcolando che $\frac{n}{2}$ ovvero $\frac{n-1}{2}$ quoti, che sono necessarj a conoscersi per formare il periodo in questione , i quali si dovrebbero calcolare egualmente anche nel caso che fosse noto da principio il numero n .

XII. Bisogna in primo luogo determinare i valori di $M(n)$ e di $N(n)$ in funzioni solamente de' quoti $a, a1, a2, a3, \ldots a\left(\frac{n}{2}\right)$ ovvero $a\left(\frac{n-1}{2}\right)$; giacchè l'espressione generale di essi, ne contiene un numero n ; (Vedi la Mem. cit.).

Quando n è pari, tali quoti formano il seguente periodo

$$a1,\ a2,\ a3,\ \ldots\ a\left(\frac{n}{2}\right),\ a\left(\frac{n}{2}+1\right),\ a\left(\frac{n}{2}+2\right),\ \ldots\ a(n-3),\ a(n-2),\ a(n-1),\ a(n).$$

Ovvero $a1,\ a2,\ a3,\ \ldots\ a\left(\frac{n}{2}\right),\ a\left(\frac{n}{2}-1\right),\ a\left(\frac{n}{2}-2\right),\ \ldots\quad a3,\quad a2,\quad a1,\quad 2a.$

Quelli che si corrispondono verticalmente in ciascuna di queste serie orizzontali sono eguali fra di loro per la simmetria del periodo .

Quindi

$$\begin{aligned}M(n) &= a(n-1)M(n-1)+M(n-2)=a1\,[a2M(n-2)+M(n-3)]+\\ &\quad M(n-2)=(a1a2+1)M(n-2)+a1M(n-3)=N3M(n-2)+\\ &\quad N2M(n-3)=N3[a3M(n-3)+M(n-4)]+N2M(n-3)=\\ &\quad (a3N3+N2)M(n-3)+N3M(n-4)=N4M(n-3)+N3M(n-4)\\ &\quad =N5M(n-4)+N4M(n-5)=\ldots\ldots=N(m')M(n-m'+1)\\ &\quad +N(m'-1)M(n-m').\end{aligned}$$

Ora , affinchè $M(n-m'+1)$ non contenga altro quoto , oltre l' ultimo diverso $a\left(\frac{n}{2}\right)$, Egli è chiaro che bisogna fare $m'=\frac{n}{2}$, dunque

$$M(n)=N\left(\frac{n}{2}\right)M\left(\frac{n}{2}+1\right)+N\left(\frac{n}{2}-1\right)M\left(\frac{n}{2}\right) \tag{31}$$

Pongasi in questa equazione per $M\left(\frac{n}{2}+1\right)$, il suo valore $a\left(\frac{n}{2}\right)M\left(\frac{n}{2}\right)+M\left(\frac{n}{2}-1\right)$ e ricordandosi che $N\left(\frac{n}{2}-1\right)M\left(\frac{n}{2}\right)-M\left(\frac{n}{2}-1\right)N\left(\frac{n}{2}\right)=(-1)^{\frac{n}{2}}$, si avrà

$$M(n)=N\left(\frac{n}{2}\right)\left[a\left(\frac{n}{2}\right)M\left(\frac{n}{2}\right)+2M\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]+(-1)^{\frac{n}{2}} \qquad (32)$$

Quando n è pari .

Nel caso di n dispari, il periodo, invece di contenere un sol termine medio $a\left(\frac{n}{2}\right)$, ne contiene due eguali fra di loro, $a\left(\frac{n-1}{2}\right)$, $a\left(\frac{n-1}{2}\right)$, e affinchè l' equazione $M(n) = N(m')M(n-m'+1)+N(m'-1)M(n-m')$, non inchiuda, altro quoto oltre l'ultimo diverso $a\left(\frac{n-1}{2}\right)$, basterà supporre $n-m'=\frac{n-1}{2}$, d' onde $m'=\frac{n+1}{2}$; Dunque

$$M(n)=N\left(\frac{n+1}{2}\right)M\left(\frac{n+1}{2}\right)+N\left(\frac{n-1}{2}\right)M\left(\frac{n-1}{2}\right) \qquad (33)$$

Quando n è dispari .

L' espressione di $N(n)=a(n-1)N(n-1)+N(n-2)$ è la stessa che quella di $M(n)=a(n-1)M(n-1)+M(n-2)$, cangiandovi N in M; dunque l' equazione (31) si cangierà similmente, riducendo, in

$$N(n)=a\left(\frac{n}{2}\right)N\left(\frac{n}{2}\right)^2+2N\left(\frac{n}{2}-1\right)N\left(\frac{n}{2}\right) \qquad (34)$$

Quando n è pari

E la formola (33) dà

$$N(n)=N\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+N\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \qquad (35)$$

Quando n è dispari

XIII. I due termini (32) e (34), quando n è pari, e li (33) e (35), quando n è dispari, della frazione $\frac{M(n)}{N(n)}$ corrispondono all'ultimo quoto $a(n)=2a$ nel primo periodo. Ma quali saranno i valori de termini della frazione convergente $\frac{M(n'n)}{N(n'n)}$, che corrisponde in ogni periodo, all' ultimo quoto $a(n'n)=2a$? se si suppone successivamente $n'=1, 2, 3, 4$, ec., si avranno le frazioni $\frac{M(n)}{N(n)}$, $\frac{M(2n)}{N(2n)}$, $\frac{M(3n)}{N(3n)}$, $\frac{M(4n)}{N(4n)}$, ec., corrispondenti al quoto $2a$, nel 1°, 2°, 3°, 4°, ec. periodo.

XIV. Se si pon mente che tutti i quoti $a(n \pm m)$, $a(n'n \pm m)$ sono eguali fra di loro, eguali ciascuno ad $a(m)$, perchè posti ad eguale distanza degli estremi $a1$, $a1$, si vedrà che le formole (32), (34), (33), (35), in cui n diventi $n'n$, restano sempre vere, qualunque sia il periodo, cui esse appartengano; dunque i valori de' termini della frazione convergente, che corrisponde all' ultimo quoto $2a$, in un periodo qualunque n'^{mo}, saranno

$$M(n'n)=N\left(\frac{n'n}{2}\right)\left[a\left(\frac{n'n}{2}\right)M\left(\frac{n'n}{2}\right)+2M\left(\frac{n'n}{2}-1\right)\right]+(-1)^{\frac{n'n}{2}} \quad (36)$$

$$N(n'n)=a\left(\frac{n'n}{2}\right)N\left(\frac{n'n}{2}\right)^2+2N\left(\frac{n'n}{2}-1\right)N\left(\frac{n'n}{2}\right) \quad (37)$$

Quando $n'n$ è un numero pari.

$$\text{E } M(n'n)=N\left(\frac{n'n+1}{2}\right)M\left(\frac{nn+1}{2}\right)+N\left(\frac{n'n-1}{2}\right)M\left(\frac{n'n-1}{2}\right) \quad (38)$$

$$N(n'n)=N\left(\frac{n'n+1}{2}\right)^2+N\left(\frac{n'n-1}{2}\right)^2 \quad (39)$$

Quando $n'n$ è un numero dispari.

XV. Dopo di avere trovate queste formole generali e semplicissime, e quelle che danno il valore di $M(m)$, $N(m)$. (Ved. la Mem. citata) si vedrà con piacere, mi lusingo, presentata in due teoremi la risoluzione in numeri intieri dell'equazione $x^2-Ay^2=\pm 1$, A non essendo un numero quadrato, in tutti que' casi, in cui essa è possibile.

XVI. Si osservi che ogni frazione convergente $\frac{M(n'n)}{N(nn)}$, che corrisponde in ogni periodo all'ultimo quoto $a(n'n)=2a$ è tale che

$$M(n'n)^2-AN(n'n)^2=(-1)^{n'n} \quad (40)$$

Perchè $x(n'n) = a(n'n) + \frac{1}{x(n'n+1)} = 2a + \frac{1}{x1} = \frac{\sqrt{A}+a}{1}$; ma $x(n'n) = \frac{\sqrt{A}+b(n')}{c(n'n)}$; dunque $b(n'n) = a$ e $c(n'n) = 1$; dunque le formole (10) e (11) divengono

$$(-1)^{n'n}(AN(n'n-1)N(n'n)-M(n'n-1)M(n'n)) = a \tag{41}$$

$$M(n'n)^2 - AN(n'n)^2 = (-1)^{n'n}$$

Si sviluppi $\sqrt{A}$ in frazione continua, a essendo il più grande intiero contenuto in $\sqrt{A}$, e $\frac{M(n'n)}{N(n'n)}$ la frazione convergente che corrisponde, come s' è già veduto, all' ultimo quoto $2a$ in ogni periodo.

Teorema I. *L' equazione* $x^2 - Ay^2 = +1$ *è sempre risolubile in numeri intieri di un' infinità di maniere.*

Perchè 1°, se nello sviluppo di $\sqrt{A}$, si trova n pari, si avrà sempre $M(n'n)^2 - AN(n'n)^2 = (-1)^{n'n} = +1$; quindi si farà $x = M(n'n)$, $y = N(n'n)$, essendo successivamente $n' = 1, 2, 3$, ec.

2.° Se si trova n dispari, si prenda n' pari, e si avrà $M(n'n)^2 - AN(n'n)^2 = (-1)^{n'n} = +1$, allora $x = M(n'n)$, $y = N(n'n)$, essendo n' un numero qualunque pari.

Vale a dire che la proposta sarà sciolta in questo caso da i termini di tutte le frazioni convergenti $\frac{M(n'n)}{N(n'n)}$, corrispondenti al quoto $2a$ in tutti i periodi di rango pari.

Teorema II. *L'equazione* $x^2 - Ay^2 = -1$ *è risolubile in numeri intieri di un' infinità di maniere, se* n *è dispari; essa sarà impossibile, se* n *è pari.*

Perche 1°, n essendo dispari, si prenda n' dispari, e si avrà $M(n'n)^2 - AN(r'n)^2 = (-1)^{n'n} = -1$, quindi $x = M(n'n)$, $y = N(n'n)$, n' essendo un numero qualunque dispari.

Vale a dire che la proposta sarà sciolta dai termini di tutte le frazioni convergenti $\frac{M(n'n)}{N(n'n)}$, corrispondenti al quoto $2a$, in tutti i periodi di rango dispari.

2.° Se n è pari, si avrà sempre $M(n'n)^2 - AN(n'n)^2 = (-1)^{n'n} = +1$,

$= + 1$, quindi non esiste in questo caso alcun valore $M(n'n)$ di x, e $N(n'n)$ di y, atto a soddisfare la proposta.

XVII. Sull' esempio di *Eulero* e di *La Grange*, *Le Gendre* ha calcolato nell' opera citata, una tavola più estesa ed utilissima delle più semplici frazioni $\frac{m}{n}$ che soddisfanno all'equazione $m^2 - An^2 = \pm 1$ per ogni numero non quadrato A da $A = 2$ sino ad $A = 1003$; e questo Illustre Geometra osserva, che dalla sola inspezione delle cifre che terminano i numeri m e n, si scorgerà quale de' due segni $\pm$ abbia luogo nell'accennata equazione, ma trovo che non è necessario per quest' oggetto di conoscere i numeri m e n, ma solamente la forma pari o dispari di uno di essi, vale a dire, che supponendo nota la forma pari o dispari di $N(n)$ per es. nell' equazione $M(n)^2 - AN(n)^2 = (-1)^n$ (42) con pochi teoremi determinerò quella di n; cognizione importante, che mi condurrà per una assai breve strada alla soluzione del Problema che mi sono proposto.

XVIII. Sia pari $A = 2m$ e pari $N(n) = 2m'$, $M(n)$ sarà necessariamente dispari per l' irriducibilità della frazione $\frac{M(n)}{N(n)}$; quindi $M(n) = 2m'' + 1$; ponghansi questi valori nell' equazione (42), si avrà

$$2mm'^2 = m''^2 + m'' + \frac{1-(-1)^n}{4}.$$

Ora $\frac{1-(-1)^n}{4}$ non può essere intiero, cioè 0, se non quando $n = 0$, ovvero $=$ ad un numero pari; non v' ha che il secondo caso che faccia al nostro oggetto, quindi si ha il seguente

Teorema I°. *Se* A *e* N(n) *sono numeri pari,* M(n) *sarà necessariamente dispari, e* n *pari*.

È $A = 2m = \frac{m''(m''+1)}{m'^2}$

$$N(n) = 2m' = N\left(\tfrac{n}{2}\right)\left(a\left(\tfrac{n}{2}\right)N\left(\tfrac{n}{2}\right) + 2N\left(\tfrac{n}{2} - 1\right)\right)$$

$$M(n) = 2m'' + 1 = N\left(\tfrac{n}{2}\right)\left(a\left(\tfrac{n}{2}\right)M\left(\tfrac{n}{2}\right) + 2M\left(\tfrac{n}{2} - 1\right)\right) + (-1)^{\frac{n}{2}}$$

Dunque 1°, Se $N\left(\frac{n}{2}\right)$ è pari, $M\left(\frac{n}{2}\right)$ sarà dispari, e $a\left(\frac{n}{2}\right)$ può essere pari o dispari.

2° Se $N\left(\frac{n}{2}\right)$ è dispari, $a\left(\frac{n}{2}\right)$ sarà pari e $M\left(\frac{n}{2}\right)$ può essere pari o dispari.

XIX. Sia pari $A=2m$, dispari $N(n)=2m'+1$, pari $M(n)=2m''$, si avrà in virtù della stessa equazione (42)

$$m(2m'+1)^2 = 2m''^2 - \frac{(-1)^n}{2}.$$

Ciò ch' è impossibile; dunque se A è pari, e $N(n)$ dispari, $M(n)$ non può essere pari.

XX. Sia perciò pari $A=2m$, dispari $N(n)=2m'+1$, e dispari $M(n)=2m''+1$; e la mentovata equazione darà

$$m(4m'(m'+1)+1) = 2m''(m''+1) + \frac{1-(-1)^n}{2}.$$

Se m è pari $\frac{1-(-1)^n}{2}$ dev' essere 0, dunque $n=0$, ovvero $=$ numero pari; se m è dispari, $\frac{1-(-1)^n}{2}$ dev' essere $=1$, cioè $n=$ numero dispari; dunque

Teorema II. *Se* A *è pari e* N(n) *dispari,* M(n) *sarà necessariamente dispari, e* n *sarà pari ovvero dispari, secondo che* m *sarà pari ovvero dispari.*

Cioè $A=2m=\frac{(2m''+1)^2-(-1)^n}{(2m'+1)^2}=\frac{(2m''+1)^2-(-1)^m}{(2m'+1)^2}$.

Se m è pari, n sarà pari e

$$N(n)=2m'+1=N\left(\frac{n}{2}\right)\left(a\left(\frac{n}{2}\right)N\left(\frac{n}{2}\right)+2N\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)$$

$$M(n)=2m''+1=N\left(\frac{n}{2}\right)\left(a\left(\frac{n}{2}\right)M\left(\frac{n}{2}\right)+2M\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)+(-1)^{\frac{n}{2}}$$

$N\left(\frac{n}{2}\right)$ e $a\left(\frac{n}{2}\right)$ devon essere dispari e $M\left(\frac{n}{2}\right)$ pari.

Se m è dispari, n sarà dispari e

$$N(n)=2m'+1=N\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+N\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

$$M(n) = 2m'' + 1 = N\left(\frac{n+1}{2}\right) M\left(\frac{n+1}{2}\right) + N\left(\frac{n-1}{2}\right) M\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

1.° Se $N\left(\frac{n+1}{2}\right)$ è pari, $N\left(\frac{n-1}{2}\right)$ sarà dispari, $M\left(\frac{n+1}{2}\right)$ sarà dispari; e $M\left(\frac{n-1}{2}\right)$ similmente dispari .

2.° Se $N\left(\frac{n+1}{2}\right)$ è dispari, $N\left(\frac{n-1}{2}\right)$ sarà pari e $M\left(\frac{n+1}{2}\right)$ dispari; e $M\left(\frac{n-1}{2}\right)$ similmente dispari .

Sia dispari $A = 2m + 1$, pari $N(n) = 2m'$, sarà necessariamente dispari $M(n) = 2m''+1$. Si ha dalla mentovata equazione

$$m'^2(2m+1) = m''(m''+1) + \frac{1-(-1)^n}{4} .$$

Dunque affinchè $\frac{1-(-1)^n}{4}$ sia intiero , cioè 0 , bisogna che $n = 0$ ovvero = numero pari ; dunque

Teorema III. *Se* A è *dispari*, N(n) *pari* , M(n) *sarà necessariamente dispari* , *e* n *pari* .

Cioè $A = \frac{m''(m''+1)}{m'^2}$

$$N(n) = 2m' = N\left(\frac{n}{2}\right)\left(a\left(\frac{n}{2}\right) N\left(\frac{n}{2}\right) + 2N\left(\frac{n}{2} - 1\right)\right)$$

$$M(n) = 2m'' + 1 = N\left(\frac{n}{2}\right)\left(a\left(\frac{n}{2}\right) M\left(\frac{n}{2}\right) + 2M\left(\frac{n}{2} - 1\right)\right) + (-1)^{\frac{n}{2}} .$$

Le forme di $N\left(\frac{n}{2}\right)$, $M\left(\frac{n}{2}\right)$, $a\left(\frac{n}{2}\right)$ sono le stesse che quelle del Teor. I.

XXI. Sia dispari $A = 2m + 1$, dispari $N(n) = 2m' + 1$; dispari $M(n) = 2m'' + 1$, si avrà

$$2m'(m'+1)(2m+1) + m = 2m''(m''+1) - \frac{(-1)^n}{2} ,$$ ciò ch'è impossibile.

Dunque A e $N(n)$ essendo dispari , $M(n)$ non può essere dispari .

XXII. Perciò sia dispari $A = 2m+1$, dispari $N(n) = 2m' + 1$, pari $M(n) = 2m''$, si avrà

$$2m'(m'+1)(2m+1) + m = 2m''^2 - \frac{1+(-1)^n}{2} .$$

Ora $\frac{1+(-1)^n}{2}$ dev' essere intiero e pari, cioè 0, quando m è pari, dunque $n=$ numero dispari. E $\frac{1+(-1)^n}{2}$ dev' essere dispari, cioè 1 quando m è dispari, dunque $n=0$ ovvero $=$ numero pari.

Dunque

Teorema IV. *Se* A(n) *e* N(n) *sono dispari,* M(n) *sarà necessariamente pari; e se* m *è pari ovvero dispari*, n *sarà dispari ovvero pari*.

Cioè $A=2m+1=\frac{4m''^2-(-1)^n}{(2m'+1)^2}=\frac{4m''^2-(-1)^{m+1}}{(2m'+1)^2}$.

Se m è pari, n sarà dispari e

$$N(n)=2m'+1=N\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+N\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

$$M(n)=2m''=N\left(\frac{n+1}{2}\right)M\left(\frac{n+1}{2}\right)+N\left(\frac{n-1}{2}\right)M\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

1.° Se $N\left(\frac{n+1}{2}\right)$ è pari, $N\left(\frac{n-1}{2}\right)$ sarà dispari, e $M\left(\frac{n-1}{2}\right)$ sarà pari e $M\left(\frac{n+1}{2}\right)$ dispari.

2.° Se $N\left(\frac{n+1}{2}\right)$ è dispari, $N\left(\frac{n-1}{2}\right)$ sarà pari e $M\left(\frac{n+1}{2}\right)$ sarà pari e $M\left(\frac{n-1}{2}\right)$ dispari.

Se m è dispari, n sarà pari e

$$N(n)=2m'+1=N\left(\frac{n}{2}\right)\left(a\left(\frac{n}{2}\right)N\left(\frac{n}{2}\right)+2N\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)$$

$$M(n)=2m''=N\left(\frac{n}{2}\right)\left(a\left(\frac{n}{2}\right)M\left(\frac{n}{2}\right)+2M\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)+(-1)^{\frac{n}{2}}$$

$N\left(\frac{n}{2}\right)$, $M\left(\frac{n}{2}\right)$, $a\left(\frac{n}{2}\right)$ devon essere dispari.

XXIII. Con questi teoremi si saprà sempre a quale segno appartengano i numeri $M(n)$ e $N(n)$ nell' equazione $M(n)^2-AN(n)^2=(-1)^n$, e così tutto resta determinato nella tavola citata del *Le Gendre*; ma si può far di più, e determinare la forma pari ovvero dispari di n nella maggior parte de' casi; perciò ripiglio l' equal' equazione del Teorema I, ove n è pari, ed A similmente pari, cioè

$$A = 2m = \frac{m''(m''+1)}{m'^2}$$

Suppongo in 1.° luogo m dispari $= 2a + 1$; quindi $A = 4a + 2 = \frac{m''(m''+1)}{m'^2}$; sia pari $a = 2b$,

si avrà $(8b + 2)m'^2 = m''(m''+1)$
equazione che sussiste.

Sia dispari $a = 2b+1$, si avrà $(8b+6)m'^2 = m''(m''+1)$, equazione che sussiste.

XXIV. Suppongasi m dispari $= 2a + 1$, nel Teorema II, ove A è pari, e la forma di n eguale a quella di m, si avrà

$$A = 4a + 2 = \frac{4m''(m''+1)+1-(-1)^m}{4m'(m'+1)+1}$$, ovvero

$$2m'(m'+1)(2a+1)+a = m''(m''+1)$$

Ora se a è dispari $= 2b + 1$, l' equazione precedente non può sussistere; sussiste invece in questo caso quella del Teorema I; ma se a è pari $= 2b$, essa può aver luogo: dunque

1.° I numeri della forma $A = 8b + 6$ hanno sempre n pari nello sviluppo di $\sqrt{A}$ in frazione continua.

2.° E quelli della forma $A = 8b + 2$ possono avere n pari e dispari.

XXV. Sia ne' stessi teoremi pari $m = 2a$, si avrà Teor. I, ove n è pari $A = 4a = \frac{m''(m''+1)}{m'^2}$. 1.° Se pari $a = 2b$, si avrà $8bm'^2 = m''(m''+1)$

2.° Se dispari $a = 2b+1$, $(8b+4)m'^2 = m''(m''+1)$

Equazioni che sussistono

XXVI. Nel Teorema II, n ha la stessa forma di m, cioè pari in questa ipotesi

E $A = 4a = \frac{4m''(m''+1)}{(2m'+1)^2}$

1.° Se pari $a = 2b$, si avrà $8bm'(m'+1) + 2b = m''(m''+1)$, equazione che sussiste.

2. Se dispari $a = 2b + 1$, si avrà $m'(8b+4)(m'+1)+2b+1 = m''(m''+1)$

Quest' equazione non può aver luogo; sussiste invece in questo caso, l' equazione del Teorema I,

$(8b+4)m'^2=(m''+1)m''$, in cui N([illegible]) è pari $=2m'$.

Dunque i numeri della forma $8b$ e $8b+4$ hanno sempre n pari.

XXVII. Suppongasi ora A dispari, si ha per il Teorema III, in cui n è pari, e $A=2m+1=\frac{m''(m''+1)}{m'^2}$; sia dispari $m=2a+1$, si avrà $(4a+3)m'^2=m''(m''+1)$

1.° Se pari $a=2b$, si ha $(8b+3)m'^2=m''(m''+1)$

2.° Se dispari $a=2b+1$, $(8b+7)m'^2=m''(m''+1)$

Equazioni che possono sussistere.

XXVIII. Nel Teorema IV, la forma di n è eguale a quella di $m+1$; m quì si suppone dispari; quindi n è pari, e si ha

$A=2m+1=4a+3=\frac{4m'^2-1}{(2m'+1)^2}$ d' onde $m'(m'+1)(4a+3)+a=m''^2-1$

I.° Se pari $a=2b$, si ha $m'(m'+1)(8b+3)+2b=m''^2-1$

II.° Se dispari $a=2b+1$, $m'(m'+1)(8b+7)+2b=m''^2-2$

equazioni che possono sussistere.

Dunque i numeri della forma $8b+3$, $8b+7$ hanno sempre n pari.

XXIX. Pongasi ne' teoremi III e IV, pari $m=2a$, si avrà Teorema III, in cui n è pari $A=2m+1=4a+1=\frac{m''(m''+1)}{m'^2}$ e $(4a+1)m'^2=m''(m''+1)$

I.° Se pari $a=2b$, si ha $(8b+1)m'^2=m''(m''+1)$

II.° Se dispari $a=2b+1$, $(8b+5)m'^2=m''(m''+1)$;

equazioni che possono sussistere.

XXX. Si ha nel Teorema IV, in cui n è dispari, poichè $m=2a$

$A=2m+1=4a+1=\frac{4m''^2+1}{(2m'+1)^2}$, e $m'(m'+1)(4a+1)+a=m''^2$

1.° Se pari $a=2b$, si ha $m'(m'+1)(8b+1)+2b=m''^2$;

2.° Se dispari $a=2b+1$, $m'(m'+1)(8b+5)+2b+1=m''^2$;

equazioni che possono sussistere. Dunque i numeri della forma $8b+1$, $8b+5$ possono avere n pari e dispari.

XXXI. Dunque raccogliendo tutti questi casi, i numeri della forma

$A=8b$,

$$\begin{aligned} A = {} & 8b \\ & 8b + 3 \\ & 8b + 4 \\ & 8b + 6 \\ & 8b + 7 \end{aligned}$$

hanno sempre n pari nello sviluppo di $\sqrt{A}$ in frazione continua.

Ed i numeri della forma $A = 8b + 1$

$$\begin{aligned} & 8b + 2 \\ & 8b + 5 \end{aligned}$$

possono avere n pari e dispari.

XXXII. *Le Gendre* ha dimostrato nell' Opera citata §. VII, che a essendo un numero primo della forma $4n+1$, l' equazione $x^2 - ay^2 = -1$ è sempre possibile in numeri intieri; d' onde conchiudo che i numeri primi della forma $8b + 1$, $8b + 5$ hanno sempre n dispari.

XXXIII. Da tutto ciò che vengo di esporre, traggo, per determinare n, la regola seguente

Si calcolino successivamente, per mezzo della formola (30), *i quoti* a1, a2, a3, *ec. e quando si sarà pervenuto ad un quoto eguale all' antepenultimo, ovvero al penultimo già trovato, si riguardi tale penultimo quoto, come un termine medio, o l' uno de' due termini medj ed eguali del periodo; si ponga nelle espressioni di* N(n) *e* M(n) *prese ne' teoremi relativi alla forma data di* A, *per* n, *il numero doppio di quello che sta nella notazione del penultimo quoto, ovvero questo numero doppio, accresciuto di una unità; quelli valori così trovati, che soddisferanno alle condizioni de' teoremi in questione, ed all' equazione* (42)

$$M(n)^2 = AN(n)^2 + (-1)^n$$

daranno il numero cercato.

XXXIV. *Esempio* I. Sia $A = 94 = 2m = 8b + 6$; dunque (30) n è pari, $a = 9$; $m = 47$; $b = 11$; dunque il Teorema II non può aver luogo in questo caso; le formole (4), (10), (11), (30), e (42) daranno successivamente, essendo

$n = 0$, $No = 0$

$Mo = 1$,

$n=1,\ N1=1,\ b1=-94.0.1+1.9=9$

$M1=9,\ c1=-81+94.1=13 \qquad 1a=\frac{9+9}{13}=1$

$n=2,\ N2=1,\ b2=94.1.1-9.10=4$

$M2=10,\ c2=10^2-94.1=6, \qquad a2=\frac{9+4}{6}=2$

$n=3,\ N3=3,\ b3=-94.1.3+10.29=8$

$M3=29,\ c3=-29^2+94.9=5, \qquad a3=\frac{9+8}{5}=3$

$n=4,\ N4=10,\ b4=94.3.10-29.97=9$

$M4=97,\ c4=97^2-94.10^2=9 \qquad a4=\frac{9+7}{9}=1$

$n=5,\ N5=13,\ b5=-94.10.13+97.126=2$

$M5=126,\ c5=-126^2+94.13^2=10, \qquad a5=\frac{9+2}{10}=1$

$a5$ ed $a4$ non possono quì formare i termini medj ed eguali del periodo, poichè allora n sarebbe dispari $=9$. Sia perciò

$n=6,\ N6=23,\ b6=94.13.23-126.223=8$

$M6=223,\ c6=223^2-94.23^2=3, \qquad a6=\frac{9+8}{3}=5$

$n=7,\ N7=128,\ b7=-9.23.128+223.1241=7$

$M7=1241,\ c7=-1241^2+94.128^2=15, \qquad a7=\frac{9+7}{15}=1$

Si ha $a5=a7$: per verificare se $a6$ è il termine medio, facciasi (32), $n=12$ nelle espressioni del Teorema I; si avrà $N\left(\frac{n}{2}\right)=N6=23$, $M\left(\frac{n}{2}\right)=M6=223$, $a\left(\frac{n}{2}\right)=a6=5$, che dovrebb' essere pari per le condizioni dello stesso teorema (2°); quindi non può essere $n=12$, perciò sia

$n=8,\ N8=151,\ b8=94.128.151-1241.1464=8$

$M8=1464,\ c8=1464^2-94.151^2=2, \qquad a8=\frac{9+8}{2}=$

$n=9\ N9=1336,\ b9=-94.151.1336+1464.12953=-8$

$M9=12953,\ c9=-12953^2+94.1336^2=15, \qquad a9=\frac{9+8}{15}=$

Si ha $a7 = a9$; per verificare se $a8$ è il termine medio, suppongasi $n = 16$ nelle espressioni del Teorema I , si avrà $N\left(\frac{n}{2}\right) = N8 = 151$, $M\left(\frac{n}{2}\right) = M8 = 1464$, $a\left(\frac{n}{2}\right) = a8 = 8$; questi valori soddisfanno alle condizioni del Teorema I, 2.°, perciò si calcolino le espressioni di N16 , M16 date nello stesso teorema , si avrà

$$N16 = 151(8.151 + 2.128) = 221064$$
$$M16 = 151(8.1464 + 2.1241) + 1 = 2143295$$

Si verifichi l' equazione (42), e si avrà
$2143295^2 = 94.221064^2 + 1$, la quale sussistendo, dimostra essere $n = 16$, ed il periodo cercato

$$9 : 1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1 ; 18$$

Ed i più semplici valori di $M(n)$ e $N(n)$ che soddisfanno all' equazione

$$M(n)^2 - 94N(n)^2 = +1, \text{ sono}$$
$$M(n) = 2143295 ,$$
$$N(n) = 221064 .$$

XXXV. *Esempio* II. Sia $A = 1005 = 2m + 1 = 8b + 5$; essendo $m = 502$, $b = 125$; ed $a = 31$. La forma di questo numero costituisce uno de' tre casi dubbj (30) . Sia

$n = 0$, $N0 = 0$
$M0 = 1$
$n = 1$, $N1 = 1$ $\quad b1 = 31$
$M1 = 31$ $\quad c1 = 44$, $\quad a1 = \frac{31+31}{44} = 1$
$n = 2$, $N2 = 1$; $\quad b2 = 1005.1.1 - 31.32 = 13$
$M2 = 32$ $\quad c2 = 32^2 - 1005.1 = 19$, $\quad a2 = \frac{31+13}{19} = 2$
$n = 3$, $N3 = 3$ $\quad b3 = - 1005.1.3 + 32.95 = 25$
$M3 = 95$, $\quad c3 = -95^2 + 1005.3^2 = 20$, $\quad a3 = \frac{31+25}{20} = 2$.

Poichè $a2 = a3 = 2$, si verifichi se $n = 5$; si ricorra perciò al Teorema IV; si avrà $N\left(\frac{n+1}{2}\right) = N3 = 3$, $N\left(\frac{n-1}{2}\right) = N2 = 1$, che dovrebb' essere pari (II.), come pure $M\left(\frac{n+1}{2}\right) = M3 = 95$; dunque non può essere $n = 5$: sia perciò

$n = 4, N4 = 7,\quad b4 = 1005.3.7 - 95.222 = 15$

$M4 = 222,\quad c4 = 222^2 - 1005.7^2 = 39,\qquad a4 = \frac{31+15}{39} =$

$n = 5, N5 = 10,\quad b5 = -1005.7.10 + 222.317 = 24$

$M5 = 317,\quad c5 = -317^2 + 1005.10^2 = 11,\qquad a5 = \frac{31+24}{11} =$

$n = 6, N6 = 57,\quad b6 = 1005.10.57 - 317.1807 = 31$

$M6 = 1807,\quad c6 = 1807^2 - 1005.57^2 = 4\qquad a6 = \frac{31+31}{4} =$

$n = 7, N7 = 865,\quad b7 = -1005.57.865 + 1807.27422 = 29$

$M7 = 27422,\quad c7 = -27422^2 + 1005.865^2 = 41\qquad a7 = \frac{31+29}{41} =$

$n = 8, N8 = 922,\quad b8 = 1005.865.922 - 27422.29229 = 12$

$M8 = 29229,\quad c8 = 29229^2 - 1005.922^2 = 21,\qquad a8 = \frac{31+12}{21} =$

$n = 9, N9 = 2709,\quad b9 = -1005.922.2709 + 29229.85880 = 30$

$M9 = 85880,\quad c9 = -85880^2 + 1005.2709^2 = 5\qquad a9 = \frac{31+30}{5} =$

$n = 10, N10 = 33430,\quad b10 = 1005.2709.33430 - 85880.1059789 = 30,$

$M10 = 1059789,\quad c10 = 1059789^2 - 1005.33430^2 = 21,\qquad a10 = \frac{31+30}{21}$

Si ha $a8 = a10 = 2$; si verifichi se $a9$ è il termine medio, facendo $n = 18$, si avrà Teorema III, $N\left(\frac{n}{2}\right) = N9 = 2709$, $N\left(\frac{n}{2} - 1\right) = N8 = 922$, $M\left(\frac{n}{2}\right) = M9 = 85880$, $M\left(\frac{n}{2} - 1\right) = M8 = 29229$, $a\left(\frac{n}{2}\right) = a9 = 12$; questi valori soddisfanno alle condizioni del Teorema I 2.° conformemente a quanto si è prescritto nel Teorema III. Perciò

$$N18 = 2709(12.2709 + 2.922) = 93059568$$
$$M18 = 2709(12.85880 + 2.29229) - 1 = 2950149761$$

E l' equazione (42)

$$2950149761^2$$

$$2950149761^2 = 1005.93059568^2+1$$

sussiste . Dunque $n = 18$, ed il periodo cercato è

31: 1, 2, 2, 1, 5, 15, 1, 2, 12, 2, 1, 15, 5, 1, 2, 2, 1 . 62

SOPRA
LA MISURA DELLE FORZE MUSCOLARI

MEMORIA

Del Sig. Vittorio Fossombroni

Ricevuta il dì 16 *Ottobre* 1806.

1. In seguito della mia Memoria sopra il moto degli animali e sopra i trasporti pubblicai alcune ulteriori riflessioni atte a facilitare i resultati di dettaglio sulle forze dei muscoli come adesso mi accingo a dimostrare d' appresso le sopraccennate ulteriori riflessioni che giova quì brevemente premettere.

2. I §§. 21, 23, e 48 della citata Memoria indicano le traccie da seguirsi per valutare gli sforzi muscolari, non solo quando è nella direzione della linea z la resultante di tali sforzi che anima il passo, ma ancora quando io considero le risultanti successive che sostengono il progresso del passo medesimo, e quando perciò bisogna oltre la linea z porre a calcolo un'altra linea la quale passa egualmente per il centro di gravità, ma incontra il piano delle x, s in un punto differente da quello in cui è l' origine delle x.

3. Dimostrai in tal guisa come dalla cognizione per sè stessa sterile della curva descritta dal centro di gravità possa dedursi il computo fino ad ora ignoto e difficilmente assegnabile con un metodò diretto delle forze esercitate dai muscoli, e mi limitai a questo giacchè credei più lungo della presentanea occorrenza lo sviluppo necessario, che essendomisi altronde presentato in seguito assai facile e spedito, ho creduto possa gradirsene un accenno da chi volesse occuparsi dei relativi dettagli.

4. Quando pertanto per essere il passo slontanato dal suo principio, e per il meccanismo dell' animale di cui si considera il movimento, la risultante delle forze muscolari relativa ad un da-

dato punto della curva descritta dal centro di gravità passa per il centro stesso ed incontra il piano delle x, s in un punto differente da quello in cui è l'origine delle x, in tal caso questa risultante che sostiene l'avvanzamento del passo non è più nel senso della linea z la qual linea sarà sempre $=(x^2+s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$, ma bensì è nel senso di un' altra linea che chiameremo ω e che io suppongo che incontri il piano delle x, s in un punto distante dall' origine delle x della quantità α nel senso delle x, e della quantità β nel senso delle s.

5. Si consideri adunque il passo slontanato dal suo principio, ed il centro di gravità sia in un punto della curva che esso descrive il qual punto corrisponda alle coordinate x, s, y, e la risultante degli sforzi muscolari sia nella direzione della linea ω la quale passa per il centro di gravità, ed incontra il piano delle x, s in un punto corrispondente alle coordinate α, β.

6. Quì si avverta che la relazione fra α, β è indipendente da quella fra le coordinate x, s, y le quali potrebbero variare mentre α, β rimanessero costanti. In fatti il meccanismo dell' animale di cui si considera il moto, e la varia maniera con cui può progredire debbono condurre alla determinazione di α, β per ogni punto in cui si trova il centro di gravità.

7. Quando adunque il centro di gravità à percorso ∂x con la celerità $\frac{\partial x}{\partial t}$, ∂s con la celerità $\frac{\partial s}{\partial t}$, ∂y con la celerità $\frac{\partial y}{\partial t}$ è agitato dalla gravità che gli imprime la celerità $p\partial t$ nella direzione di y dalla forza ritardatrice del corpo attaccato alla corda b che gli imprime la celerità $\mathrm{R}\partial t$ nella direzione della corda stessa, e dalla risultante delle forze muscolari che gli imprime nella direzione della linea ω la celerità $\mathrm{Q}\partial t$.

8. Il centro di gravità avrà adunque nelle tre direzioni di y, s, x, rispettivamente le tre celerità

$$\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{y\mathrm{Q}\partial t}{\omega}-\frac{y\mathrm{R}\partial t}{b}-p\partial t$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{(s-\beta)\mathrm{Q}\partial t}{\omega}-\frac{s\mathrm{R}\partial t}{b}$$

$\frac{\partial x}{\partial t}$

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{(x-\alpha)Q\partial t}{\omega} - \frac{xR\partial t}{b}$$

e nel caso in cui la corda sia di lunghezza variabile come esprime il §. 13 della sopraccitata Memoria il centro di gravità avrà nel senso delle tre coordinate y, s, x rispettivamente le tre celerità

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{yQ\partial t}{\omega} - \frac{yR\partial t}{r} - p\partial t$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{(s-\beta)Q\partial t}{\omega} - \frac{sR\partial t}{r}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{(x-\alpha)Q\partial t}{\omega} - \frac{xR\partial t}{r}\,.$$

9. Prendo queste tre ultime espressioni giacchè appartengono ad un caso che ammette facilmente una integrazione ed eguagliandole rispettivamente a $\frac{\partial(y+\partial y)}{\partial t}$, $\frac{\partial(s+\partial s)}{\partial t}$, $\frac{\partial(x+\partial x)}{\partial t}$ ottengo le tre equazioni

$$\frac{yQ\partial t}{\omega} - \frac{yR\partial t}{r} - p\partial t = \partial\,\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{(s-\beta)Q\partial t}{\omega} - \frac{sR\partial t}{r} = \partial\,\frac{\partial s}{\partial t}$$

$$\frac{(x-\alpha)Q\partial t}{\omega} - \frac{xR\partial t}{r} = \partial\,\frac{\partial x}{\partial t}\,.$$

10. Conviene adesso integrare tali equazioni per rapporto alle tre coordinate y, s, x, e giova qui per evitare ogni equivoco prevenire la seguente difficoltà che potrebbe eccitarsi. Il centro di gravità in virtù delle impressioni che riceve percorrendo un elemento della curva nel tempuscolo dt viene a descrivere contemporaneamente gli spazietti dx, ds, dy; ma tra le impressioni che riceve vi è Qdt nel senso della linea ω e la linea ω per causa della variabilità di α, β, cioè degli aumenti e decrementi $\partial\alpha$, $\partial\beta$ tenderà ad accostarsi o allontanarsi dalla perpendicolarità, ed in conseguenza per questa variata direzione potrà diminuire, o crescere l' elemento della curva descritta nell' istante dt, e quindi gli spazietti ∂x, ∂s, ∂y essere minori, o maggiori di quello che risultano dalla supposizione di α, β costanti; onde non sarebbero più giuste le contemplate celerità $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial s}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, e nemmeno

le $\frac{\partial(x+\partial x)}{\partial t}$, $\frac{\partial(s+\partial s)}{\partial t}$, $\frac{\partial(y+\partial y)}{\partial t}$ onde l' impostatura delle precedenti equazioni differenziali sarebbe equivoca.

11. Ma se d' appresso i precedenti enunciati si descriva una figura, ragionando opportunamente sopra di essa si dimostrerà, che dalla variata direzione di ω, ossia dagli aumenti e decrementi $\partial\alpha$, $\partial\beta$ si producono è vero negli spazietti ∂v, ∂s, ∂y nell' istante ∂t decrementi ed aumenti, ma questi sono infinitesimi di secondo ordine, e per conseguenza debbono ∂x, ∂s, ∂y considerarsi nell' istante ∂t tali quali sarebbero se α, β fossero costanti.

12. Moltiplicando per tanto respettivamente le tre superiori equazioni per $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial s}{\partial t}$, $\frac{\partial x}{\partial t}$, e sommandole insieme avremo $\frac{y\partial y+(s-\beta)\partial s+(x-\alpha)\partial x}{[y^2+(s-\beta)^2+(x-\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}}\,Q - \frac{y\partial r+s\partial s+(x+m)\partial x}{[y^2+s^2+(x+m)^2]^{\frac{1}{2}}}\,R - p\partial t = \frac{\partial y}{\partial t}\partial\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t}\partial\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\partial\frac{\partial x}{\partial t}$, e quindi integrando nella ipotesi di Q, R costanti avremo $Q[y^2+(s-\beta)^2+(x-\alpha)^2]^{\frac{1}{2}} - R[y^2+s^2+(x+m)^2]^{\frac{1}{2}} - py = \frac{\partial y^2+\partial s^2+\partial x^2}{2\partial t^2} + \text{Cost.}$ Quindi ponendo ω ed r in vece de' respettivi valori e considerando che $\frac{(\partial y^2+\partial s^2+\partial x^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial t}$ è uguale alla velocità con cui si percorre il contemplato elemento della curva, e chiamando v tale celerità avremo

$$v^2 = 2(Q\omega - Rr - py - \text{Cost.})$$

13. Esprimendo R l' azione di una massa nota ed animata dalla gravità potrà sempre prendersi per costante. In oltre nell' ipotesi di Q costante ma ignota quantità, se suppongasi che il centro di gravità di cui si considera il movimento sia per maggior generalità il centro comune di gravità non solo del corpo animale che cammina, ma ancora di un corpo che esso porta in dosso, e che la somma delle due masse cioè dell' animale e del corpo addossatogli sia $=$ M potremo supporre la quantità incognita $Q=\frac{Xp}{M}$ assegnando alla p il valore conosciuto della celerità che si comu-

nica dalla gravità terrestre in un minuto secondo, ed intendendo per X una massa incognita di cui troveremo il valore (e per conseguenza ancora di Q) per mezzo della precedente equazione sostituendovi $\frac{Xp}{M}$ in luogo di Q ed in tal guisa si manifesta l' utilità della cognizione della curva descritta dal centro di gravità giacchè per mezzo di essa viene direttamente a trovarsi la resultante delli sforzi musculari . In fatti la precedente equazione ci somministra $v^2 = 2\left(\frac{Xp}{M}\omega - Rr - py - \text{Cost.}\right)$ ed in conseguenza il valore di X si avrà per M , N ec. E non trattandosi quì che di esporre lo spirito del metodo, faremo $R=0$, cioè svilupperemo il caso più semplice in cui l' animale non tira, ma soltanto cammina caricato di una massa che sommata con la propria si suppone $=$ M il qual caso sarà adunque rappresentato dall' equazione

$$v^2 = 2\left(\frac{Xp}{M}\omega - py + \text{Cost.}\right)$$

14. È facile accorgersi che nel caso della immobilità deve essere $v=0$, $X=M$, $\omega=y$ e perciò $\text{Cost.}=0$. Dunque l' equazione sarà $v^2 = 2\left(\frac{Xp}{M}\omega - py\right)$ cioè $X = \frac{v^2+2py}{2p\omega}M$, onde in qualunque punto si trovi il centro di gravità con una celerità determinata assegnandoli le rispettive coordinate x , s , y e determinando con la cognita costruzione dell' animale che si contempla le α β avremo la direzione della resultante dei suoi sforzi muscolari e per mezzo della quantità X che abbiamo potuto ridurre ad un valore cognito , otterremo ancora generalmente la quantità della resultante medesima , per qualunque dei piccoli archi della curva, relativamente ad ognuno dei quali abbiamo potuto eseguire l' integrazione ed ammettere l' ipotesi di α , β , Q costanti .

15. Possono pertanto con il desiderabile rigore esaurirsi le quistioni relative alle forze impiegate dagli animali portando e tirando senza soggiacere soverchiamente ad ipotesi e tentativi , anco volendo aver riguardo alla forza centrifuga , qualora la cele-

lerità fosse tanto grande da renderla considerabile. La mia formula può ridurre ogni affaticamento dell' animale a paragonarsi in qualunque movimento con la fatica che esso soffre sostenendo immobile una data massa, esperienza molto più facile ad eseguirsi con precisione di quelle alle quali sono state appoggiate simili teorie, e per conseguenza mi pare che possa ottenersi dalla formula stessa un vantaggio significante specialmente combinandovisi la fisica indagine sulla accelerazione del moto del sangue all' aumentarsi della fatica.

16. Si osservi che un caso particolare della presente teoria è quando l' animale agisce verticalmente ad oggetto di sollevare con la propria macchina una data massa ed in questo caso la formula diventa $\frac{v^2}{2} = \frac{X - M}{M} py$, e ponendo in essa $X = P + K$, $M = P + q$, $y = x$, $p = \varphi$ e differenziando diviene $v\,dv = \frac{(K - q\varphi\,dx)}{P + Q}$ formula a cui si appoggia la teoria dell' accademico di Berlino Sig. Lambert esposta con somma sagacità dal celebre Sig. Prony nella sua dottissima Architettura Idraulica.

17. Eleggendo fra tutti i casi nei quali l' integrazione ha luogo quando Q è funzione di z quello che sembra più analogo alle condizioni di un elastro che rappresenti la resultante delle forze muscolari il quale elastro si supponga tanto meno attivo quanto più si distende ed allunga, e perciò supponendo $X = \frac{A}{\omega}$ designando per A una costante da determinarsi con l' esperienza, avremo integrando un' altra espressione feconda non meno di conseguenze adattabili alla pratica.

18. Osservo finalmente che sebbene l' equazione del precedente §. 12 non appartenga al caso delle tirelle di un qualunque carriaggio, e sebbene l' equazione relativa a tale questione si recusi all' integrazione si potrà facilmente supplire al secondo caso mediante il primo, riducendo il calcolo di ogni punto della curva di questo ad un corrispondente di quello, ovvero considerando tutta la resistenza riunita nel centro di gravità tenendo a

calcolo l' influenza che l' inclinazione delle tirelle ha nella intensità degli attriti e nella mobilità , e per conseguenza nella massa che per tale articolo si considera riunita nel predetto centro di gravità .

§. 19. Qualora non mi sia ingannato nella dettagliata applicazione che quì tralascio di queste formule per illustrare la dottrina delle forze animali , credo che potrei asserire che esse somministreranno maggior facilità e precisione di quelle fino ad ora poste in uso e che i resultati e le tavole calcolate per varie inclinazioni di terreno potranno ottenersi indipendentemente da tante costanti che l' esperienza non sempre è fida nel somministrare . Per esempio la formula $X = \frac{v^2 + 2py}{2p\omega} M$ che in tutti i casi nei quali v' è così piccola da rendere $v^2 + 2py < 2p\omega$ dimostra sempre $X < M$, fa dunque conoscere a colpo d' occhio per qual ragione un Uomo che per un dato tempo passeggi lentamente si affatichi talora assai meno di quello che avrebbe fatto stando fermo in piedi per egual tempo , effetto attribuito a cause che non credo sufficienti . In fatto per spiegare tale fenomeno si disse da alcuno che varii dei muscoli i quali sostengono l' uomo fermo in piedi si riposano alternativamente, e si affaticano mentre esso cammina . Ma siccome nel moto mentre altri muscoli si riposano , quelli che operano si affaticano più di quello che facevano nella quiete , e siccome è il vigore animale che va preso di mira coerentemente al mio principio , così tale spiegazione mi pare che resti tanto dubbiosa quanto evidente è quella indicata dalla precedente formula per cui si deduce che il vigore animale nel caso della quiete distrugge tutta la azione che esercita la gravità sopra la macchina dell' animale, mentre non ne distrugge che una parte nel caso del moto e perciò dee perdersene più nel primo caso che nel secondo : Così si rettifica l' erronea intelligenza che potrebbe nascere dalla relativa teoria del Borelli mentre quando la celerità eccede il limite sopradescritto l' affaticamento dei muscoli mentre l' uomo cammina è maggiore di quando sta fermo . Di maniera che il calcolo in tal guisa condurrebbe a determinare quanto sia minore di quello che si crederebbe la forza che si porta in un posto per esempio con cinque mila uomini per la perdita fattane con la celerità della marcia: prescindendo dagli elementi morali che non possono calcolarsi se non dalla sagacità del condottiero.

SOPRA LA TASTATURA
DEGLI ORGANI E DEI CEMBALI
MEMORIA
Del Sig. Giambatista Dall' Olio

Presentata il dì 23 Giugno 1806

DAL P. D. POMPILIO POZZETTI.

Nella tastatura dell' organo, comune al cembalo, al piano forte, e alla spinetta, si possono considerare due oggetti: cioè, il numero de' tasti che compongono l' Ottava (1), e la distribuzione materiale de' medesimi.

In quanto al numero de' tasti dell' Ottava, questo è già stato fissato invariabilmente a dodici: e se ad essi si unisca l'ottava, cioè quel tasto che col primo forma l' intervallo dell' ottava, sono tredici. Ciò è una necessaria conseguenza dell' essersi stabiliti in numero di tredici i suoni componenti l' Ottava negl' istromenti d' accordatura affatto stabile, come il liuto, la tiorba, la chitarra, il salterio, ed altri, per le ragioni da me accennate altrove (2). Non è lo stesso negl' istromenti che non hanno tutti i suoni stabili, come il violino, la viola, il violoncello, e il contrabasso, i quali non hanno nel manico le spartizioni che fissano inalterabilmente i suoni, come vedesi nel liuto, nel mandolino, nella mandola. La mancanza di tali spartizioni fa che il Sonatore possa trarre dal suo istromento quel grado di suono che più gli piace premendo le corde coi diti sul manico più o meno verso lo scranello, o più o meno indietro, per adattarsi a quella specie di temperamento (3), che il suo istromento ammette di necessità assoluta. Egli non è costretto a stare nella divisione dell' Ottava in dodici suoni soltanto, ma ha il comodo di praticarne in maggior numero secondo il bisogno, e in proporzione della sua intonazione. Eseguendo, per esempio, il Sonatore le note *UT MI*, *MI SOL* diesis, e *SOL* diesis *ut*, che formano tre terze maggiori, le eseguisce in modo che il secondo *ut* forma ottava giusta coll' *UT* primo. Ciò posto per indubitabile (come lo è senza la minima eccezione, e come conosce troppo bene qualunque Sonatore di buon orecchio) conviene che almeno una delle dette terze sia debole, che è quanto dire che cali. Quello che dico di tre terze maggiori lo posso dir anche di altri intervalli, colla differenza che altri debbon essere deboli, e altri forti, cioè altri debbono calare, altri crescere: così in quattro terze minori, *UT MI* bimolle, *MI* bimolle *SOL* bimolle, *SOL* bimolle *LA*, e *LA ut*, quest' ultimo *ut* deve crescere. Se un Sonator di violino volesse eseguir perfetti gl' intervalli tutti, dovrebbe divider l' Ottava in più di sessanta suoni.

---

(1) La voce *Ottava* ha due significati. Ora denota la serie dei sette suoni componenti una sezione della scala musicale con di più il primo della sezione o antecedente o seguente, alla stessa maniera che *Ottavario* significa la serie di sette giorni continui d' una settimana con di più il primo d' un' altra: ora indica l'intervallo di ottava, come un lunedì forma ottava con un altro lunedì. Nel primo caso mi servo della voce *Ottava* con l' *O* majuscolo: nel secondo di *ottava* con l' *o* minuscolo.

(2) Nella Memoria *Sull' applicazione della Matematica alla Musica* inserita nel tomo X delle Memorie della Società Italiana delle Scienze.

In sessanta suoni appunto erano divise le Ottave di quel cembalo che cent' anni sono si trovava in Firenze presso il Maestro di cappella Casini (4). Ognuno dei dodici suoni componenti l' Ottava era diviso in cinque, cosicchè v' erano cinque interi ordini di tasti l' uno sopra l' altro gradatamente, ma non sappiamo come fossero disposti. Qualunque però ne fosse l' ordine, è in-

---

(3) Quale sia il senso tecnico della parola *temperamento* si trova nella citata mia Memoria.

(4) Giornale de' Letterati d' Italia. Tomo V pag. 157.

innegabile che la tastatura di simili istromenti, ne' quali le Ottave sono divise in più di dodici tasti, non possono servire assolutamente ad alcun uso pratico. I tentativi fatti antecedentemente da Giambatista Doni, da Niccolò Vicentini, da Galeazzo Sabbatini, appena nati caddero in una profonda obblivione, e seppur ce n' è restata memoria, siam di questa debitori al Kircher (5). L' inutilità d' un' ulterior divisione di suoni delle Ottave al di là di dodici procede non tanto dalla difficoltà somma di *digitare* (6) in composizioni di veloce esecuzione, quanto ancora alla mancanza di caratteri musicali atti ad esprimer in carta le diverse divisioni di suoni. In oltre questi caratteri non potrebbero servire che per gl' istromenti che avessero tali divisioni di tasti, cosicchè, dove in un sistema ben regolato di musica la scrittura debb' esser una sola per tutti, quì sarebbe forza introdurre una diversità che porterebbe la confusione e il disordine nell' esecuzion della musica. Il violino (7) non ha bisogno di tale divisione, perchè ogni meschino Sonatore sa per principio di scuola e per sistema d' esecuzione come deve portar la mano nelle diverse modulazioni di tuoni. Sa per esempio che sebbene in carta si scriva col medesimo carattere l' *ut* che forma terza minore col *la* (corda mezzana del violino) e l' *ut* che forma quinta col sottoposto *fa*, pure il portamento della mano nel tuono di *la* minore, diverso da quello del tuono di *fa*, produce che il suono di *ut*, sebbene scritto con un medesimo carattere, tuttavolta in pratica riesce eseguito con una piccola variazione. Questa piccola variazione per altro non è totalmente la stessa in tutti i Sonatori, qualora non sieno della medesima Scuola, giacchè come altrove indicai (8) gl' intervalli musicali non sono in pratica tutti simili a rigor matematico, anzi le cotanto decantate proporzioni musicali sono in pratica un vero sogno per non dire un manifesto delirio, che non impone che agl' ignari di musica. La ciarlataneria letteraria ha preso piede in questa parte in grazia che il volgo de' letterati leggitori non ha nessun esercizio di musica, e che que' pochissimi scienziati che n' hanno alcun poco ridono in silenzio nel loro gabinetto sulle ciance di que' matematici i quali proferiscono decreti oziosi affatto e vani. Il voler assoggettar il musico alle proporzioni musicali sarebbe lo stesso che pretendere che un pittore nel combinare i colori facesse uso delle teorie di Newton, e che un cuoco per ben condizionare le vivande dovesse esser istrutto de' principii chimici di Brugnatelli.

---

(5) *Musurgia Universalis*. Tomo I pag. 456 e seguenti.

(6) Mi si permetta d' inventar quì una voce che manca alla nostra lingua. Chiamo *digitare* l' arte di combinar l' uso or d' uno or d' altro dei cinque diti della mano in modo che riesca facile l' esecuzione sia delle sonate d' intavolatura, sia de' bassi d' accompagnamento.

(7) Lo stesso dicasi degli altri istromenti di simile natura, cioè della viola, del violoncello, e del contrabasso.

(8) Nell' accennata memoria *Sull' applicazione della Matematica alla Musica*.

L' Ottava dunque negli organi e nei cembali non debb'essere divisa nè in più nè in meno di dodici tasti: e siccome la più estesa serie de' suoni impiegati oggigiorno nel contrappunto è composta di cinque Ottave, così i tasti saranno sessanta, anzi sessantuno in grazia della giunta d' un tasto per compimento della modulazione, come vedesi nella figura AA (9). Sono essi disposti in due serie; le quali, per farmi meglio intendere, chiamerò serie di tasti lunghi, e serie di tasti corti, quelli per eleganza di lavoro costrutti d' ebano, e questi d' avorio (10). Codesta disposizione di tasti è soggetta a diversi inconvenienti, che io trovo potersi pienamente evitare col sostituire alla tastatura AA l' altra che nella figura vedesi marcata BB, con due ordini o serie di tasti anch' essa, lunghi e corti, d'ebano e d' avorio di sei in sei alternativamente. Il due colori di tasti nella comunal tastatura AA ser-

---

(9) Gli organi e i cembali di vecchia fabbricazione sono composti di solo quattro Ottave CC: talun anche di quattro e mezzo CD. Alcuni Moderni hanno la giunta d' altra mezza Ottava di suoni sopracutissimi, cosicchè sono di cinque Ottave e mezzo.

(10) In alcuni cembali per altro si vedono d' avorio i tasti lunghi, e d' ebano i corti: ciò però non produce veruna conseguenza. Si noti pure che dove oggi si adopra l' ebano, anticamente s' adoprava il bosso.

servono soltanto all' eleganza e al diletto dell' occhio, dovecchè nella nuova tastatura BB sono una necessità per poter distinguere un tasto dall' altro con una semplice occhiata, la qual cosa non si potrebbe ottenere se le due serie fossero tutte e due d' un sol colore, o l' una fosse tutta d' un colore, e l' altra tutta d' un altro.

Che vantaggio dunque risulta dal cambiamento della tastatura AA nella tastatura BB?

I. Il difetto principale della comunal tastatura è che per esser la medesima ordinata sul solo tuono di *UT* maggiore, conviene che il Sonatore studii, e si assuefaccia in *digitare* in ventiquattro diverse maniere, essendo dodici i tuoni maggiori, ed altrettanti i tuoni minori, de' quali è suscettibile la moderna musica: dico la *moderna musica*, perchè dopocchè il padre della musica istrumentale Haydn ha schiusa una ricchissima miniera di combinazioni armoniche, se non ignote almeno inusitate cinquant' anni sono, si è dovuto istituire uno studio particolare sull' uso alterno dei diti per l' esecuzione, altrimenti non si effettua. La nuova tastatura, non essendo ordinata sopra verun tuono particolare, ricerca che s'imparino due sole maniere di *digitare* una cioè per i tuoni maggiori, e l' altra per i minori. Da ciò ne risulta che dove per esempio occorrono mesi ventiquattro per imparare a *digitare* nella comunal tastatura i ventiquattro tuoni (dodici maggiori e dodici minori) nella nuova bastano due, giacchè una sola *digitatura* basta per tutti i dodici tuoni maggiori, ed un' altra per tutti i dodici minori.

II. Nella comunal tastatura l' apertura dei diti non è la stessa in tutti i medesimi intervalli. Per esempio nell' eseguire la sesta maggiore *UT LA*, l'apertura (11) dei diti è minore di quella che occorre per eseguire la sesta maggiore *MI ut* diesis: così pure è minore quell' apertura di diti che occorre per eseguire la terza maggiore *UT MI*, di quella che occorre per la terza maggiore *MI SOL* diesis. Nella nuova tastatura gl' intervalli tutti portano costantemente una rispettiva medesima apertura di diti, e perciò tanto più presto se ne acquista l' abitudine.

---

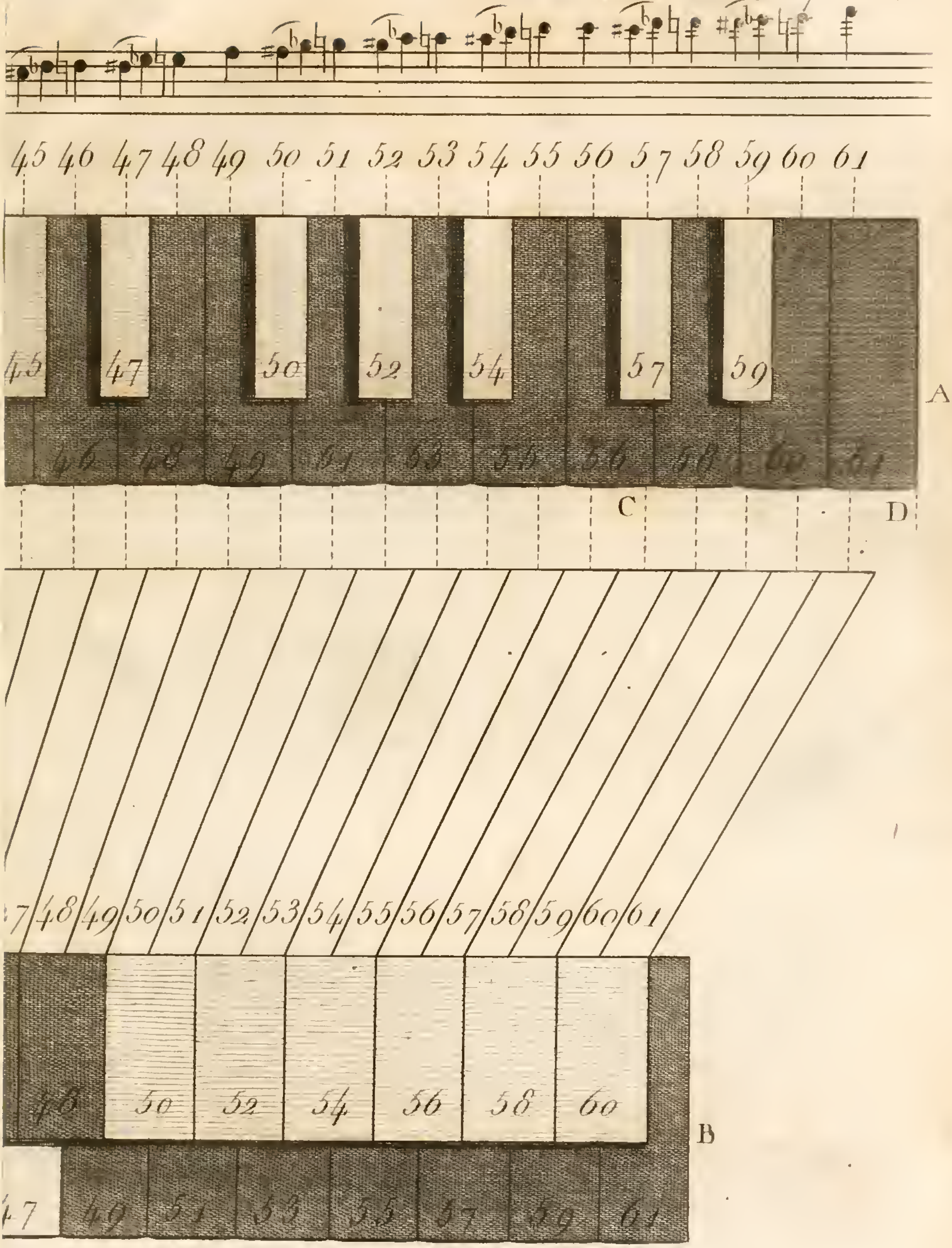
(11) Dico *apertura* con una specie d' improprietà per evitare la pedanteria di dire *angolo più acuto o meno acuto*, che fanno i diti fra di essi nella loro radice.

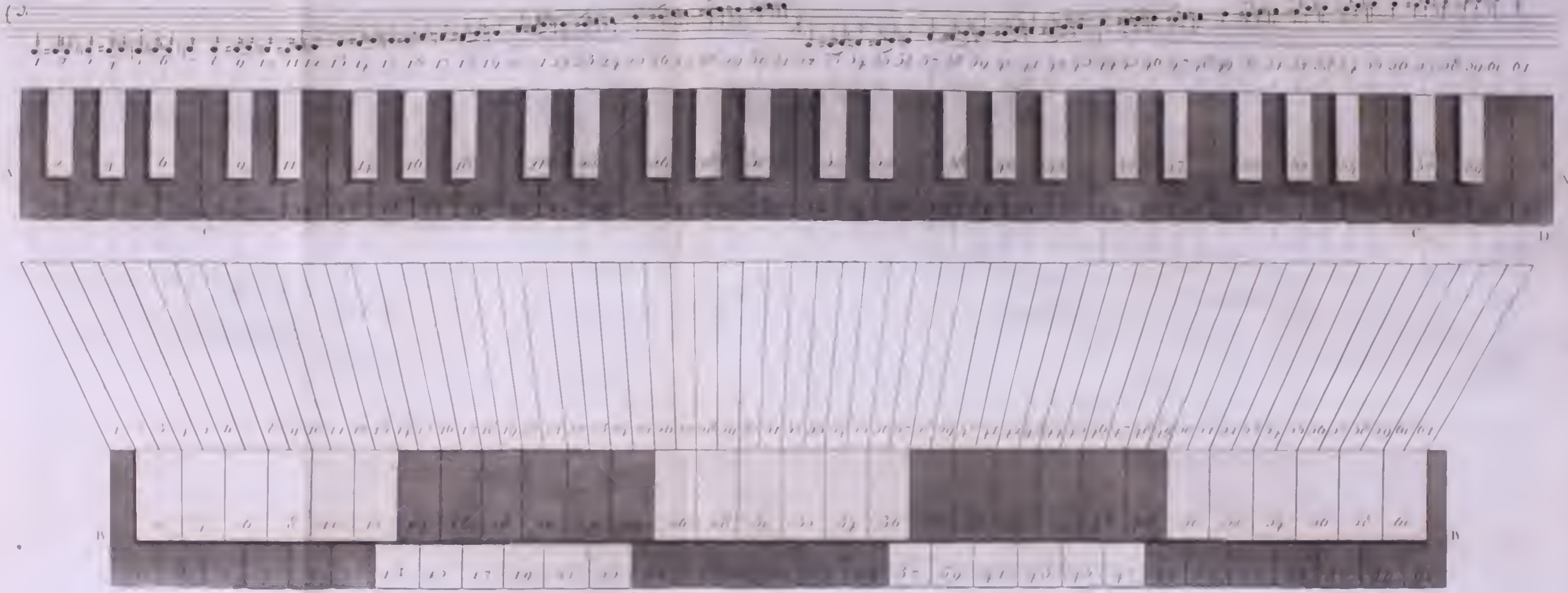
III. I tasti che nella comunal tastatura servono per gli accidenti sono più stretti degli altri, e perciò conviene acquistar la pratica di toccarli in modo, che il dito non iscorra fra il vacuo interposto fra l' uno e l'altro. Ciò non accade nella nuova tastatura, perchè non vi sono vacui da evitare.

IV. Nella comunal tastatura per eseguir l' ottava l' apertura della mano abbraccia otto tasti, nella nuova ne abbraccia soli sette; ciò agevola non poco la difficoltà che spesso s' incontra nelle composizioni di alcuni autori, nelle quali si trovano de' passi, la cui spedita esecuzione richiede una mano grande. Diminuito il bisogno d'una grande apertura di mano basta una mediocre nella nuova tastatura.

V. Finalmente nella comunal tastatura il portamento della mano è sempre incerto, dovecchè nella nuova riesce regolare e suscettibile di precetti stabili.

Parran, Souhaiti, Sauveur, Dumas, e Rousseau osservando che i caratteri, de' quali si fa uso nello scrivere la musica, hanno de' gran difetti, tentarono di sostituirvene de' nuovi. *Ma siccome nel fondo* (dice Rousseau nel Dizionario di Musica alla voce *Caractéres de Musique*) *tutti questi sistemi, nel correggere de' difetti antichi ai quali siamo assuefatti, non facevano che sostituirvene altri, dei quali ci resterebbe a prender l' abitudine, il Pubblico ha operato saviamente lasciando le cose come sono, e mandando noi e i nostri sistemi nel paese delle vane speculazioni.* Esaminando con mente scevera da prevenzione la nuova tastatura, sembrami che se le possa bensì opporre che ci resterebbe a prenderne l' abitudine, ma non già che a' difetti antichi se ne sostituiscano de' nuovi: e che perciò non meriti la proscrizione che Rousseau diede ai nuovi caratteri di musica. Ad ogni modo se ne può tentar la pruova: e già mio Figlio, al quale si debbe il merito dell' invenzione di questa nuova tastatura, e che alla teoria della musica unisce pure una pratica non ordinaria, stà assistendo un fabbricatore d' istromenti musicali onde riduca un piano forte suscettibile dell' una e dell' altra tastatura da cambiarsi a piacimento. Facendosi uso o dell' una o dell'altra, si potrà vedere in atto pratico, se questa invenzione meriti d' essere abbracciata.


45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61
A
C
D
48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61
B


A
C
C
D
B
B

SULL' INTEGRAZIONE DI UN NUOVO CANONE D'EQUAZIONI DIFFERENZIALI D'ORDINE ALTO

MEMORIA

DEL SIG. FRANCESCO CARDINALI

Presentata il dì 27 Giugno 1806

DAL SIG. CANONICO GIROLAMO SALADINI.

Quella parte di calcolo integrale, che si aggira sulla integrazione e costruzione delle equazioni differenziali, comechè promossa e trattata con infaticabile zelo e con profonda sagacità dai Bernoulli (1), Manfredi (2), Fagnani (3), Ermanno, Goldbac, Eulero, Lagrange (4), Riccati (5), Saladini (6); trasandata poi per alcun tempo, ha lasciato desiderio di sè per la immensità delle cose che restano a farsi dai suoi coltivatori, onde scortarla a qualche grado di avanzamento. Gravi ostacoli a vero dire, si affacciano nella separazione delle indeterminate, nello scoprire l'opportuno moltiplicatore, e nello scegliere le curve algebraiche di facile descrizione, le cui aree, o i loro archi rappresentino gl' integrali ricercati. Non veggo però che per sì fatte difficoltà si debba lasciare in non cale un ramo di analisi, nel quale i passi che si danno sono indivisibilmente diretti dalla certezza, dall' evidenza, dall' eleganza, lo che non so se possa dirsi, con buona fede accadere quando senza altra guida c' innoltriamo in un pelago di calcoli affidati al solo barlume di una sempre vacillante, ed inferma metafisica. Reputo supervacaneo il tesser quì storie comprobanti una verità troppo di per sè manifesta, tanto più che a ciò non mira la presente Memoria, il cui scopo uno si è quello di esporre certa nuova classe di equazioni differenziali d' ordine alto che compiutamente vengano integrate mediante la separazione delle variabili (7). Se ad altro non recherà giovamento questo esiguo lavoro, servirà s' io mal non m' appongo, a corredare di nuovi casi le Tavole dell' equazioni integrate, Tavole che pur dovrebbonsi compilare ad incremento, ed onore delle scienze esatte, giusta la sentenza, e il consiglio dell' esimio filosofo Condorcet, consegnato alla parte seconda del suo Calcolo integrale alla sezione seconda nelle seguenti parole ,, *la construction de ces Tables poussées même assez loin exigeroit plus de connoissances que celle des Tables des Logarithmes, mais moins de travail, seroit incomparablement plus utile, & feroit infiniment plus d' honneur à ceux qui exêcuteroient ce projet.*

---

(1) Vedi Opere di Giacomo, e Giovanni Bernoulli.

(2) Manfredi *De constructione equat. differentialium primi gradus*.

(3) Fagnani, Produzioni Matematiche.

(4) Comm. di Pietroburgo, Memorie di Berlino, e Miscell. di Torino.

(5) Opere di Giacomo, e Vincenzo Riccati.

(6) Comm. dell' Istituto di Bologna.

Sia primieramente l' equazione di terz' ordine della forma $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + M \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M' \frac{\partial y}{\partial x} = 0$, nella quale M esprime una funzione qualunque della x, ed M' la derivata di questa funzione. Facciamo $\frac{\partial y}{\partial x} = u$, ed avremo sostituendo $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M \frac{\partial u}{\partial x} + M'u = 0$, equazione lineare di second' ordine per rapporto alla variabile u. Per integrare quest' equazione faccio al solito $\frac{\partial u}{\partial x} = p$, $\frac{\partial \partial u}{\partial x^2} = q$;

---

(7) Si consulti l' eccellente Opera: Instituzioni Analitiche di Vincenzo Riccati, e Girolamo Saladini, (Tomo II Vol. 3 pag. 624): dove si scorgerà che un tal ramo di equazioni non era stato al tempo loro da alcuno generalmente integrato. Per quanti Autori poi io m' abbia riscontrati che trattarono in seguito di tali materie non mi è venuto fatto di rinvenir traccia di ciò che mi propongo in questa Memoria.

fatte le sostituzioni avremo, dopo d'aver diviso per ∂x^2, $q+Mp+M'u=0$. Ponghiamo $pu=uz$, e $q=ut$, si avrà sostituendo in luogo di p, e q questi valori, $t+Mz+M'=0$: ma $\partial u=p\partial x=uz\partial x$, e $\partial p=u\partial z+z\partial u=ut\partial x$; dunque si ricava $\frac{\partial u}{u}=\frac{t\partial x-\partial z}{z}=z\partial x$, e $\partial t+z^2\partial x=t\partial x$. Sostituendo in quest' equazione il valore di $t=-Mz-M'$, otterremo il quadrinomio differenziale di prim' ordine $\partial z+z^2\partial x+zM\partial x+M'\partial x=0$.

Il metodo per integrare simil sorta di quadrinomj già l'abbiamo dato in un Opuscolo intitolato ,, Metodo di separazione nell' equazioni differenziali di prim' ordine ec. ,, stampato l'anno scorso in Bologna. Consiste questo in fare $z=\log.\alpha+\log\beta$, essendo α, e β due nuove indeterminate da determinarsi. Fatte le sostituzioni si troverà $\frac{\partial\alpha}{\alpha}+\frac{\partial\beta}{\beta}+(\log.\alpha+\log.\beta)^2\partial x+(\log.\alpha+\log.\beta)M\partial x+M'\partial x=0$, equazione che si spezza nelle due $\frac{\partial\beta}{\beta}=-M'\partial x$, e $\frac{\partial\alpha}{\alpha}+(\log.\alpha+\log.\beta)^2\partial x+(\log.\alpha+\log.\beta)M\partial x=0$; dalla prima si ricava $\log.\beta=-\int M'\partial x=-M$, essendo $M'\partial x$ la differenziale di M, sostituito questo valore nella seconda si avrà $\frac{\partial\alpha}{\alpha}+(\log.\alpha)^2\partial x=M\log.\alpha\partial x$, equazione che si integra fatto $\log.\alpha=\frac{\pi}{\log.\theta}$, π e θ sono due nuove indeterminate da determinarsi. Sostituendo invece di $\log.\alpha$, e $\frac{\partial\alpha}{\alpha}$ i suoi valori si vedrà che l'equazione si può spezzare in due mediante le quali si determineranno π, e θ in funzione di x; e si troverà poi, che l'integrale dell'equazione sarà $\log.\alpha=\frac{e^{\int M\partial x}}{\int e^{\int M\partial x}.\partial x}$. Ma si è supposto $z=\log.\alpha+\log.\beta$, dunque sostituendo avremo

$$z=\frac{e^{\int M\partial x}}{\int e^{\int M\partial x}.\partial x}-M+A,$$

che sarà l'integrale completo del

quadrinomio cercato. Chiamando per più semplicità W il valore trovato di z, si avrà, fatte le sostituzioni $u = Be^{\int W \partial x}$ per integrale dell' equazione di second' ordine, e infine sarà l' integrale dell' equazione di terzo ordine $y = \int Be^{\int W \partial x} \, . \, \partial x + C$. Le quantità A, B, e C sono le tre costanti introdotte dall' integrazioni.

Vediamo un caso particolare, e prendiamo l' equazione finale $n \partial y \partial x + nx \partial \partial y + y \partial x^2 = 0$, a cui Daniele Bernoulli nella Memoria (8) *de oscillationibus corporum filo flexili connexorum, & catenae verticaliter suspensae*, giunge senza poterne cavare l' integrale finito. Se si suppone n funzione di x, ed eguale a $- \frac{x}{2}$, allora in tale ipotesi si potrà avere l' integrale dell' equazione. Infatti differenziando e riducendo avremo l'equazione $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{3 \partial \partial y}{x \partial x^2} - \frac{3 \partial y}{x^2 \partial x} = 0$ che è della forma stessa della già trattata. Posto $M = \frac{3}{x}$, ed $M' = - \frac{3}{x^2}$, avremo $z = \frac{x^4 - 12A}{x(x^4 + 4A)}$; e quindi l' integrale dell' equazione di second' ordine sarà

$$u = Be^{\int \frac{(x^4 - 12A)}{x(x^4 + 4A)} \partial x},$$

e quello dell' equazione di terzo ordine

$$y = \int Be^{\int \frac{(x^4 - 12A)}{x(x^4 + 4A)} \partial x} \, . \, \partial x + C.$$

Sia in secondo luogo l' equazione di quart' ordine della forma $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + M \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + M' \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, essendo M ed M' come sopra. Fatto $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u$, avremo sostituendo l' equazione di second'ordine $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M \frac{\partial u}{\partial x} + M'u = 0$, che già sappiamo integrare. Preso l' intetegrale, e sostituito si avrà $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Be^{\int W \partial x}$, ed integrando $\frac{\partial y}{\partial x} = \int Be^{\int W \partial x}.\, \partial x + C$; finalmente $y = \int \partial x \int Bx^{\int W \partial x}.\, \partial x + Cx + D$, integrale finito della proposta.

---

(8) Primi Comm. di Pietroburgo Tomo VII.

Sia in terzo luogo l' equazione $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + M \frac{\partial^4 y}{\partial x^5} + M' \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$. Posto in quest' equazione $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = u$, e fatte le sostituzioni si troverebbe l' equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M \frac{\partial u}{\partial x} + M' u = 0$, di cui già sappiamo trovarne l' integrale. Sostituito questo valore si vedrà che l' equazione proposta ha per integrale finito

$$y = \int \partial x \int \partial x \int Be^{\int W \partial x}.\, \partial x + \frac{Cx^2}{2} + Dx + E.$$

In generale si vede che il medesimo artifizio serve per l' equazione $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + M \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + M' \frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} = 0$, nella quale fatto $\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} = u$, e sostituendo si troverà la solita equazione di second' ordine $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M \frac{\partial u}{\partial x} + M' u = 0$. Preso l' integrale di questa, e sostituito si avrà $\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} = Be^{\int W \partial x}$. Eseguendo $n-2$ integrazioni si giungerà ad ottenere l' integrale finito dell' equazione dell' ordine n.

Frattanto possiamo osservare che tutte le equazioni trattate di terzo, quarto, quinto, ec. fino all' ordine n si riducono all' equazione lineare di second' ordine $\frac{\partial \partial u}{\partial x^2} + M \frac{\partial u}{\partial x} + M' u = 0$; e che per integrare generalmente questa equazione è necessario che il coefficiente di u sia la funzione derivata del coefficiente di $\frac{\partial u}{\partial x}$, il quale può essere una funzione qualunque dell' altra variabile dell' equazione. Osservazione che mi pare importante, trattandosi che molte volte si incontrano equazioni di tal natura; o che facilmente si ponno ridurre ad avere la forma richiesta, previa una qualche operazione.

In fatti la celebre equazione $x^2(a+bx^n)\partial^2y+x(c+ex^n)\partial y\partial x+(f+gx^n)y\partial x^2=0$ tanto trattata dai Geometri; sarà questa integrabile in termini finiti se $\frac{(f+gx^n)\partial x}{x^2(a+bx^n)}=\partial\cdot\frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right)=\left[\frac{((n-1)ae-(n+1)bc)x^n-ac-bex^{2n}}{x^2(a+bx^n)^2}\right]\partial x$.

Dunque l' equazione proposta per questo cangiamento diverrà della forma $x^2(a+bx^n)\partial^2y+x(c+ex^n)\partial y\partial x+\left[\frac{((n-1)ae-(n+1)bc)x^n-ac-bex^{2n}}{a+bx^n}\right]y\partial x^n=0$, ossia riducendola alla forma della nostra equazione di second' ordine si avrà

$$\frac{\partial^2y}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right)\frac{\partial y}{\partial x}+\left[\frac{((n-1)ae-(n+1)bc)x^n-ac-bex^{2n}}{x^2(a+bx^n)^2}\right]y=0.$$

Trattata quest' equazione come sopra si giungerà al quadrinomio $\partial z+z^2\partial x+\frac{1}{x}\left(\frac{c+cx^n}{a+bx^n}\right)z\partial x+\left[\frac{((n-1)a-(n+1)be)x^n-ac-bcx^{2n}}{x^2(a+bx^n)^2}\right]\partial x=0$, il di cui integrale è $z\int e^{\int\frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right)\partial x}\cdot\partial x=e^{\int\frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right)\partial x}$

$$-\frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right)\int e^{\int\frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right)\partial x}\cdot\partial x+A\int e^{\int\frac{1}{x}\left(\frac{c+ex^n}{a+bx^n}\right)\partial x}\cdot\partial x$$

Chiamato il valore di z per più semplicità W avremo per integrale dell' equazione di second' ordine $y=Be^{\int W\partial x}$. Determinando opportunamente le costanti, a, b, c, ed e si troveranno delle belle equazioni non mai fin quì da alcuno integrate; moltissime delle quali servono per isciogliere ancora dei Problemi Geometrici, e Fisici di qualche utilità.

Sia per un caso particolare l'equazione $x^2(1-x^2)\partial^2y-x(1+x^2)\partial y\partial x+x^2y\partial x^2=0$ portata da Cousin nel suo calcolo differenziale, ed integrale, parte seconda pag. 73. Si avrà confrontando questa con la generale $a=1$, $b=-1$, $c=-1$, $e=-1$, $f=0$, $g=1$, $n=2$; e l' integrale del quadrinomio si ridurrà a

$$z\int e^{-\int\frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\partial x}.\,\partial x = e^{-\int\frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)dx} + \left[\frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)+\mathrm{A}\right]$$

$\int e^{-\int\frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\partial x}.\,\partial x$. Quindi quello dell'equazione di second' ordine sarà $y = \mathrm{B}e^{\int \mathrm{W}\partial x}$ essendo $\mathrm{W} = \dfrac{e^{-\int\frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\partial x}}{\int e^{\int\frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\partial x}\,\partial x}. + \frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)+\mathrm{A}$.

Similmente l' equazione molto più generale $x^m(a+bx^\alpha)^n\partial\partial y + x^p(c+ex^\beta)^q\,\partial y\,\partial x + x^r(f+gx^\nu)^s y\partial x^2 = 0$ sarà integrabile se $x^{r-m}\dfrac{(f+gx^\nu)^s}{(a+bx^\alpha)^n}\partial x = \partial\,.\,x^{p-m}\dfrac{(c+ex^\beta)^q}{(a+bx^\alpha)^n} = \Big[(p-m)+ q\beta e\,(c+ex^\beta)^{-1}.\,x^\beta - n\alpha b\,(a+bx^\alpha)^{-1}.\,x^\alpha\Big]\,x^{p-m-1}\dfrac{(c+ex^\beta)^q}{(a+bx^\alpha)^n}\partial x$:

Quindi la nostra equazione prenderà la forma $\dfrac{\partial\partial y}{\partial x^2} + x^{p-m}.\dfrac{(c+ex^\beta)^q}{(a+bx^\alpha)^n}.\dfrac{\partial y}{\partial x}$

$$+\Big[(p-m)+q\beta e(c+ex^\beta)^{-1}.\,x^\beta - n\alpha b(a+bx^\alpha)^{-1}.\,x^\alpha\Big]\times$$

$x^{p-m-1}.\dfrac{(c+ex^\beta)^q}{(a+bx^\alpha)^n}y = 0$. Fatte le solite operazioni si troverà il quadrinomio $\partial z + z^2\partial x + z\,\dfrac{(c+ex^\beta)^q}{(a+bx^\alpha)^n}.\,x^{p-m}.\,\partial x + \Big[(p-m)+q\beta e(c+ex^\beta)^{-1}x^\beta - n\alpha b(a+bx^\alpha)^{-1}.x^\alpha\Big] \times x^{p-m-1}\dfrac{(c+ex^\beta)^q}{(a+bx^\alpha)^n}.\,\partial x = 0$, il di cui integrale è

$$z\int e^{\int\frac{(c+ex^{\beta})^{q}}{(a+bx^{\alpha})^{n}}\cdot x^{p-m}\cdot\partial x}\cdot\partial x=e^{\int\frac{(c+ex^{\beta})^{q}}{(a+bx^{\alpha})^{n}}\cdot x^{p-m}\cdot\partial x}+$$

$$\left[A-\frac{(c+ex^{\beta})^{q}}{(a+bx^{\alpha})^{n}}\cdot x^{p-m}\right]\cdot\int e^{\int\frac{(c+ex^{\beta})^{q}}{(a+bx^{\alpha})^{n}}\,x^{p-m}\cdot\partial x}\cdot\partial x\,.$$

Chiamato P il valore di z, e sostituito questo avremo $y=\mathrm{B}\,e^{\int \mathrm{P}\partial x}$, che sarà l' integrale finito della proposta equazione di secondo ordine.

Osservazioni simili a quelle fatte per l'equazioni di second' ordine $\frac{\partial\partial u}{dx^2}+\mathrm{M}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{M}'u=0$, dobbiamo fare per il generale quadrinomio $\partial z+z^2\partial x+z\mathrm{P}\partial x+\mathrm{Q}\partial x=0$, essendo P, e Q due funzioni qualunque della x. Questo sarà generalmente integrabile in termini finiti se $\mathrm{Q}\partial x$ sarà la differenziale di P.

Si abbia l' equazione $\partial z+z^2\partial x+z\,(ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\text{ec.})\,\partial x+(max^{m-1}+(m-1)bx^{m-2}+c(m-3)x^{m-3}+\text{ec.})\,\partial x=0$, avendo questa le condizioni richieste sarà completamente integrabile; ed usate le posizioni come sopra si troverà che

$$z=\frac{e^{\int(ax^{m}+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\text{ec.})\,\partial x}}{\int e^{\int(ax^{m}+bx^{m-1}+cz^{m-2}+\text{ec.})\,\partial x}\cdot\partial x}-(xa^{m}+bx^{m-1}+cx^{m-2}\ \text{ec.})+\mathrm{C},\ \text{ossia}$$

$$z\int e^{\left(\frac{ax^{m+1}}{m+1}+\frac{bx^{m}}{m}+\text{ec.}\right)}\cdot\partial x=e^{\left(\frac{ax^{m+1}}{m+1}+\frac{bx^{m}}{m}+\text{ec.}\right)}+$$

$$\left[\mathrm{C}-\left(ax^{m}+bx^{m-1}+bx^{m-2}+\text{ec.}\right)\right]\cdot\int e^{\left(\frac{ax^{m+1}}{m+1}+\frac{bx^{m}}{m}+\text{ec.}\right)}\cdot\partial x$$

integrale cercato.

Sia l' equazione $\partial z + z^2 \partial x + az \,\text{sen.}x \log.x \,\partial x + a\left(\frac{\text{sen.}x}{x} - \text{Cos.}\,x \log.\,x\right)\partial x = 0$ questa sarà integrabile, perchè $a\left(\frac{\text{sen.}\,x}{x} - \text{Cos.}\,x \log.\,x\right)\partial x = \partial\, a \,\text{sen.}x.\log.x$. Trattata quest' equazione come sopra si arriverà all' integrale completo

$$y = \frac{e^{a\int \text{Sen.}x \log.x \partial x}}{\int e^{a\int \text{Sen.}x \log x \partial x}} + \text{C} - a \,\text{sen.}\,x \log.\,x.$$

Proposta finalmente l' equazione $\partial z + z^2 \partial x + byx^m e^{nx} \partial x + b\left(\frac{m}{x} + n\right) x^m . e^{nx} . \partial x = 0$, che sarà pure integrabile per essere $b\left(\frac{m}{x} + n\right) x^m e^{nx} \partial x$ la differenziale di $bx^m . e^{nx}$; e si troverà che l' integrale è $y \int e^{b\int x^m . e^{nx} . \partial x} . \partial x = e^{b\int x^m . e^{nx} . \partial x} - \left(bx^m e^{nx} - \text{C}\right) \int e^{b\int x^m . e^{nx} . \partial x} . \partial x.$

Potrei moltiplicare gli esempj, ed integrare completàmente moltissime equazioni differenziali, che i celebri Goldbac, e Nicola Bernoulli integrano sotto certe condizioni degli esponenti ec., nei Commentarj Antichi di Pietroburgo. Ma non avendosi quì per iscopo di dare delle Tavole d' equazioni integrate, così porrò fine alla presente Memoria, contento d' avere presentata una nuova classe di equazioni, che se ad altro, come dissi, non potrà servire, gioverà ad arricchire le Tavole sopra dichiarate.

TENTATIVI

PER INVESTIGARE LA CELERITA' DELL' ACQUE CORRENTI

Del Sig. Francesco Focacci

Presentati il dì 21 Agosto 1806

DAL SIG. VITTORIO FOSSOMBRONI.

§. 1. Li sperimenti furon fatti in un Canale murato, assai lungo, e diritto, largo Piedi Parigini 11, in cui l'Acqua alta Piedi 5, scorre con pendenza leggera ed uniforme sopra un fondo di lieve smalto, e trasporta un Galleggiante in 9 secondi per il tratto di Piedi 30 Parigini.

Nel mezzo di tal Canale fu piantata a colpi di mazza un' Asta AB (Fig. 1) armata con punte di ferro nell' estremità inferiore B, perpendicolare alla superficie dell' Acqua, la quale si fissò superiormente in una traversa posante nei muri laterali.

Tale Asta fissa serve di guida ad un'altra CD, che per mezzo di due staffe HD, HF da cui è fasciata, striscia esattamente lungo quella, e si alza ed abbassa con una corda CPQ attaccata alla sommità C della medesima, scorrendo sopra una puleggia P posta nella cima della predetta Asta fissa BA.

Il pezzo mobile CD porta nell' estremità inferiore una Cassetta $\Delta\beta$ (custodita con la Portella β), in cui è situato un vette angolato TMN, il quale è portato dall'alto in basso, e secondando il muovimento dell' Asta CD, è destinato a percorrere ogni punto dell' altezza dell' Acqua, ed a fermarsi per dar luogo ad osservare i diversi gradi della velocità della medesima.

Nella faccia △ della Cassetta è fermata stabilmente l' imboccatura di un Tubo S, per cui l' Acqua s' introduce, e nell' opposta faccia, in perfetta dirittura a questo, è altresì fermata l' imboccatura dell'altro Tubo R, per cui l' Acqua esce dalla Cassetta. L' oggetto di tali Tubi è quello di condurre a traverso della Cassetta quell' Acqua, che naturalmente s' introduce per la loro capacità , prima di risentir l' effetto dell' ostacolo che l' apparato presenta al di lei moto .

Questi Tubi son lunghi Piedi 5 . Per determinar tal lunghezza feci diverse Osservazioni , le quali mi fissarono nella certezza che quella non potesse esser minore di Piedi 4 , affinchè l' Acqua che s' incammina per essi non risenta l'alterazione del moto dell' altra, che urta nell' apparato .

La Portella β chiudesi esattamente con qualche mestura , acciò la Cassetta resti impermeabile all' acqua esterna , e acciocchè il vette TMN non si muova se non che per l' urto dell' acqua che entra , ed esce dai Tubi .

Ogni movimento del vette deve rapportarsi nella parte superiore F, oppure G della Bilancia, e può osservarsi stando in un Palco elevato sopra l' acqua a conveniente distanza .

ESPERIMENTO PRELIMINARE .

§. 2. Questo è diretto a conoscere se vi sia differenza tra la celerità dell' acqua di un Fiume, e la celerità dell' acqua del medesimo che scorra per un Canale immerso orizzontalmente, e direttamente al di lei corso .

Sopra due stabili appoggi, e *sotto la superficie dell' acqua alla profondità di* 6 *Pollici* , fissai parallelo alla superficie della corrente , e in diritto alla medesima , un Tubo AB (Fig. 2.) levigatissimo di 4 Pollici di diametro , e di 5 Piedi per lunghezza .

In un punto S del bordo da cui l' acqua esce, apposi un sottile e delicato vette VV imperniatovi con la maggiore accuratezza , il quale presentasse esattamente la metà della sua superficie alla corrente libera, e l' altra metà all'acqua scorrente per il Tubo immerso .

A quel vette fissai un Indice verticale IS, che sopra l'acqua all' altezza di 8 pollici, mostrasse la situazione del medesimo.

Il risultato di lunghe osservazioni fu sempre, che il vette urtato sì dall'acqua veniente dal Tubo immerso, sì dalla corrente al di fuori del Tubo, si mantenne affatto immobile, e senza alcuna sensibile variazione.

Da tale sperimento adunque risulta, che l'acqua scorrente per l' interno del sopra descritto Tubo, conserva l' istessa uniformità di moto dell' altra che liberamente scorre per il Canale.

PREPARAZIONE DELL' ISTRUMENTO A BILANCIA PER FAR L' ESPERIENZE.

Fig. 1.

§. 3. Chiusa esattamente la Portella β, il vette MNT collocato nella Cassetta, non è mosso se non che dall' acqua che in quella entra dal Tubo S.

Al braccio F è attaccato un filo di ferro FT, che fa equilibrio col Piatto G.

L' estremità inferiore di tal filo è unita mediante un pernietto all'estremità T del braccio TM del vette angolato TMN il quale con ogni delicatezza è imperniato nella Cassetta nel punto M.

Il predetto filo di ferro è incluso in un Tubetto di latta XY fermato nella parte superiore della Cassetta $\Delta\beta$, e staffato all' asta mobile CD. Questo serve a difender quello dall'urto della corrente.

Qualsivoglia urto dell' acqua veniente dal Tubo S è capace di far muovere il vette TMN, e di alterare in conseguenza l'equilibrio tra il filo FT, ed il piatto G.

Tale equilibrio si riconduce apponendo nel piatto G un peso bastante a riottenerlo.

È da osservarsi, che il peso del filo di ferro deve crescere, e scemare scorrendo dall' alto in basso a proporzione del fluido che rimuove. Tali differenze sono da considerarsi necessariamente.

Pertanto, l' acqua che esce dal Tubo S, urtando in N braccio del vette, toglie l' equilibrio col piatto; in cui apponendo un peso esattamente capace per ristabilirlo, questo peso serve per misura della pressione che l' acqua esercita sul vette.

Così facendosi gradatamente discendere la Cassetta per ogni punto dell' altezza, il vette incluso è capace di mostrare in ogni punto qual sia il grado della celerità dell' acqua, mentre mostra la pressione che quella esercita su di esso.

§. 4. Il risultato dell' esperienze fatte con l' Istrumento a Bilancia nel modo indicato, vedesi dalla seguente

TAVOLA I.

Gradazione dell' Immersione dell' Istrumento	Pesi correspettivi per ricondur l' equilibrio			
	Libbre	Oncie	Den.	Grani
Superficie	1	—	11	—
A Piedi 1	1	1	5	1
— P. 2	1	1	23	2
— P. 2 ½	1	1	23	2
— P. 3	1	1	7	13
— P. 4	—	11	18	5
— P. 4 ½	—	10	17	12

DESCRIZIONE, E PREPARAZIONE DI UN SECONDO ISTRUMENTO A MOLINELLO E MOSTRA

Fig. 3.

§. 5. Nella Cassetta $\Delta\beta$ (1) è con la massima diligenza imperniato un molinello M in cui urta l'acqua veniente dal Tubo S.

Tal Molinello ha per Asse un sottilissimo Tubetto OM (effor-mante come unito a quello un Pezzo solo), che si eleva verticalmente, e trapassando al di sopra del Piano circolare O, ivi segna con una Lancetta le revoluzioni di quello dipendenti dal moto dell' Acqua, che entra nella Cassetta per il Tubo S, ed esce per l' altro R.

Il sottil Tubetto inserviente per Asse è difeso dall' urto dell' Acqua da un altro XY, che gli serve come di custodia, e resta fissato come l' altro dell' Istrumento a Bilancia.

Girando sulla Mostra O la Lancetta mossa dal Molinello M, sègna in essa le Revoluzioni fatte da quello in un dato Tempo.

Così dal maggiore, o minor numero di Revoluzioni fatte in un Tempo dato, si conoscono le variazioni del moto del Molinello, e per necessaria conseguenza i diversi gradi di celerità dell' Acqua da cui è mosso.

Potendosi il Molinello ritenere e farsi agire in qualsivoglia punto (2), possono in conseguenza osservarsi in ogni punto i gradi della celerità.

§. 6. Il risultato dell'esperienze fatte con l'Istrumento a Molinello e Mostra, dedotto dal numero delle rivoluzioni osservate in un minuto primo, vien presentato dalla seguente

TA-

---

(1) Tanto questa Cassetta quanto le due Aste AB, CD sono precisamente montate nell' istessa forma della Cassetta, e delle Aste dell' altro Istrumento a Bilancia.

(2) Servendosi della corda CPQ come si è fatto per l' Istrumento a Bilancia.

TAVOLA II

Gradazione dell' Immersione dell' Istrumento	Revoluzioni correspettive osservate in un Minuto Primo
Superficie	Numero 58
A Piedi 1	61 ½
—— P. 2	65
—— P. 2 ½	65
—— P. 3	62
—— P. 4	54 ¾
—— P. 4 ½	50

§. 7. Tali Esperimenti fatti nel corso di otto giorni in presenza di Persone Illustri, e ripetute con ordine retrogrado, mi presentaron sempre li stessi risultati.

§. 8. Usate con somma scrupolosità le necessarie avvertenze, risulta dall' Esperienze fatte con i due Istromenti I.° Che la celerità dell' Acqua di quel Canale cresce fino a Piedi due di profondità. II.° Che da Piedi due sino a due mezzo si conserva l' istessa. III.° Che da questo punto verso al fondo và sempre scemando.

§. 9. Se prendasi qualunque retta AH per Asse (Fig. 4) eguale all' altezza dell' Acqua, cioè a Piedi 5, ed in quella si assegnino le ascisse AB=1 Piede, AC=2, AD=2 ½, AE=3, AF=4, AG=4 ½, e da quei punti si tirino le ordinate AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG' proporzionali rispettivamente o alle girate della Lancetta, o ai pesi posti nel Piatto: se si uniscono l' estremità di quelle A', B', C', D', E', F', G', H', la Figura risultante presenterà la Scala delle Velocità dell' Acqua.

Come abbiamo avvertito che tutte le ordinate AA', BB', CC', DD' ec. della sopra espressa Figura, rappresentano le velocità del fluido, così la media di tali ordinate potrà rappresentare la media celerità dell' Acqua scorrente nel Canale, ove si fecero li Sperimenti.

§. 10. Ma siccome per quanto grande ed ancor scrupolosa esattezza possa usarsi nella costruzione di tali Strumenti, non serve a togliere affatto le difficoltà provenienti dagli attriti, così è evidente che la media celerità dell' Acqua risultante dalla Scala delle velocità come sopra formata, non puo rappresentare esattamente la media celerità assoluta della corrente. Si può per altro corregger questo difetto, facendo uso dei Galleggianti come termine di comparazione, e rettificare i miei Istrumenti per quanto è possibile, mediante il confronto della celerità indicata dalla Scala, con la celerità indicata dai Galleggianti.

§. 11. La Matematica non crea e non inventa, ma prende i suoi Dati ad imprestito. Questi Dati per la Scienza Idraulica non sono somministrati se non dalla esperienza. Non possiamo far conto e combinare se non delle masse, l' azione delle quali dipende dall' azione combinata delle Particelle che la compongono, mentre queste ci sono incognite affatto.

Per rintracciare il vero concetto della velocità media, converrebbe poter segnare in tutti i Punti dell' altezza i gradi della velocità dell' Acqua. A tale scopo son diretti i Tentativi da me fatti col mezzo delle due Macchine.

Il Pendolo, il Tubo ricurvo, la Fiasca Idrometrica, le Aste Ritrometriche, ed altre invenzioni di Uomini insigni: gli Esperimenti dei Guglielmini, Castelli, Zendrini, Eust. Manfredi, Grandi, Frisi e altri tra i nostri, come pure le Osservazioni dei Cav. Borda, Juan, Smèaton, d' Alembert, Bossut, ec. potrebbero forse rendersi vantaggiose, riferendole per quanto si può, ad illuminare il mio Tentativo.

Con questi intanto noi siamo in grado di conoscere certi abbagli che han data causa a sbagli maggiori. Di-

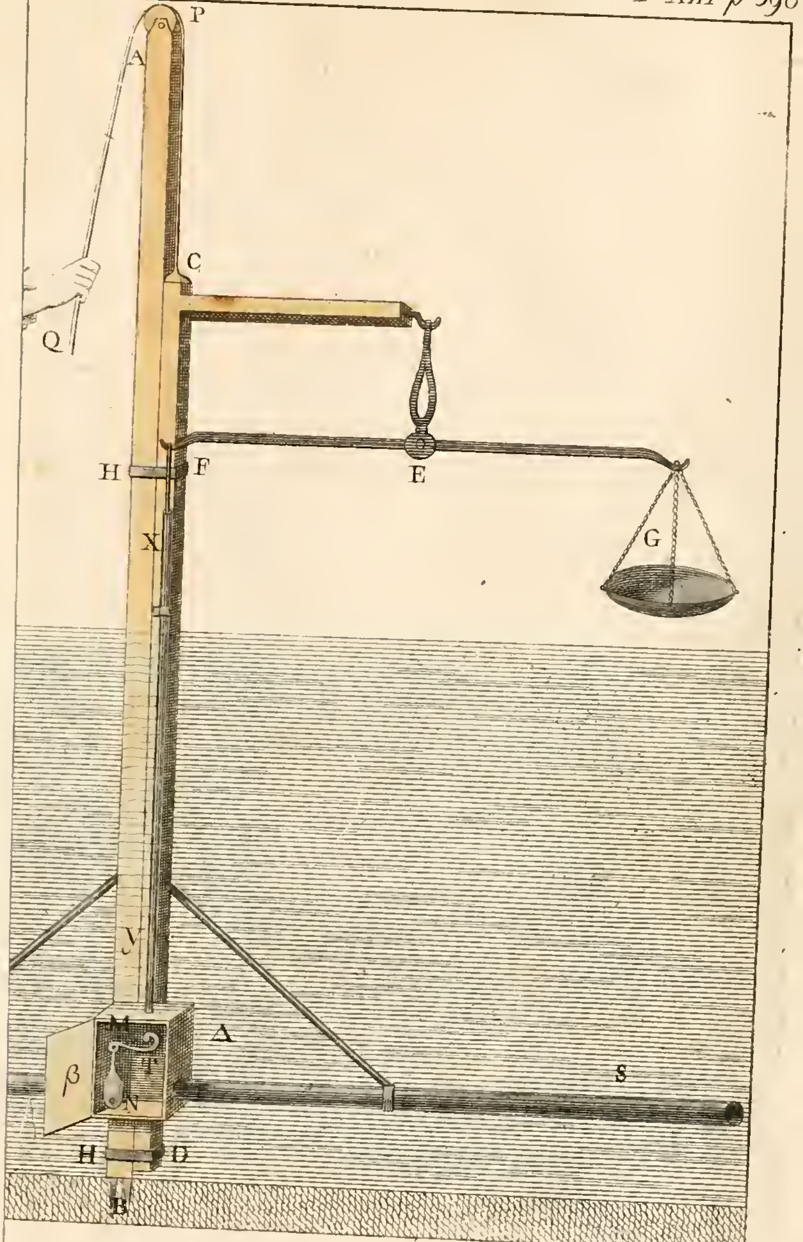

P
A
C
Q
H
F
E
G
X
y
M
T
β
N
A
S
H
D
B

Fig 2

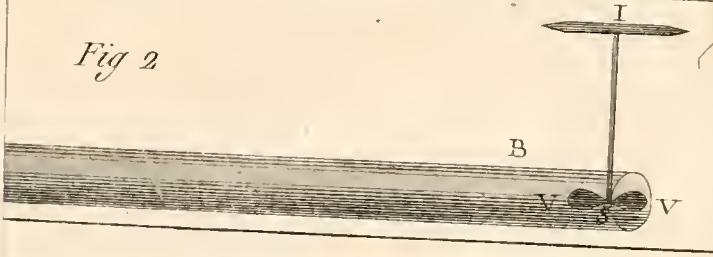


Fig. 1

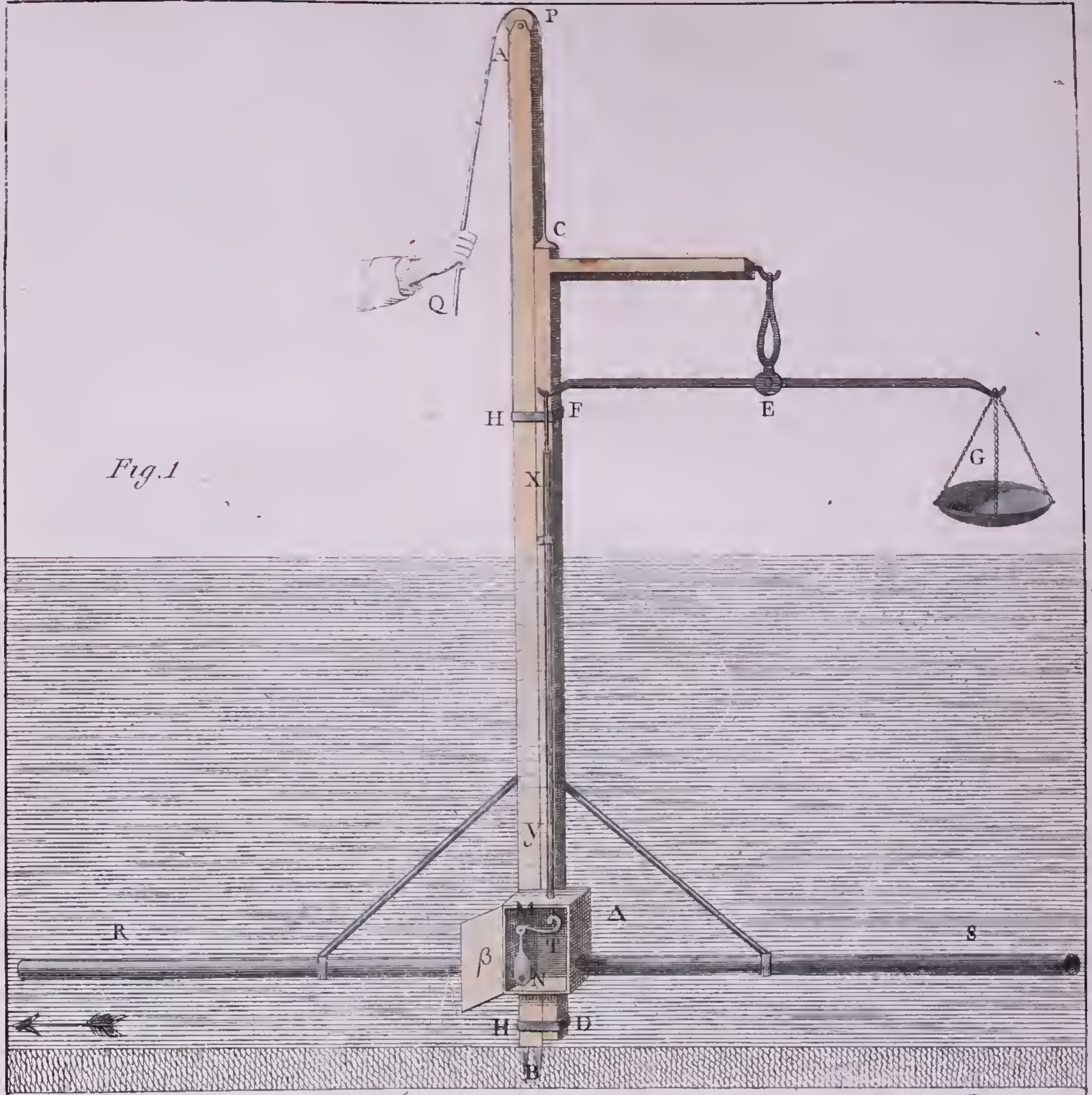
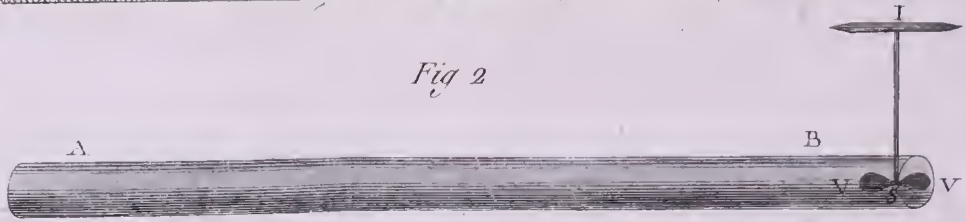
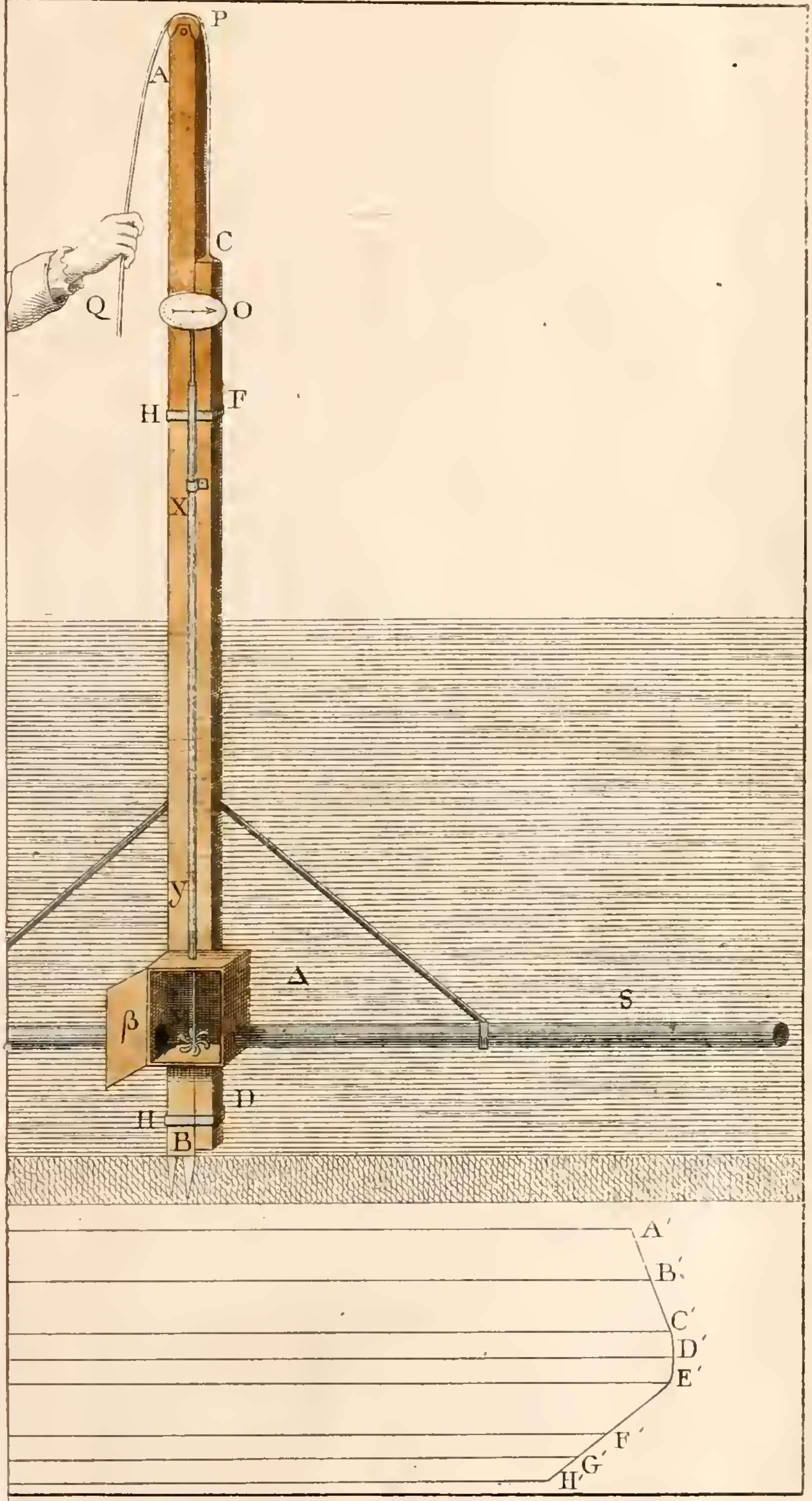

P
A
C
Q
H
F
E
G
X
y
M
A
R
S
β
T
N
H
D
B

Fig 2




P
A
C
Q
O
H
F
X
y
Δ
β
S
D
H
B
A′
B′
C′
D′
E′
F′
G′
H′

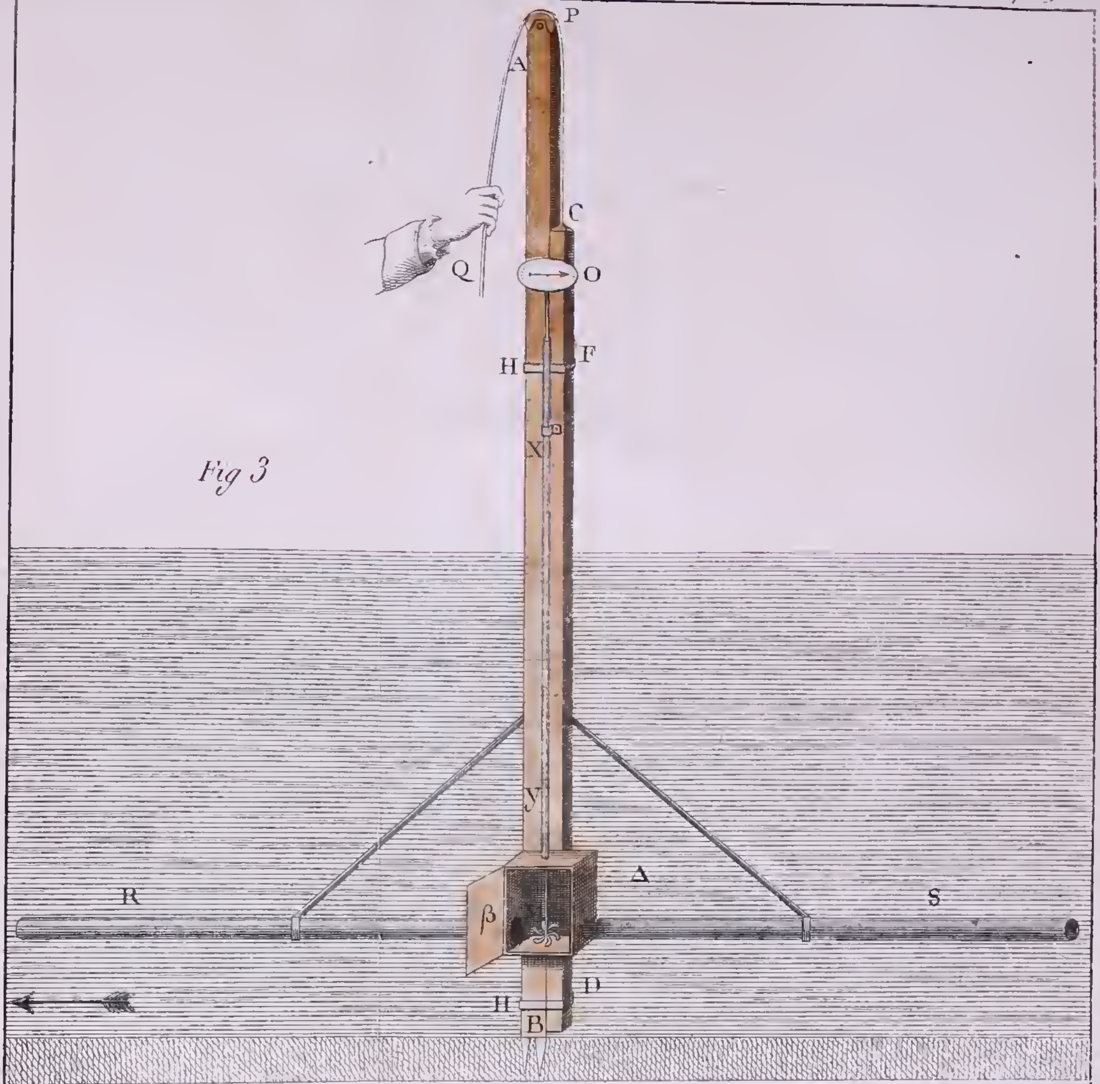


Fig 3

P
A
C
Q
O
H
F
X
y
Δ
R
S
β
D
H
B

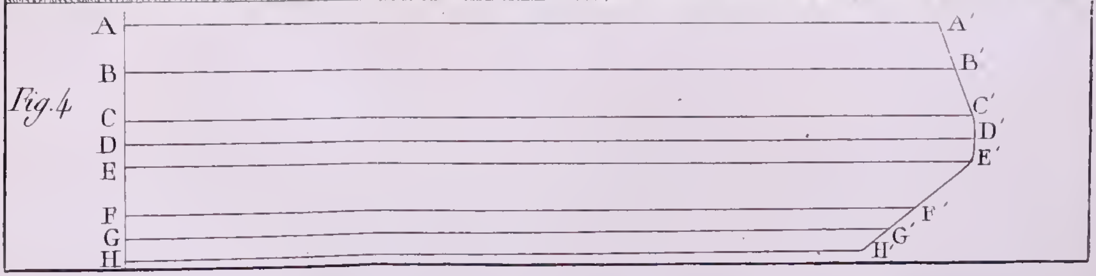


Fig. 4

A
B
C
D
E
F
G
H
A′
B′
C′
D′
E′
F′
G′
H′

Diversi Autori Oltramontani han creduto, fatta astrazione dalle Resistenze del Fondo e delle Ripe, o che la Celerità dell' Acqua si mantenga costante dalla superficie sino al Fondo, oppure che vada verso quello sempre scemando. Il nostro Guglielmini, ed altri Italiani crederono il contrario, asserendo che la Celerità si accresce in ragione della maggiore profondità, sin tanto che non servan di ostacolo le resistenze del Fondo. Ciò sicuramente resta comprovato dalle mie Esperienze.

Mi astengo da altri Riflessi, ma non posso astenermi dal mostrare il più vivo ed acceso desiderio, che l' illustre Società Italiana apra qualche nuova strada per cui si giunga a risolvere l' importantissimo Problema, la soluzione del quale tanto interessando la felicità degli Uomini, solleverebbe in eminente grado di gloria la Scienza delle Acque.

Possa esser sempre vero quanto confessò il Sig. d' Alembert, che gli Autori Italiani sonosi in quella distinti, e che a loro sia dovuto tutto ciò che a tal riguardo è stato fatto di grande.

LA MOLTITUDINE DEGLI ERRORI OCCORSI DEVE ATTRIBUIRSI QUASI SEMPRE A COLPA DEGLI AMANUENSI CHE HANNO SERVITO GLI AUTORI.

Pagina	Linea	Errori	Correzioni
107	23	$\frac{G}{m(yR)^2}$	$\frac{G}{my^2}$
	24	$\frac{G}{(k-y)^2R^2}$ $\frac{G}{my^2R^2}$	$\frac{G}{(k-y)^2}$ $\frac{G}{my^2}$
108	1	$\frac{G}{(k-y)^2R^2}$	$\frac{G}{(k-y)^2}$.
111	10	60, — 0,272727	60 — 0,272727
114	20	.. (47,06129—6,932358)R	...(47 334156—6,932358
115	15	7 83322	73835322
118	16	V = Piedi 3,0194,5	V = Piedi 30194,5
121	15	$R\left(1+\frac{3}{11}\right)$	$R\sqrt{\left(1+\frac{3}{11}\right)}$
124	14, 15	$-\frac{N\varphi-a\omega}{2aNv^3}$	$+\frac{N\varphi-a\omega}{2aNv^3}$
	17	$\frac{3(N\varphi-a\omega)^2}{8a^2N^2v}$	$\frac{3(N\varphi-a\omega)^2}{8a^2N^2v^5}$
	18	$\frac{1}{v}B:\frac{1}{2}Bx$	$\frac{1}{v}:\frac{1}{2}Bx$
125	8	$\frac{\varphi}{2a}\ \frac{\omega}{2N}$	$\frac{\varphi}{2a}-\frac{\omega}{2N}$
	14	8,5215979	8,5216979
	17	$\frac{\varphi}{3a^2\Psi}=447434$	$\frac{\varphi}{3a^2\Psi}=2,447434$
126	3	riesca	riesce
128	penul.	3,1720409	3,2720409
129	penul.	$\frac{2\delta y+\delta x)dx}{(a+x)^2}$	$\frac{2\delta(y+dx)dx}{(a+x)^2}$
130	penult.	$\frac{3}{8v^5}N\omega^2$	$\frac{3R}{8v^5}.N\omega^2$

Alli numeri poi 263622 ... 613,28 ... 4413,76 ... 259208,24 intendasi supposto il simbolo " di secondi

Pagina	Linea	Errori	Correzioni
131	2	Log. $a = 9{,}4356286$	Log. $a = 9{,}4357286$
	9	285″, 48	281″. 48
132	21	$(-Q)' = -Q^2$	$(-Q)' = -Q$
133	2	$(r+1)^{esimo} = \frac{\mu(2(\pi+1)-1}{(\pi+1)^2} P^{-\pi-\frac{1}{2}} Q^{\pi+1}$	$(r+1)^{esimo} = \frac{\mu(2(\pi+1)-1)}{(\pi+1)^2} P^{-\pi-1+\frac{1}{2}} Q^{\pi+1}$
	ult.	$P^{-1} = \frac{N-x}{v^2+\omega(59-a)}$	$P^{-1} = \frac{N-x}{Nv^2-(v^2-\omega)x}$
134	19	$\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)}$	$\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^\pi}$
135	15	$-\frac{(c)}{(a)}\Delta'' + \frac{(d)}{(a)}\Delta'$	$-\frac{(c)}{(a)}\Delta' + \frac{(d)}{(a)}\Delta$
136	5	$\Delta' = \frac{(\;^2-\pi')k^2v^{2\pi}}{M^2} + \frac{2\;kv^{2\pi}}{Mf^2}$	$\Delta' = \frac{(\pi^2-\pi')k^2v^{2\pi}}{M^2} + \frac{2\pi kv^{2\pi}}{Mf^2}$
	11	$\frac{\pi v^{2\;\;-2}}{M}$	$\frac{\pi v^{2-\pi 2}}{M}$
	18	$(v^2-(v^2-\omega^2))$	$(v^2-(v^2-\omega))$
138	1	$-\frac{C^{(\pi-1)}}{z\sqrt{M}+\sqrt{k}}$	$+\frac{C^{(\pi-1)}}{z\sqrt{M}+\sqrt{k}}$
	10	$\frac{1}{2Mdz}$	$\frac{1}{2.Mdz_2}$
	11	$\frac{1}{2.3M^{\frac{1}{2}}dz}$	$\frac{1}{2.3M^{\frac{3}{2}}dz^3}$
	12	$\frac{1}{2.3..\pi M^{\frac{1}{2}}\pi dz^{\pi-1}}$	$\frac{1}{2.3..\pi-1.M^{\frac{\pi-1}{2}}dz^{\pi-1}}$
	ult.	$\frac{1}{2.3M^{\frac{3}{2}}dz3}$	$\frac{1}{2.3.M^{\frac{2}{3}}dz}$
139	1	$\frac{1}{2.3..\pi M^{\frac{1}{2}}dz^{\pi-1}}$	$\frac{1}{2.3..(\pi-1)M^{\frac{\pi-1}{2}}dz^{\pi-1}}$
	16	$(Mz^2+k)^{\pi-1}$	$(Mz^2-k)^{\pi+1}$
	17	$\frac{Z}{(1+fz)^2(Mz^2-k)^\pi}$	$\frac{Z'}{(1+fz)^2(Mz^2-k)^\pi}$
	ivi	$(Mz^2-k)^{\pi-1}$	$(Mz^2-k)^{\pi+1}$

Pag.

PAGINA	LINEA	ERRORI	CORREZIONI
140	18	divise	divisa
142	2	$(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi-1}$	$(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{\pi+1}$
	8	$(1-f^2z^2z)^3(\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1)}$	$(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}$
145	17	$(z\sqrt{}-\sqrt{k})^{+1}$	$(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}$
	15	per p	per Π
	ivi	prendano	prendono
	18	fatto $z=\frac{1}{f}$	fatto $z=\frac{-1}{f}$
146	3	$6(-2)^{\pi}N2\omega^2k^{\frac{\pi}{2}}$	$6(-2)^{\pi}N^2\omega^2k^{\frac{\pi}{2}}$
	5	$(-2)^{\pi+2}N^3\omega^3k^{\frac{\pi+3}{2}}$	$(-2)^{\pi+2}N^3\omega^5k^{\frac{\pi+2}{3}}$
147	24	*Teorema* 8° Λ	*Teorema* 8° Λ'
149	6	$+24(\pi+1)$	$+24\cdot\pi(\pi+1)$
149 e 150		Nelle formole di C, C', C'', C''' . . . parecchie lettere sono male impresse, e molti esponenti troppo bassi .	
152	8	$\int\Omega z^p dz=\frac{\Omega}{p}z^{p-1}+\text{Cost.}$ $=\frac{\Omega}{p}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{p-1}{2}}+\text{Cost.}$	$\int\Omega\,{}^{p}dz=\frac{\Omega}{p+1}z^{p+1}+\text{Cost.}$ $=\frac{\Omega}{p+1}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{p+1}{2}}+\text{Cost.}$
	10	$\text{Cost.}=\frac{\Omega}{p}\left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{p-1}{2}}=-\frac{\Omega}{p}\cdot\frac{1}{v^{p-1}}$	$\text{Cost.}=-\frac{\Omega}{p+1}\left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{p+1}{2}}=-\frac{\Omega}{p+1}\cdot\frac{1}{v^{p+1}}$
	11	$\int\Omega z^p dz=\frac{\Omega}{p}\left[\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{p-1}{2}}-\frac{1}{v^{p-1}}\right]$	$\int\Omega z^p dz=\frac{\Omega}{p+1}\left[\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{p+1}{2}}-\frac{1}{v^{p+1}}\right]$
	16	$(N-x)$	$(N-x)^{\frac{1}{2}}$
154	1	$(M\omega(a+x))^{2\pi-2}$	$(N\omega(a+x))^{2\pi+1}$
156	9	$e-f2x$	$e-f^2x$
157	2	$\frac{1}{4f^6N^2}$	$\frac{1}{4f^6N^3}$
	5	$N^2M3\omega$	$N^2M^3\omega$ e s' in-

Pagina	Linea	Errori	Correzioni
		e s' intendano tutti e tre i primi termini chiusi tra ( ) perchè moltiplicatori della seguente quantità .	
158	1	$(2N-x)^{\frac{1}{2}}$	$2(N-x)^{\frac{1}{2}}$
	7	$4av^6$	$4a\omega v^6$
	11	$4f10N^4$	$4f^{10}N^4$
	12	$2M(N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}$	$2M(N-x)^{\frac{3}{2}}(e-f^2x)^{\frac{3}{2}}$
	14	$K^{\frac{5}{2}} a^4 \quad {}^2$	$k^{\frac{5}{2}} a^4 \omega^2$
159	3	$105\, k^{\frac{3}{2}} a^4 \quad {}^2$	$105\, k^{\frac{3}{2}} a^4 \omega^2$
		$63\, k^{\frac{5}{2}} a^3 \quad v^2$	$63\, k^{\frac{5}{2}} a^3 \omega v^2$
	4	$3k^{\frac{9}{2}} a^3\, f \quad v^4$	$3k^{\frac{9}{2}} a^3 f^2\, v^4$
162	10	della Terra	dalla Terra
207	17	osservazioni	operazioni
208	2, *e in tutta la Mem.*	Saij Lussac	Gai-Lussac
	12	*Verbescerung . . . Deobachtungen*	*Verbesserung... Beobachtungen*
209	29	$\cos.^2\alpha(2$	$\cos.^2\alpha(1$
210	7	$4n^2\Psi$	$\text{sen.}^2\Psi$
	10	$\frac{\cos.^2\alpha}{}$	$\frac{\cos.^2\alpha}{}$
211	1	γ	$\sqrt{}$
	6	$\frac{\text{sen.}\alpha + 2m}{}$	$\text{sen.}\alpha + \frac{2m}{}$
	20	$(z+b)^2$	$(z+v)^2$
	26, e formole seg.	5	s
216	4	$\frac{p}{c'} : \frac{p'}{c}$	$\frac{p}{o} : \frac{p'}{c'}$
	27	barometro	manometro
219	16	iv'	$i'v$
	19	$e - \frac{-v}{\theta}$	$-e^{-\frac{v}{\theta}}$

Pagina	Linea	Errori	Correzioni
219	28	$i'v$	iv'
220	9	$-$	$=$
	10	$\frac{1}{v'}$	$\frac{1}{v}$
221	24	caso	capo
	33	$\frac{dp'}{p}$	$\frac{dp'}{p'}$
221 e 222	per tutte le pag.	i'	i
223	16	$\frac{gh.f\ldots}{g'hf\ldots}$	$\frac{gh'f\ldots}{g'h'f\ldots}$
	per tutta la pag.	5	s
	17	V^2	v^2
	18	$L\left(\frac{hf(\ldots}{h\,f(\ldots}\right.$	$L\,\frac{hf(\ldots}{g'f(\ldots}$
	23	$\frac{t+v}{2q}$	$\frac{t+t'}{2q_1}$
	ivi	$\frac{v^5}{a}$	$\frac{5v}{ae}$
224	19	$=c$	$=c'$
227	13	dai 55 +	dai 55 ai 55 +
228	33	Zwölfty	Zwölftes
229	3	21	XXI
	13	Sadolin	Gadolin
231	13	21	XXI
233	14	meno	diverse
	27	si condensa	si condensa irregolarmente
234	10, e 11	$\frac{sm^2 \text{sen.} \Psi \cos.^2 \Psi}{2}$	$\frac{5m^2 \text{sen.}^2 \Psi \cos.^2 \Psi}{2}$
235	25	h''	g''
236	1	$\delta\Delta'$	$\delta'\Delta$
238	12, e 15	sm^2	$5m^2$
239	8	minore	maggiore
	9	meno	più
261	17	(Fig. 50)	(Fig. 5[illegible])
302	8	risultati $f^{-1}(y')$	risultati $f^{0}(y'); f^{-1}(y')$
305	17	non potrà	potrà
	20	q	g
325	14	< 2	< 3

INDICE

DELLE COSE CONTENUTE IN QUESTA PRIMA PARTE.

Statuto della Società. Pag. III
Catalogo de' Socj. X
Annali della Società stessa continuati dal P. POMPILIO POZZETTI. XVI

Della misura dell' anno tropico solare, Memoria del P. D. GIUSEPPE PIAZZI. pag. 1
Descrizione d' una macchina pel cui mezzo si predice l'avvenimento di qualsivoglia ecclissi del Sole e della Luna, del Sig. GIUSEPPE VENEZIANI presentata dal P. D. *Pietro Cossali.* 9
Sul calcolo delle derivazioni, Memoria del Sig PIETRO PAOLI. 23
Opposizioni d' Herschel osservate dal Sig. VINCENZO CHIMINELLO. 32
Problema Grafico, del Sig. GIUSEPPE TRAMONTINI presentata dal Sig. *Antonio Cagnoli*. 38
Memoria intorno alla rifrazione lunare del Sig. Ab. FRANCESCO BERTIROSSI-BUSATA presentata dal Sig. Ab. *Vincenzo Chiminello*. 6
Esame di alcuni tentativi di soluzione di un famoso problema di Meccanica Statica, del Sig. MICHELE ARALDI 74
Sull' opinione delle pioggie de' sassi dai vulcani lunari, Disquisizione Matematica del P. D. PIETRO COSSALI. 104
Osservazioni sulle resistenze dell' acqua e dell' aria del Sig. PAOLO DELANGES: *alla p. 206 sono le figure*. 161
Esperienze sul dispendio d'acqua de' tubi e de'canali rettilinei e tortuosi DEL MEDESIMO. 172
Considerazioni su d' un Problema Meccanico, del Sig. GIOACHINO PESSUTI. 181
Sopra un metodo d' approssimazione proposto senza dimo-

strazione da *Simpson* per la risoluzione numerica d' ogni specie d' equazioni DEL MEDESIMO . 193

Sopra la misura delle altezze col Barometro , Memoria del P. D. GIUSEPPE MARIA RACAGNI . 207

Sull' esperimento Poleniano della cadute de' Gravi in materie cedevoli , Memoria del Sig. Ab. ANGELO ZENDRINI presentata dal Sig. *Antonio Cagnoli* . 242

Problema Geometrico del Sig. GIANFRANCESCO MALFATTI : Fra i triangoli equilateri i quadrati, e il circolo , che si possono inscrivere in un dato triangolo , sceglier la figura dell' aja massima . 247

Di alcune formole , che esprimono i tre lati de' triangoli rettilinei rettangoli del Sig. GIUSEPPE SLOP . 285

Alcune proprietà generali delle funzioni , Memoria del Sig. PAOLO RUFFINI . 292

Delle variazioni nella longitudine eliocentrica d' un pianeta , che derivano dalla di lui aberrazione e nutazione , dall' aberrazione del Sole, e dalle perturbazioni cagionate nello stesso per l'azione dei pianeti e della luna sulla terra, Memoria del Sig GIUSEPPE SLOP DE CADEMBERG : *le figure sono alla pag.* 284. 336

Nuovi teoremi sulla possibilità dell'equazione $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ e ricerca del numero de' termini del periodo della radice quadra di un numero non quadrato , sviluppata in frazione continua . Memoria del Sig. FRANCESCO PEZZI . 342

Sopra la misura delle forze muscolari . Memoria del Sig. VITTORIO FOSSOMBRONI . 366

Sopra la tastatura degli organi e dei cembali . Memoria del Sig. GIAMBATTISTA DALL' OLIO presentata dal P. *Pompilio Pozzetti* . 374

Sull' integrazione di un nuovo canone d'equazioni differenziali d' ordine alto, Memoria del Sig. FRANCESCO CARDINALI presentata dal Sig. *Canonico Girolamo Saladini* . 381

Tentativi per investigare la celerità dell' acque correnti , del Sig. FRANCESCO FOCACCI , presentati dal Sig. *Vittorio Fossombroni* . 390

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY